

0.2 Modele obținute prin liniarizare în jurul unui punct static de funcționare (modele de semnal mic)

Etapă de analiză a unei clase de circuite, care precede – de regulă – etapa de proiectare, are ca scop stabilirea modului de variație în timp a mărimilor din circuit, produse ca urmare a aplicării unor semnale din exterior sau ca urmare a instabilității circuitului. În ambele cazuri, semnalele căutate sînt funcții de timp, soluții ale unor sisteme de ecuații neliniare, din cauza neliniarităților introduse de componentele electronice. (Nu se pune problema eliminării componentelor neliniare, pentru că rolul lor este esențial în realizarea funcțiunilor circuitelor electronice.) O parte din ecuații sînt liniare (Kirchhoff) iar celelalte sînt neliniare (modelele dispozitivelor). Ecuațiile sînt algebrice sau diferențiale și pot avea termeni liberi variabili sau coeficienți variabili în timp. Rezolvarea lor analitică, în cazul general, este – cel mai adesea – imposibilă. Din acest motiv, analiza circuitului aflat în regim dinamic devine un demers laborios, cu calcule complicate, spre deosebire de analiza circuitelor liniare, care este simplă. Totuși, există o clasă de probleme în care analiza se poate simplifica, și care apare în mod frecvent în practica electroniștilor: analiza abaterilor față de un punct static de funcționare (p.s.f.), atunci cînd abaterile sînt suficient de mici. Ideea este relativ simplă: dacă abaterile față de p.s.f. sînt mici, comportarea circuitului neliniar poate fi aproximată ca fiind liniară, deci modelul de circuit în care mărimile variabile sînt abaterile va fi un model liniar.

Pentru clasa de circuite menționată mai sus, analiza se desfășoară în două etape:

- analiza regimului static (p.s.f.), ecuații neliniare
- analiza abaterilor față de p.s.f. (analiza regimului dinamic), folosind modelul de semnal mic (model liniar).

Analiza regimului static (p.s.f.) urmărește cunoașterea valorilor (considerate constante) ale tensiunilor și curenților din circuit, în absența semnalului. Aceasta solicită rezolvarea o singură dată a unui sistem de ecuații neliniare cu coeficienți constanți – problemă rezolvabilă prin metode numerice. Este adevărat că regimul static poate fi perturbat, deci se mai pune problema modificării p.s.f. sub acțiunea perturbațiilor. Totuși, majoritatea perturbațiilor acționează foarte lent, în comparație cu perioada semnalului, deci se consideră că p.s.f. este constant pe durate mari ale regimului dinamic.

Pentru analiza de regim dinamic, trebuie construite modelele micilor abateri ale dispozitivelor electronice, care sînt modele liniare. Determinarea abaterilor, ca funcții de timp, este o problemă simplă, în care modelul este liniar. Semnalele căutate prin problema de analiză sînt sume între valorile de regim staționar și abaterile corespunzătoare. Dacă abaterile față de p.s.f. sînt mici – așa cum s-a presupus – valorile medii ale variabilelor din regimul dinamic sînt egale cu valorile de regim static (exemplu: în figura 0.6, valoarea I_A este atît valoarea medie a semnalului din regim dinamic, cît și valoarea de regim static, adică valoarea mărimii $i_A(t)$ atunci cînd nu există semnal).

În conformitate cu metoda de analiză descrisă, trebuie răspuns la trei întrebări:

- cît de mare poate fi abaterea, astfel încît să fie încă valabilă aproximația liniară (cu alte cuvinte: care este limita semnalului considerat mic)?
- cum se construiește modelul liniar al abaterilor față de p.s.f. (model de semnal mic)?
- este posibil ca analiza funcționării circuitului să sară peste etapa determinării p.s.f.?

Răspunsul la prima întrebare rezultă dintr-un compromis: modelul este valabil atît timp cît erorile pe care el le determină în etapa de analiză sînt considerate acceptabile. O rezolvare orientativă poate admite limite largi ale semnalului, în timp ce o rezolvare cu pretenții de exactitate va fi valabilă numai pentru un interval îngust al semnalelor aplicate. În funcție de natura modelului și de limita acceptată a erorii, se stabilește limita abaterii (condiția de semnal mic) pentru care modelul este valabil. Stabilirea limitei de semnal mic va însoți exemplele prezentate în continuare.

A doua chestiune se rezolvă astfel: modelul abaterilor va avea același număr de ecuații ca modelul valorilor instantanee, iar aproximarea se obține prin dezvoltare în serie, din care se rețin numai termenii de gradul I. Aceasta înseamnă că se elimină termenii care reprezintă valori de regim staționar, ca și termenii de grad superior, indiferent că este vorba de ecuații algebrice sau de ecuații diferențiale. Relațiile între abaterile mărimilor constituie modelul de semnal mic, care se poate exprima prin parametri de cuadripol (variante preferată în acest curs) sau prin alte tipuri de modele. Evaluarea erorii de aproximare duce ulterior la stabilirea limitelor de valabilitate (condiția de semnal mic).

În fine, ultima întrebare are răspuns negativ: deoarece o parte din parametrii modelului de semnal mic depind de p.s.f., este necesar să rezolvăm problema p.s.f., înainte de a utiliza modelul de semnal mic. Această constatare este intuitivă, dacă ne gândim că coeficienții dezvoltării în serie a unei funcții depind de valoarea variabilei independente în jurul căreia se face dezvoltarea.

Convenții asupra notațiilor

Fiind vorba despre mai multe valori care caracterizează aceeași mărime variabilă, putem evita confuziile dacă se respectă o singură convenție asupra notațiilor.

Convenim să notăm:

- cu simbol majusculă și indici majuscule valorile de regim static ale semnalelor;
- cu simbol minusculă și indici majuscule valorile instantanee ale semnalelor (funcții de timp);
- cu simbol majusculă și indici minuscule valoarea de vîrf a componentei alternative, ca abatere față de valoarea medie (cum ar fi amplitudinea unei sinusoidale).

În figura 0.6, este reprezentat un semnal de curent, presupus periodic. Valoarea instantanee a curentului, ca funcție de timp, a fost notată cu $i_A(t)$. Valoarea medie a curentului (sugerată de linia punctată) este notată cu I_A ; ea poate fi o mărime pozitivă sau negativă sau poate fi nulă (în figură are valoare pozitivă). Valoarea maximă a abaterii față de medie (amplitudinea) este notată cu I_a . Amplitudinea este întotdeauna o mărime pozitivă. Ocazional, putem să folosim și alte notații (fără a le contrazice pe precedentele), cum ar fi notarea componentei alternative (abaterea instantanee față de valoarea medie) prin $\Delta i_A(t)$.

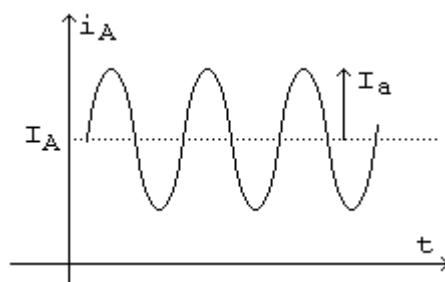


Figura 0.6: Convențiile de notație pentru mărimile variabile

Exemplul 1: liniarizarea modelului, în jurul p.s.f., pentru o diodă polarizată direct, în regim cvasistaționar (frecvențe mici).

Circuitul din figura 0.7 conține o diodă semiconductoare, o sursă de c.c. pentru polarizare, un rezistor pentru limitarea curentului și o sursă de semnal. Problema de analiză cere găsirea evoluției în timp a semnalului de tensiune pe diodă și a semnalului de curent, adică a funcțiilor $u_A(t)$ și $i_A(t)$, cunoscându-se forma semnalului dat de generator. (În acest caz particular, semnalul este sinusoidal, dar rezolvarea urmează aceeași cale pentru orice formă a semnalului.)

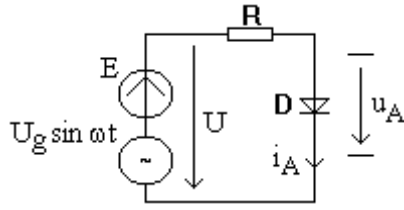


Figura 0.7: Circuitul de analizat

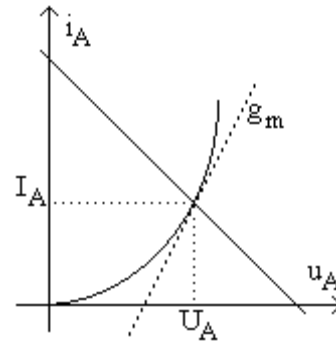


Figura 0.8: P.s.f.: rezolvare grafică

Ecuatiile circuitului:

$$U = E + U_g \sin \omega t = Ri_A + u_A \quad (0.9)$$

$$i_A = I_s \left[\exp\left(\frac{qu_A}{mkT}\right) - 1 \right] \quad (0.10)$$

Se constată că nu există soluție analitică pentru sistemul de mai sus. Se fac notațiile:

$$u_A(t) = U_A + \Delta u_A(t),$$

$$i_A(t) = I_A + \Delta i_A(t),$$

în care U_A , I_A , sînt valorile din regimul staționar (p.s.f.), iar $\Delta u_A(t)$ și $\Delta i_A(t)$ sînt abaterile. Se pune problema dacă există posibilitatea analizei circuitului (cel puțin în cazul abaterilor mici în jurul p.s.f.) prin analiza succesivă a p.s.f. și a regimului dinamic.

Întîi se stabilește p.s.f. (ipoteza $U_g=0$). Ecuatiile regimului staționar sînt cele din (0.11) și (0.12). Expresiile grafice ale celor două ecuații sînt prezentate în figura 0.8, iar rezolvarea poate fi grafică sau prin proceduri numerice.

$$E = RI_A + U_A \quad (0.11)$$

$$I_A = I_s \left[\exp\left(\frac{qU_A}{mkT}\right) - 1 \right] \quad (0.12)$$

Se presupune că abaterile tensiunii și curentului în jurul p.s.f. sînt suficient de mici încît punctul de funcționare curent se deplasează pe tangenta la curbă (dreapta care trece prin p.s.f., figurată cu linie întreruptă). În acest caz, ele sînt legate prin relația:

$$\Delta i_A = g_m \Delta u_A, \quad (0.13)$$

în care g_m este panta caracteristicii diodei, în jurul p.s.f. (încîlnarea dreptei tangente):

$$g_m = \frac{di_A}{du_A} = I_s \frac{q}{mkT} \exp\left(\frac{qU_A}{mkT}\right) \approx \frac{I_A}{v_T} \quad (0.14)$$

Ecuția (0.9) se rescrie:

$$U = E + U_g \sin \omega t = R(I_A + \Delta i_A) + U_A + \Delta u_A$$

Prin utilizarea relației (0.11), se deduce:

$$U_g \sin \omega t = R \Delta i_A + \Delta u_A = (R g_m + 1) \Delta u_A, \quad (0.15)$$

de unde se constată că Δu_A și Δi_A sînt de aceeași formă cu semnalul de la generator ($U_g \sin \omega t$), adică:

$$\Delta u_A(t) = \frac{U_g}{R g_m + 1} \sin \omega t = U_a \sin \omega t \quad (0.16)$$

$$\Delta i_A(t) = \frac{U_g}{R + \frac{1}{g_m}} \sin \omega t = \frac{U_g}{R + r_d} \sin \omega t = I_a \sin \omega t \quad (0.17)$$

În ecuațiile de mai sus, I_a și U_a sînt amplitudinilor abaterilor față de p.s.f.. Ecuațiile (0.11) și (0.17) descriu circuitele echivalente ale regimurilor staționar, respectiv dinamic (figura 0.9).

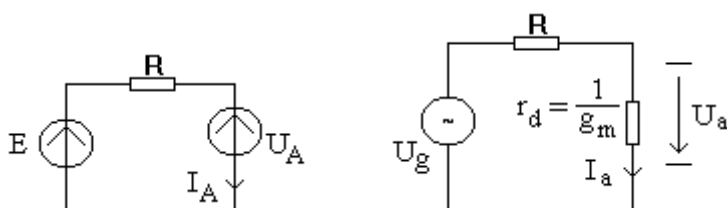


Figura 0.9: Circuitele echivalente de c.c., respectiv de c.a.

Modelul în abateri al diodei este stabilit prin relația (0.13) și valoarea din (0.14). Circuitul echivalent complet, pentru valori instantanee, este cel din figura 0.10. Elementele din circuit notate cu minuscule arată că este vorba de parametri ai modelului diodei și nu de componente separate de circuit.

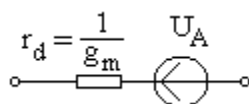


Figura 0.10: Circuitul echivalent al diodei

Observații:

1. Constatarea că abaterile au aceeași formă cu partea variabilă a semnalului arată că modelul diodei este liniar. Acest lucru este valabil numai pentru semnal suficient de mic.
2. Modelul este valabil pentru frecvențe joase și în polarizare directă a diodei.
3. Parametrul modelului de semnal mic (panta caracteristicii) este funcție de p.s.f., de unde ordinea obligatorie a rezolvării: p.s.f., apoi regimul dinamic.

Condiția de semnal mic

Revenim la întrebarea: cât de mici trebuie să fie abaterile, astfel încât să putem aproxima dioda printr-un model liniar? Răspunsul este: atît cît să nu se producă erori de aproximare mai mari decît limita considerată admisibilă. Pentru a evalua eroarea, se dezvoltă în serie curentul prin diodă, i_A , în jurul valorii de regim staționar a tensiunii, U_A : $i_A = I_A + \Delta i_A$

$$\begin{aligned}
i_A &= i_A(U_A) + \frac{\Delta u}{1!} \cdot i'_A(U_A) + \frac{\Delta u^2}{2!} \cdot i''_A(U_A) + \dots = \\
&= I_A + \frac{\Delta u}{1!} \cdot I_S \cdot \frac{q}{mkT} \cdot \exp\left(\frac{qU_A}{mkT}\right) + \frac{\Delta u^2}{2!} \cdot I_S \cdot \left(\frac{q}{mkT}\right)^2 \cdot \exp\left(\frac{qU_A}{mkT}\right) + \dots = \\
&\cong I_A \left(1 + \frac{\Delta u}{v_T \cdot 1!} + \frac{\Delta u^2}{v_T^2 \cdot 2!} + \dots\right)
\end{aligned}$$

unde $v_T = \frac{mkT}{q} > 26 \text{ mV}$, la temperatura camerei. Se mai poate scrie:

$$\Delta i_A = I_A \left(\frac{\Delta u}{v_T} + \frac{\Delta u^2}{2v_T^2} + \dots \right), \quad (0.18)$$

din care rezultă modelul (0.13), prin neglijarea termenilor de rang superior. În tabelul de mai jos este dată eroarea relativă, dată de trunchierea seriei la termenul liniar (neglijarea termenului pătratic și a următoarelor), în funcție de valoarea raportului $\frac{\Delta u}{v_T}$.

$\frac{\Delta u}{v_T}$	eroarea de trunchiere
0,15	7,3%
0,12	5,9%
0,1	5,2%
0,08	3,9%
0,06	3%

Tabelul 0.1: Eroarea relativă de aproximare prin termenul liniar

O valoare rezonabilă a erorii este de 5%, pentru care se deduce din tabel că $\Delta u \leq 0,1 \cdot v_T$. Pentru erori mai mici de 5%, condiția de semnal mic pentru o diodă este ca $\Delta u \leq 2,5 \text{ mV}$. În consecință, modelul liniar (0.13) este valabil dacă

$$U_a \leq 2,5 \text{ mV}. \quad (0.19)$$

În realitate, limita este puțin mai mare, deoarece nu a fost considerat parametrul m , a cărui valoare este supraunitară.

Exemplul 2: modelul în abateri (model de semnal mic) al tranzistorului bipolar, aflat în RAN și în regim cvasistationar.

Caracteristica de transfer, considerată la tensiune colector-emitor constantă, are forma:

$$i_C \cong I_{CS} \exp\left(\frac{qu_{BE}}{mkT}\right) \quad (0.20)$$

Expresia este similară cu cea de la diodă (aspectul grafic din figura 0.8). Se procedează ca mai sus și se caută un model al micilor abateri de forma lui (0.13):

$$I_C = g_m U_{be}, \quad (0.21)$$

în ipoteza $U_{ce} = 0$. Parametrul g_m (panta caracteristicii de transfer, în jurul p.s.f.), care exprimă raportul dintre variația curentului de colector și variația tensiunii pe joncțiunea bază-emitor, se determină prin derivarea expresiei (0.20) (este echivalent cu dezvoltarea în serie și reținerea termenului liniar). Valoarea sa este: $g_m = \frac{I_C}{V_T}$ (similar cu (0.14)).

Din valorile termenilor dezvoltării în serie se deduce condiția de semnal mic (similară cu (0.19)), asociată erorilor mai mici de 5%:

$$U_{be} \leq 2,5 \text{ mV} \quad (0.22).$$

Similar cu ecuațiile deduse la diodă, variațiile de tensiune pe joncțiunea bază-emitor (U_{be}) pot fi modelate prin produsul dintre variația curentului de emitor (I_e , aproape egal cu cel de colector, I_c) și inversul parametrului g_m : $U_{be} = I_c \cdot \frac{1}{g_m}$. Pe de altă parte, curentul absorbit în bază este de β ori mai

mic decât cel de colector, deci variațiile curentului de bază pot fi modelate de: $U_{be} = \frac{1}{g_m} \cdot \beta I_b$, de unde rezistența echivalentă a circuitului de intrare în bază:

$$r_{be} = \frac{U_{be}}{I_b} = \frac{\beta}{g_m} \cong \frac{\beta}{40I_C}. \quad (0.23)$$

Relația este aproximativă, pentru că nu ține cont de parametrul m . Se observă că atât panta cât și impedanța de intrare în baza tranzistorului depind de p.s.f.

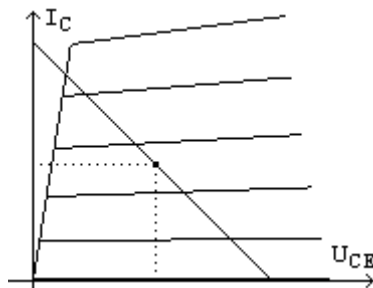


Figura 0.11: Familia caracteristicilor de ieșire ale tranzistorului bipolar

Dacă privim înclinarea caracteristicilor în jurul p.s.f., aflat în RAN (figura 0.11), se observă o ușoară dependență a curentului de colector de tensiunea colector-emitor (curentul de bază fiind constant), care poate fi modelată tot printr-o rezistență, notată r_{ce} :

$$I_c = U_{ce} \cdot \frac{1}{r_{ce}}, \text{ pentru } I_b = 0. \quad (0.24)$$

Rezultă un model simplificat al tranzistorului bipolar, pentru regimul de semnal mic, ca cel din figura 0.12. Este un model al micilor abateri, în jurul punctului static de funcționare, definit prin ecuațiile (0.21), (0.23), (0.24). Se observă cum am formulat ipotezele pentru aceste ecuații: $U_{ce} = 0$ și $I_b = 0$ sînt echivalente cu condițiile ca tensiunea u_{CE} , respectiv curentul i_B , să fie constante. Modelul este valabil dacă p.s.f. se află în RAN, semnalul variază lent (frecvențe joase) iar amplitudinea semnalului din bază respectă condiția de semnal mic (0.22).

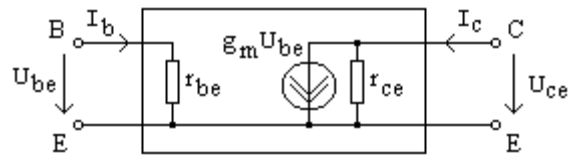


Figura 0.12: Modelul simplificat de semnal mic al tranzistorului bipolar, aflat în RAN

Modelul de mai sus a fost dedus din caracteristicile de transfer, de intrare și de ieșire ale tranzistorului. Un model mai cuprinzător este modelul Giacoletto, care ține cont și de fenomenele de acumulare de sarcină, deci va cuprinde și capacități. El este dedus din ecuațiile fizice ale dispozitivului, motiv pentru care se numește circuit echivalent natural.

Similar cu cele două modele de mai sus pot fi deduse modele de semnal mic pentru orice dispozitiv electronic, cum ar fi tranzistoarele cu efect de câmp, diodele varicap etc. Pentru fiecare model, un rezultat important este domeniul de valabilitate al modelului, adică condiția de semnal mic (ca în (0.19) sau (0.22)).

Modelul de semnal mic cu parametri de cuadripol

Parametrii modelelor deduse mai sus depind de parametri fizici ai dispozitivului, cu caracter tehnologic, care – de regulă – nu sînt accesibili decît producătorului de componente. Pentru a dispune de un model de semnal mic, utilizatorul de componente trebuie să ceară producătorului valorile parametrilor sau poate să construiască un model pe baza măsurărilor. la această variantă se pretează modelul cu parametri de cuadripol. Examinînd schema echivalentă din figura 0.12, se observă apropierea de schema din figura (0.4), la care se folosesc parametrii H. Ca urmare, este oportun să folosim un model ca cel din figura (0.11), cu mențiunea că parametrii sînt notați cu minuscule, pentru că definesc un model de semnal mic.

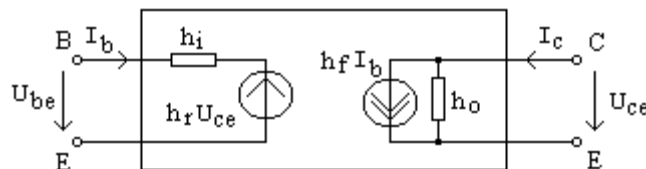


Figura 0.13: Modelul de semnal mic al tranzistorului bipolar, cu parametri de cuadripol

$$h_{11} = h_i = \left. \frac{U_{be}}{I_b} \right|_{U_{ce}=0} \quad h_{12} = h_r = \left. \frac{U_{be}}{U_{ce}} \right|_{I_b=0} \quad h_{21} = h_f = \left. \frac{I_c}{I_b} \right|_{U_{ce}=0} \quad h_{22} = h_o = \left. \frac{I_c}{U_{ce}} \right|_{I_b=0} \quad (0.25)$$

Expresiile de definire a parametrilor sînt cele din (0.25), cu următoarele semnificații:

h_i - impedanța de intrare a tranzistorului (inițiala cuvîntului englez *input*) , în conexiunea EC

h_f - factorul de transfer în curent, în sens direct (*forward*) , în conexiunea EC

h_r - factorul de transfer în tensiune, în sens invers (*reverse*) , în conexiunea EC

h_o - admitanța de ieșire a tranzistorului (*output*) , în conexiunea EC.

Modelul cuprins în figura 0.13 corespunde conexiunii cu emitorul comun, deci setul de parametri este valabil numai pentru conectarea terminalelor în configurația marcată. Există posibilitatea de a exprima modelul de cuadripol pentru oricare dintre conexiuni, deci vor exista trei seturi diferite de parametri de același tip, pentru cele trei conexiuni. Ele sînt marcate în cataloage cu indicele inferior e , c , b , pentru emitor comun, colector comun, respectiv bază comună. Întrucît modelele sînt

echivalente din punct de vedere funcțional, convenim să folosim numai unul dintre seturile de parametri, cel pentru conexiunea emitor comun, fără să mai utilizăm indici suplimentari.

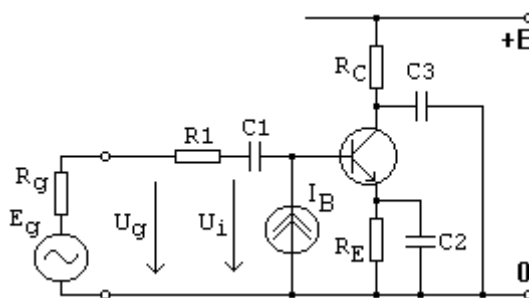


Figura 0.14: Schema de măsurare a impedanței de intrare în tranzistor

Ecuatiile (0.25) sînt folosite pentru deducerea experimentală a parametrilor modelului. Spre exemplu, impedanța de intrare se poate măsura în schema de test din figura 0.14. În această schemă, sursa de alimentare, sursa de curent din bază și rezistoarele R_E , R_C sînt alese astfel încît să determine p.s.f. dorit. Condensatorul de la ieșire menține tensiunea pe colector constantă (adică $U_{ce} = 0$), condensatorul C_1 cuplează sursa de semnal la circuitul bazei (el nu permite trecerea curentului continuu spre generator), iar condensatorul C_2 decuplează rezistorul din emitor. Datorită acestei decuplări, impedanța care se vede la intrare, între bază și masă, este chiar impedanța de intrare în tranzistor. Cele două tensiuni din figură se măsoară cu voltmetrul electronic sau cu osciloscopul. Curentul de bază (componenta variabilă) este calculat împărțind diferența celor două tensiuni la rezistența R_1 . Rezultă relația:

$$h_i = \frac{U_i}{U_g - U_i} \cdot R_1 \quad (0.26)$$

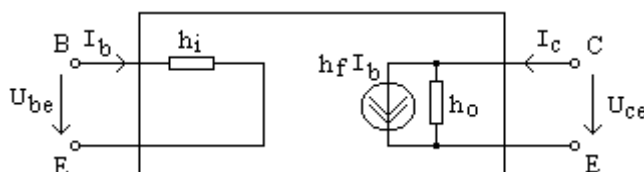
Modelul cu parametri hibridi este echivalent cu orice alt model de cuadripol sau cu modelul Giacioletto, atîta vreme cît caracterizează același tranzistor, în același p.s.f.. În consecință, există relații de trecere între modele. Valorile aproximative pentru parametrii h sînt:

$$h_i \cong r_{be} = \frac{\beta}{40I_C} \quad (0.27)$$

$$h_f \cong \beta \quad (0.28)$$

$$h_o \cong \frac{I_C}{U_{CE} + 90V} \quad (0.29)$$

În majoritatea aplicațiilor (cu excepția celor desfășurate la frecvențe foarte înalte), reacția internă prin tranzistor este neglijabilă. De aceea, nu folosim în model parametrul h_r (vezi figura 0.15a). Deseori, se neglijează și parametrul h_o , fiind mic în comparație cu admitanțele puse în paralel (vezi figura 0.15b). În schemele în care neglijarea nu este rezonabilă, se va menționa acest lucru.



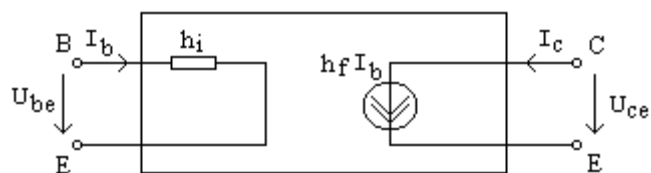


Figura 0.15: Modele aproximative (a - neglijarea lui h_r , b - neglijarea lui h_r și h_o)

Pentru frecvențe înalte, parametrii modelului devin numere complexe, deoarece trebuie să cuprindă și manifestările capacitive și inductive ale dispozitivului. În acest caz, producătorii preferă să furnizeze în catalog parametrii y , deoarece toate componentele parazite vor apărea în paralel și admitanțele lor se vor însuma.