4. Noțiunea de punct de funcționare. Determinarea sa pentru circuite liniare şi neliniare. Soluții analitice, grafice, numerice

Obiective: determinarea punctului de funcționare al componentelor.

Noțiuni noi: punct de funcționare, regim static, regim staționar, rezolvare grafică, abaterea punctului de funcționare, dispersie parametrică.

Cîteva noțiuni preliminare
Regim static: regimul unui circuit sau al unui sistem, în care toate mărimile sînt la valori constante
Regim staționar: regimul unui circuit sau al unui sistem, în care toate mărimile sînt la valori constante sau variază periodic
Regim tranzitoriu: regimul de trecere de la un regim static la alt regim static sau de la un regim staționar la alt regim staționar, al unui circuit sau sistem.

În cele ce urmează, ne interesează doar circuite aflate în regimul static sau staționar.

Punct de funcționare: Valorile mărimilor care caracterizează funcționarea componentei (sau a circuitului, aparatului etc.) la un moment dat formează *punctul de funcționare* (denumirea provine de la corespondența cu un punct în spațiul vectorial al mărimilor variabile). Spre exemplu, pentru un rezistor, varianta cea mai simplă a punctului de funcționare conține doar valorile tensiunii şi curentului. Dacă funcționarea sa este dependentă de temperatură, atunci trebuie să considerăm şi această mărime în componența punctului de funcționare. Pentru componente sau circuite mai complicate, punctul de funcționare conține multe variabile.

Determinarea punctului de funcționare este importantă pentru proiectantul de circuite, care trebuie să ştie în ce regim lucrează fiecare componentă şi cum contribuie fiecare la regimul de lucru al circuitului proiectat. În regim static, se numeşte *punct static de funcționare*.
Pentru determinarea punctului de funcționare trebuie cunoscute:
- modelele tuturor componentelor
- valorile instantanee ale mărimilor din exteriorul circuitului (alimentare, temperatură etc.), ca funcții de timp.

Rezolvarea problemei punctului de funcționare depinde de natura modelelor componentelor. Dacă modelele sînt analitice, rezolvarea poate fi:
- analitică
- grafică
- numerică.

Dacă cel puțin un model este dat grafic, atunci rezolvarea este grafică.
În cele ce urmează, vom exemplifica fiecare variantă de rezolvare a problemei punctului static de funcționare, pentru cazuri tipice.

1. Circuite liniare, rezolvare analitică

Cazurile tipice sînt cele ale circuitelor de c.c., aflate în regim static, şi circuitelor de c.a., aflate în regim periodic sinusoidal. Se scriu ecuațiile din teoremele Kirchhoff, care conduc la un sistem de ecuații liniare, în raport cu mărimile necunoscute. Sistemul are forma:

$$AX = B \tag{1}$$

Spre exemplu, X este vectorul curenților, B este vectorul tensiunilor de alimentare din circuit, iar A este matricea coeficienților, determinată de rezistențele (sau de reactanțele) din circuit. Soluția generală a ecuației (1) este:

$$X = A^{-1}B, \qquad (2)$$

care presupune inversarea matricei A. Uneori, pentru număr mic de ecuații, sau pentru forme particulare ale matricei A, este posibil să se găsească cîte o expresie pentru fiecare componentă a lui X, în funcție de coeficienții din A. Aceasta este rezolvarea analitică. Soluția numerică se obține înlocuind valorile mărimilor cunoscute în relațiile deduse pe calea analitică.

În cazul general, în care este necesară inversarea matricei, se apelează la proceduri numerice (vezi punctul următor).

2. Circuite liniare, rezolvare prin proceduri numerice (calculatorul electronic)

Sistemul de ecuații liniare se obține ca mai sus. Mai departe, în locul rezolvării analitice, sistemul de ecuații se rezolvă numeric. Aceasta înseamnă că nu se obțin relații care definesc fiecare componentă a soluției, ci se efectuează calcule numerice succesive, asupra sistemului de ecuații, pînă cînd se obțin valorile numerice ale soluției. (Este o etapă necesară chair atunci cînd rezolvăm problema cu creionul, pe hîrtie). Un exemplu elocvent este inversarea matricei coeficienților, din relația (2), prin metode numerice. Această metodă este folosită de toate programele de simulare a circuitelor electronice. Cîteva exemple de proceduri numerice vor fi prezentate în alt capitol.

3. Circuite liniare, rezolvare grafică

Pentru circuite foarte simple (sistem de două ecuații cu două necunoscute), se poate înlocui o parte din rezolvarea analitică sau numerică prin rezolvare grafică. Această variantă este nerezonabilă, întrucît primele două variante sînt mai uşor de aplicat şi oferă soluții mai precise.

4. Circuite neliniare, fără model analitic (caracteristici date grafic), rezolvare grafică

În general, sînt multe cazuri în care dependența dintre mărimile variabile din circuit este neliniară. Atunci cînd cel puțin un model al unei componente este cunoscut doar sub formă grafică, rezolvarea va urma calea grafică. Aceasta înseamnă că punctul de funcționare va fi găsit la intersecția unor grafice, iar valorile mărimilor se determină din coordonatele acelui punct. Situația prezentată apare destul de frecvent, atunci cînd un fenomen nu este încă descris analitic, ci este cunoscut doar printr-o serie de măsurări, care au produs un model sub formă grafică.

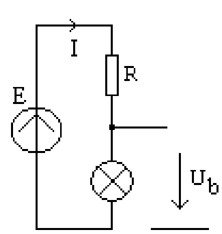

Figura 1: Schema circuitului cu bec

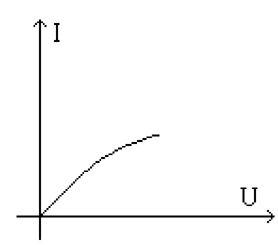

Figura 2: Caracteristica *I-U* a becului

Exemplu:
Becul, montat într-un circuit simplu (vezi figura 1), cu sursă şi un rezistor liniar. Se cer valorile curentului şi tensiunilor din circuit. A fost redesenată caracteristica (figura 2), în coordonatele I şi U.

Formal, cele două relații care descriu funcționarea circuitului:

– caracteristica neliniară a becului, $I_b = I_b(U_b)$
– ecuația Kirchhoff II, $E = IR + U_b$ (de observat că variabila I este aceeaşi cu curentul prin bec).

Rezultă sistemul de ecuații:

$$\begin{aligned} I_b &= I_b(U_b) \\ E &= IR + U_b \end{aligned} \tag{3}$$

Prima relație are expresia grafică din enunț (vezi figura 2). A doua are ca expresie grafică o dreaptă, în aceleaşi coordonate. Intersecțiile dreptei cu axele de coordonate se află la valorile:

$$U_b = E \tag{4}$$

$$I = E / R \tag{5}$$

Soluția problemei este punctul de funcționare, adică perechea de valori curent – tensiune care satisface simultan cele două ecuații. Grafic, punctul de funcționare este punctul aflat la intersecția celor două curbe din figura 3. Componentele soluției se determină direct din grafic, la intersecțiile liniilor punctate cu axele.

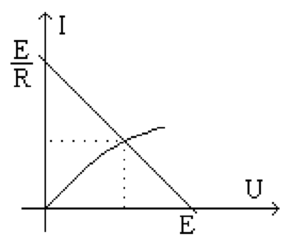

Figura 3: Rezolvarea grafică a problemei punctului de funcționare

Munca electroniştilor presupune utilizarea frecventă a caracteristicilor neliniare, fie că este vorba despre o componentă, un aparat sau despre proprietățile sistemeleor neelectrice, măsurate sau comandate pe cale electronică. Alte exemple de caracteristici neliniare sînt prezentate în figura 4.

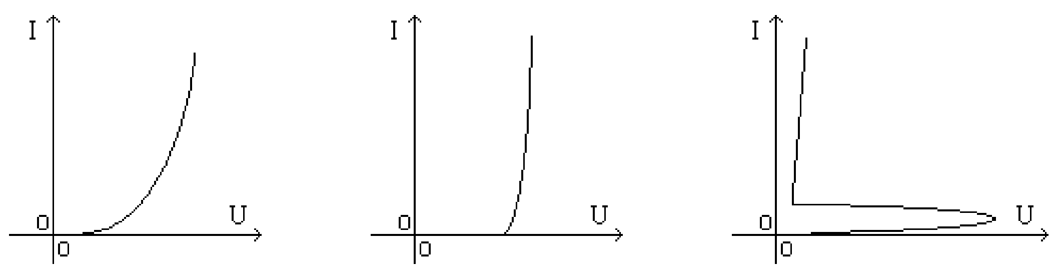

Figura 4: Alte exemple de caracteristici neliniare ale unor componente

<u>5. Circuite neliniare, cu model analitic, rezolvare grafică</u>

Atunci cînd modelele tuturor componentelor sînt cunoscute sub formă analitică, se poate apela la rezolvarea grafică, astfel:

- se scriu ecuațiile liniare din circuit (cea de a doua ecuație din sistemul (3))
- se reprezintă grafic caracteristicile neliniare (prima relație din sistemul (3), ca în figura 2)
- se rezolvă problema ca la punctul precedent

Această metodă este utilă atunci cînd dimensiunea sistemului este mică, iar modelul analitic al uneia dintre componente este prea complicat pentru a fi rezolvat analitic. Un exemplu va fi prezentat la punctul următor, comparativ cu rezolvarea analitică.

6. Circuite neliniare, cu model analitic, rezolvare analitică

Dacă forma modelului nu este complicată, este posibil să se obțină o soluție analitică a problemei punctului de funcționare.

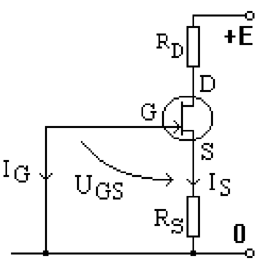

Figura 5: Circuit de polarizare pentru tranzistorul TEC-J

Exemplu: Un *tranzistor cu efect de cîmp cu joncțiune* (TEC-J, în limba engleză J-FET), este montat în circuitul din figura 5 (are rolul de generator de curent constant). Terminalele tranzistorului se numesc grilă (G), sursă (S) şi drenă (D). În anumite condiții, modelul său matematic poate fi descris de o ecuație pătratică, ca în relația (6).

$$I_S = I_{DSS}\left(1-\frac{U_{GS}}{V_p}\right)^2 \tag{6}$$

În acest model, mărimile I_S şi U_{GS} sînt mărimile variabile (un curent şi o tensiune din circuit), iar I_{DSS} şi V_p sînt parametri ai modelului. I_{DSS} este un curent, are valori pozitive, iar V_p este o tensiune şi are totdeauna valori negative. Încă din acest moment trebuie precizat că modelul este valabil doar pentru restricțiile:

$$0 \le I_S \le I_{DSS} \tag{7}$$

$$\text{şi } V_p \le U_{GS} \le 0, \tag{8}$$

care vor fi verificate în momentul aflării soluției.

Problema: Se cer valorile I_S şi U_{GS} în punctul de funcționare, presupunînd că tranzistorul este descris de modelul din relația (6).
Soluția: Pe ochiul de jos se poate scrie ecuația Kirchhoff:

$$U_{GS} = -I_S R_S \tag{9}$$

Ecuațiile (6) şi (9) formează un sistem de două ecuații, una provenind din teorema Kirchhoff, cealaltă din modelul tranzistorului. Cele două necunoscute sînt chiar mărimile căutate. Se observă că una dintre ecuații are gradul 2, în variabila U_{GS}. Rezolvarea sistemului este posibilă pe cale analitică, pentru că se scrie:

$$I_S = I_{DSS}\left(1+\frac{R_S I_S}{V_p}\right)^2 \tag{10}$$

apoi
$$I_S^2 \cdot I_{DSS} \cdot \frac{R_S^2}{V_p^2} + I_S\left(\frac{2R_S I_{DSS}}{V_p} - 1\right) + I_{DSS} = 0. \tag{11}$$

Prin rezolvarea ecuației (11), de gradul 2, se obțin două valori posibile ale variabilei I_S. Dintre ele, numai o rădăcină are semnificație fizică, anume cea care respectă restricția (7). Se poate verifica, pe cale analitică, faptul că cealaltă rădăcină nu respectă restricția menționată. Totuşi, este mai simplu de verificat acest lucru pe cale grafică, ceea ce se va vedea la punctul următor.

Revenind la rezolvarea analitică, rădăcina convenabilă a ecuației (11) determină şi valoarea variabilei U_{GS}, prin ecuația (9). Se verifică imediat că ea satisface restricția (8). Cele două valori fac parte din punctul de funcționare al tranzistorului (alte mărimi se determină din alte ecuații, care nu fac obiectul acestei prezentări).

Pentru comparație, se prezintă aici şi rezolvarea grafică, cu mențiunea că, de cîte ori este posibil, rezolvarea analitică este de dorit, pentru că ea are un caracter mai general, adică arată cum se comportă circuitul pentru diferite valori ale parametrilor, în timp ce rezolvarea grafică este mai restrictivă, iar cea numerică este şi mai particulară (are valabilitate strict numai pentru cazul particular considerat). Expresia grafică a ecuației (9) este o dreaptă, care se suprapune peste caracteristica tranzistorului, ca în figura 6. Punctul de funcționare se găseşte la intersecția celor două curbe.

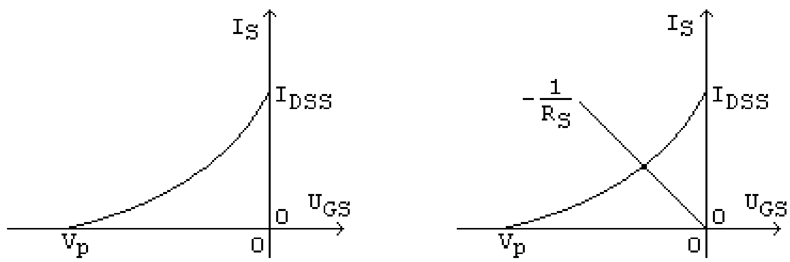

Figura 6: Rezolvarea grafică

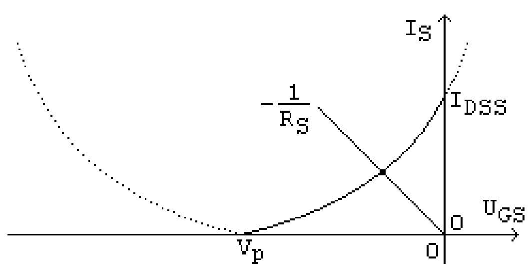

Figura 7: Eliminarea rădăcinii care nu are semnificație fizică

Aşa cum s-a menționat, una dintre cele două rădăcini ale ecuației (11) nu are semnificație fizică, ea nu respectă restricția (7). La rezolvarea grafică este mai simplu de pus în evidență care rădăcină nu este convenabilă. În figura 7 a fost prelungită caracteristica tranzistorului, peste domeniul admis de restricțiile (7) şi (8) (adică a fost reprezentată parabola cu ecuația (6) pe un interval mai larg). Dacă prelungim dreapta (reprezentarea grafică a ecuației (9)) spre stînga, se observă că cea de a doua intersecție cu parabola are loc la o valoare foarte mare a curentului I_S

(mai mare decît I_{DSS}), în afara domeniului admis al mărimii U_{GS} (valori mai mici decît V_p). De aici se trage concluzia că singura soluție admisibilă este cea prezentată în figurile 6 şi 7.

Rezolvarea grafică mai este utilă şi pentru cazul în care parametrii modelului au valori incerte şi dorim să ştim în ce interval este posibil să se afle punctul de funcționare. În figura 8 este prezentat intervalul posibil al punctului de funcționare, atunci cînd parametrii I_{DSS} şi V_p suferă abateri față de valorile medii cunoscute. Se spune că, într-un lot de componente, valorile parametrilor sînt dispersate şi că abaterea punctului static de funcționare în intervalul prezentat în figura 8 este rezultatul *dispersiei parametrilor*. Pentru proiectant, este important să afle care este intervalul în care se poate abate puncrtul static de funcționare, întrucît acesta determină alte proprietăți ale circuitului (se va analiza această problemă la cursul de Dispozitive electronice).

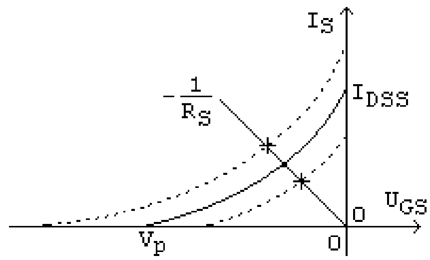

Figura 8: Abaterea punctului de funcționare, ca urmare a disperiei parametrilor I_{DSS} şi V_p

7. Circuite neliniare, cu model analitic, rezolvare prin proceduri numerice

Dacă forma modelului este foarte complicată, este posibil să nu putem obține o soluție analitică. O alternativă la rezolvarea grafică este cea numerică, cu mențiunea că ea este valabilă strict pentru cazul particular considerat (nu poate fi generalizată). În schimb, are avantajul că poate fi obținută rapid (datorită calculatorului electronic). Deci, se poate programa un calculator să furnizeze rezultatul pentru foarte multe cazuri particulare, astfel încît ansamblul soluțiilor să acopere tot domeniul de interes.

Concluzii:
- Dacă una dintre caracteristici este dată grafic, singura abordare posibilă este rezolvarea grafică.
- Dacă toate modelele sînt cunoscute analitic, este posibilă rezolvarea prin toate cele trei abordări.
- Circuitele în care unele componente au modele foarte complicate nu au soluție analitică (cel mai frecvent).
- Rezolvarea numerică este specifică calculatorului şi programelor de simulare (deşi, în principiu, omul poate rezolva aceleaşi ecuații cu creionul, dacă are cîteva luni la dispoziție!).
- Rezolvarea numerică este posibilă numai dacă există modele analitice pentru toate componentele. Este cazul programelor de simulare a circuitelor, la care fabricantul a inclus modele pentru foarte multe componente. Dacă doriți simularea unui circuit din care o componentă nu are model introdus de fabricant, utilizatorul trebuie să adauge modelul (prin asimilare cu altă componentă sau prin formularea unui nou model).
- Pentru a rezolva numeric circuite care conțin componente cu model dat grafic, se poate găsi o aproximare analitică a caracteristicii grafice.
- Generalizarea rezultatelor este mai simplă în cazul rezolvării analitice şi grafice.