## 8.4 Circuite rezonante RLC

Principalul rezultat al subcapitolului 8.3: comportarea circuitelor descrisă prin funcția de răspuns la frecvență. Exemplele studiate au fost circuite simple, cu un singur element reactiv (RC şi LC), cum ar fi circuitul RC din figura 8.9, care atenuează frecvențele înalte, începînd cu $\omega_p = \frac{1}{\tau}$. Funcția lui este de filtru „trece-jos”, aşa cum este vizibil în figura 8.13. Atenuatorul compensat este un alt exemplu de circuit analizat în frecvență. Chiar dacă el este proiectat în aşa fel încît să se comporte pur rezistiv, are două elemente reactive (dintre care unul nu este ales de proiectant), deci trebuie folosită funcția răspuns la frecvență.

Pentru scopuri de atenuare selectivă a unor benzi de frecvență se utilizează circuite cu mai mult de un element reactiv, care îndeplinesc tot funcția de filtru. Dintre ele, sînt importante cele numite „rezonante”. Ele prezintă fenomenul de rezonanță, adică au unul sau mai multe maxime locale în funcția răspuns la frecvență. Frecvența la care apare un astfel de maxim se numeşte frecvență de rezonanță.

*Circuitul RLC serie, în regim permanent sinusoidal*

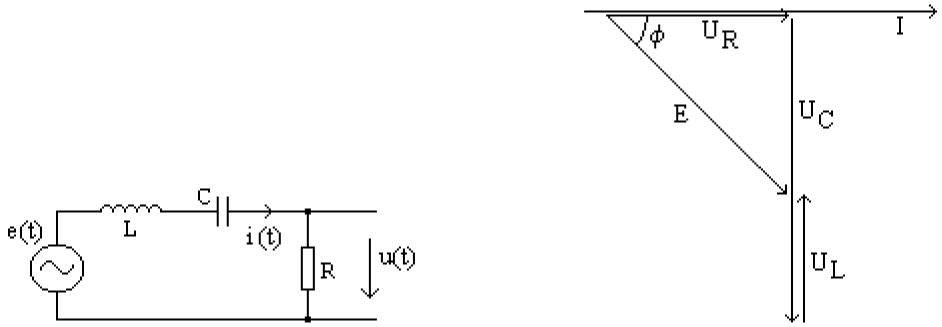


Figura 8.23: Circuit rezonant RLC serie

Circuitul şi diagrama sa de fazori sînt cuprinse în figura 8.23. Fiind un circuit serie, mărimea comună celor trei elemente este curentul. Ecuația Kirchhoff II (între amplitudinile tensiunilor şi curentului):

$$E = I \cdot (j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R), \tag{8.25}$$

de unde

$$Z(j\omega) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} + R = R + \frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega C}. \tag{8.26}$$

Se observă că există o frecvență la care efectul inductanței şi al capacității se compensează reciproc, partea imaginară a impedanței devine nulă, deci impedanța care se vede la borne este chiar *R*. Această frecvență este dată de relația: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sau $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. Valoarea impedanței *Z* este minimă la rezonanță.

Răspunsul la frecvență al circuitului, considerînd tensiunea pe rezistor ca mărime de ieşire:

$$H(j\omega) = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}. \tag{8.27}$$

Funcția se mai poate pune sub forma:

$$H(j\omega)=\frac{j\omega\cdot 2\varsigma\omega_0}{\omega_0^2+j\omega\cdot 2\varsigma\omega_0+(j\omega)^2}, \tag{8.28}$$

unde

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{8.29}$$

şi

$$\varsigma=\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{8.30}$$

se numesc pulsația naturală sau de rezonanță a circuitului, respectiv coeficientul de amortizare. Aceşti parametri au semnificații importante pentru comportarea circuitului, după cum se va vedea din aspectul caracteristicilor de frecvență.

Caracteristici de frecvență: reprezentarea grafică a modulului şi defazajului funcției răspuns la frecvență, în raport cu frecvența. În figura 8.24 apar caracteristicile de frecvență, în coordonate logaritmice, pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare: 0,2, 0,5, 1 (circuitul din figura 8.23). Pulsația naturală este de 1000 rad/s. În caracteristica amplificare-pulsație, curba cea mai de jos corespunde valorii 0,2 a coeficientului de amortizare. În caracteristica fază-pulsație, curba mai abruptă pentru coeficient 0,2.

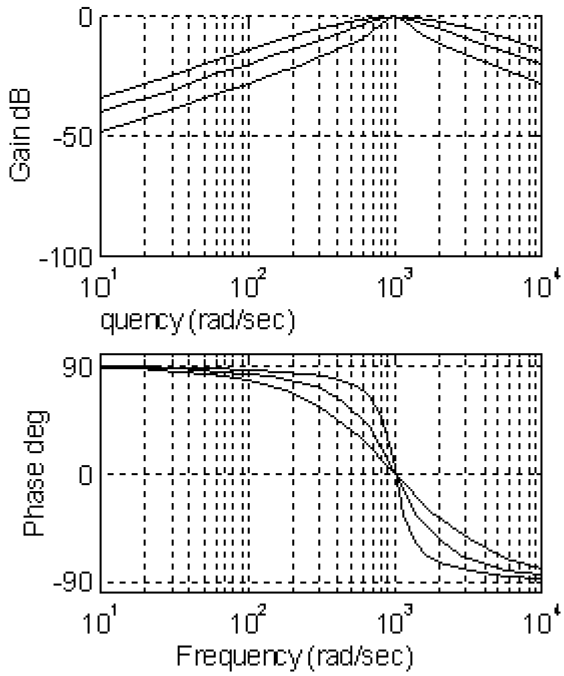


Figura 8.24: Caracteristica amplificare-pulsație a circuitului din figura 8.23

În figura 8.25 este reprezentat modulul caracteristicii amplificare-frecvență, în coordonate liniare, într-o bandă îngustă, în jurul pulsației de rezonanță. Caracteristica de jos corespunde valorii 0,2 a coeficientului de amortizare. Se observă caracterul puternic selectiv. Caracteristica de sus pentru coeficient 1, cînd circuitul este slab selectiv. În mod uzual, în circuitele electronice selective se folosesc coeficienți de amortizare mult mai mici, deci caracter selectiv mult mai puternic. Un calcul simplu arată că:

$$\varsigma=\frac{1}{2}\cdot\frac{R}{\omega_0 L}=\frac{1}{2Q}, \tag{8.31}$$

adică coeficientul de amortizare este jumătate din inversul factorului de calitate al bobinei, calculat la frecvența de rezonanță (se presupune condensator ideal). Selectivitatea foarte bună se obține cu un factor de calitate mare, ceea ce este tipic pentru circuitele de acord din tehnica radio. Dimpotrivă, selectivitatea slabă se obține pentru coeficienți de amortizare mai mari, ceea ce este tipic pentru circuitele din electronica de putere.

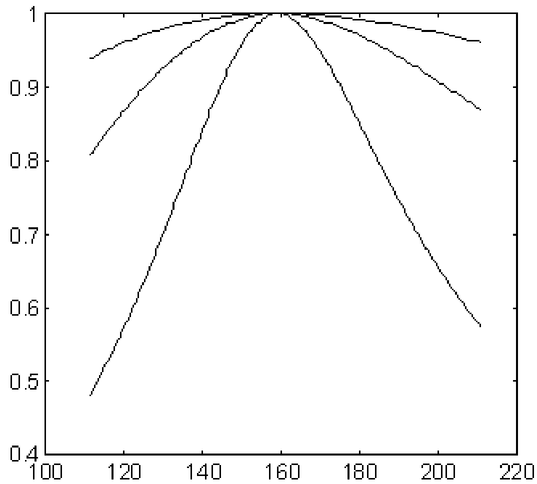


Figura 8.25: Caracteristica amplificare-frecvență, în domeniu mai îngust de frecvențe (reprezentare liniară)

Alte proprietăți ale circuitului, aflat în regim permanent sinusoidal, la frecvența de rezonanță:
- defazaj nul între curent şi tensiunea la borne, defazaj nul între curent şi tensiunea pe rezistor, ceea ce înseamnă impedanță pur reală;
- valoarea impedanței $Z$ este minimă la rezonanță
- tensiunea pe bobină egală în modul cu tensiunea pe condensator şi defazată cu 180 grade;
- energiile medii înmagazinate în cele două elemente reactive sînt egale;
- pe durata unei perioade, energia înmagazinată se deplasează de la bobină la condensator şi invers. Schimbul de energie cu exteriorul este egal cu energia disipată de partea rezistivă;
- la frecvențe mai mici decît cea de rezonanță, predomină comportarea capacitivă (curentul şi tensiunea de ieşire înaintea tensiunii de intrare, maxim cu 90 grade);
- la frecvențe mai mari decît cea de rezonanță, predomină comportarea inductivă (curentul şi tensiunea de ieşire în urma tensiunii de intrare, maxim cu 90 grade).

În ansamblu, circuitul primeşte la intrare un semnal de tensiune nesinusoidal, din care selectează componenta de frecvență egală cu frecvența de rezonanță.

Pentru a ilustra caracterul selectiv:
*Circuitul RLC serie, atacat cu semnal periodic dreptunghiular*

În figura 8.26 este prezentat răspunsul unui circuit RLC serie (acelaşi circuit din figura 8.23), care are la intrare semnal periodic dreptunghiular, cu frecvența egală cu frecvența de rezonanță a circuitului. Am presupus un coeficient de amortizare $\varsigma = 0{,}2$, pentru a pune în evidență caracterul selectiv. Se observă cum semnalul de ieşire este aproape sinusoidal, adică circuitul a selectat numai componenta armonică fundamentală (cu frecvența egală cu frecvența semnalului dreptunghiular şi cu frecvența de rezonanță). Dacă circuitul avea factor de calitate mai mare (deci valoare mai mică a coeficientului de amortizare), forma semnalului de ieşire ar fi fost atît de aproape de sinusoidă, încît nu se putea observa abaterea.
În figura 8.27 se pune în evidență faptul că circuitul cu amortizare mai mare ($\varsigma = 1$) nu poate selecta doar componenta armonică fundamentală, deşi frecvența semnalului de intrare este chiar frecvența de rezonanță. De aceea, forma semnalului de ieşire este mai departe de sinusoidă.

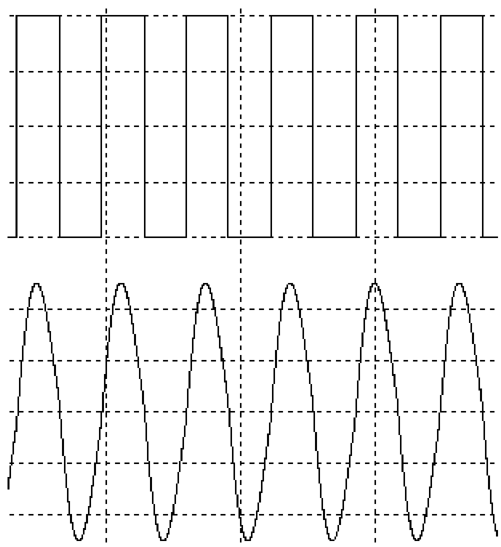

Figura 8.26: Răspunsul circuitului rezonant la semnal dreptunghiular, frecvența de rezonanță, $\varsigma = 0{,}2$

.

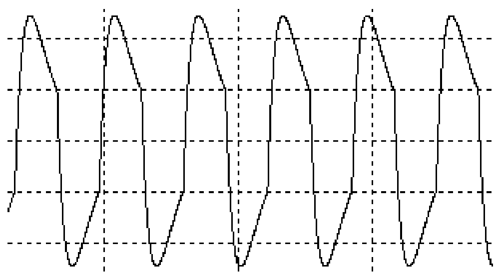

Figura 8.27: Răspunsul circuitului rezonant la semnal dreptunghiular, frecvența de rezonanță, $\varsigma = 1$

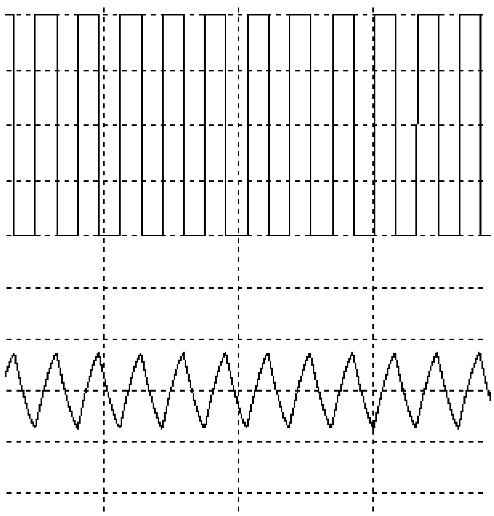

Figura 8.28: Răspunsul circuitului rezonant la semnal dreptunghiular, dublul frecvenței de rezonanță, $\varsigma = 0{,}2$

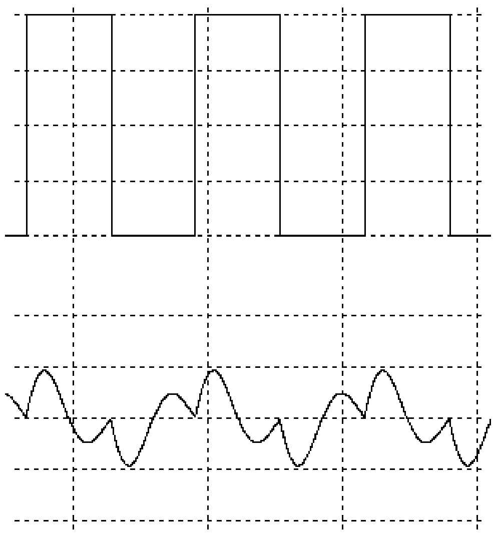

Figura 8.29: Răspunsul circuitului rezonant la semnal dreptunghiular, jumătate din frecvența de rezonanță, $\varsigma = 0{,}2$

În figurile 8.28 şi 8.29 se arată cum circuitul nu poate selecta componenta sinusoidală, cu frecvența de rezonanță, dacă semnalul de intrare are altă frecvență decît cea de rezonanță. Totuşi, avînd în vedere că în figura 8.29 frecvența semnalului de intrare este jumătate din cea de rezonanță, rezultă că una dintre componentele sale (armonica a 2-a) se suprapune chiar peste frecvența de rezonanță. Ca urmare, circuitul reuşeşte parțial selectarea acestei armonice (a se vedea porțiunile de curbă de frecvență dublă față de fundamentală).

*Circuitul RLC paralel, în regim permanent sinusoidal*

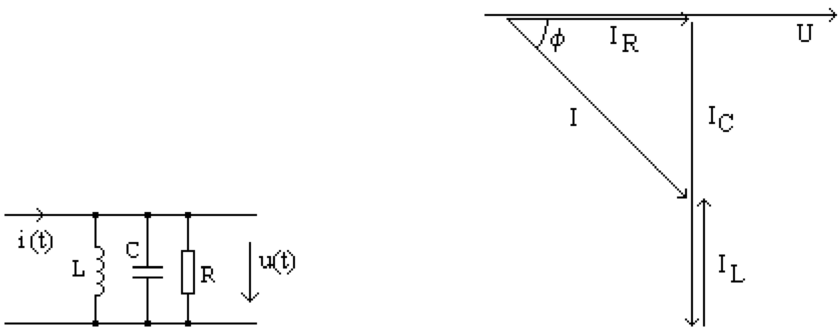


Figura 8.30: Circuit rezonant RLC paralel

Mărimea comună celor trei elemente este tensiunea la borne. Impedanța la borne se deduce din:

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = \frac{j\omega L + R + (j\omega)^2 RLC}{j\omega LR}.$$

Rezultă: $$Z = \frac{j\omega LR}{j\omega L + R - \omega^2 RLC} = \frac{j\omega L}{j\omega \frac{L}{R} + 1 - \omega^2 LC}. \tag{8.32}$$

Din nou, există o frecvență la care efectul inductanței şi al capacității se compensează reciproc, impedanța este pur reală. Această frecvență este dată de relația: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ sau $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$. La

rezonanță, partea imaginară a impedanței tinde spre infinit, deci impedanța care se vede la borne este chiar *R*. Valoarea impedanței *Z* este maximă la rezonanță.
Dacă considerăm curentul ca mărime de intrare iar tensiunea ca mărime de ieşire, răspunsul la frecvență este o mărime dimensională, adică impedanța calculată mai sus. Ea se poate pune sub forma:

$$Z(j\omega)=\frac{j\omega LR}{j\omega L+R+(j\omega)^2 RLC}=\frac{j\omega L}{j\omega\frac{L}{R}+1+(j\omega)^2 LC}=R\cdot\frac{2\varsigma\cdot j\omega\omega_0}{(j\omega)^2+2\varsigma\cdot j\omega\omega_0+\omega_0^2}\,, \quad (8.33)$$

unde pulsația de rezonanță este cea de mai sus iar coeficientul de amortizare are expresia:

$$\varsigma=\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \quad (8.34)$$

(Aparent, coeficientul de amortizare ar avea efect invers față de cazul precedent, dar trebuie ținut cont de faptul că rezistența *R* din acest circuit este în paralel cu bobina, deci poate avea o valoare mare, în timp ce rezistența din circuitul serie este de valoare foarte mică. Deci coeficientul are aceeaşi semnificație cu cea din circuitul precedent.)

O parte dintre observațiile privind comportarea circuitului *RLC* serie sînt valabile şi pentru circuitul paralel: valoarea frecvenței de rezonanță (8.29), caracterul pur real al impedanței la rezonanță, deplasarea periodică a energiei între componentele reactive. Alte proprietăți sînt opuse:
– valoarea impedanței *Z* este maximă la rezonanță;
– curenții prin bobină şi condensator sînt defazați cu 180 grade;
– comportarea inductivă sub frecvența de rezonanță, comportare capacitivă peste frecvența de rezonanță.

În anasamblu, circuitul primeşte la intrare un semnal în curent, sumă a mai multor semnale, dintre care selectează acel semnal sinusoidal care are frecvența egală cu frecvența de rezonanță.

Utilizări tipice ale circuitelor rezonante:
– selectarea componentei dorite, la cuplarea între două circuite din tehnica radio. Semnalul de intrare este o sumă de mai multe componente, dintre care este favorizat semnalul cu frecvența egală sau apropiată cu cea de rezonanță, celelalte fiiind atenuate (atenuare foarte mare, dacă factorul de calitate este mare). Pe acest principiu se bazează selectarea posturilor în radioreceptoare;
– realizarea unei amplificări mari pe frecvența de rezonanță şi atenuarea celorlalte componente, în oscilatoare;
– selectarea formei pur sinusoidale a semnalului, dintr-o tensiune periodică nesinusoidală, dar de frecvență egală cu cea de rezonanță, în oscilatoare şi în circuite de măsură. Semnalul de ieşire este cu atît mai aproape de sinus cu cît coeficientul de amortizare este mai mic (factorul de calitate mai mare);
– selectarea fundamentalei în circuitele de comandă din electronica de putere.

*Exercițiu propus*:
Exprimați impedanța, funcția răspuns la frecvență, caracteristicile de frecvență, pentru circuitul din figură. Care sînt frecvența de rezonanță şi coeficientul de amortizare? Se consideră tensiunea generatorului ca mărime de intrare iar tensiunea pe grupul *RC* ca mărime de ieşire (acest tip de circuit se găseşte în toate sursele de alimentare din calculatoare).

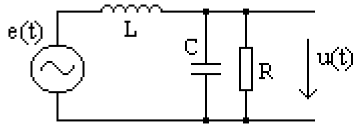


Figura 8.31: Circuit a cărui funcție răspuns la frecvență trebuie determinată

## 8.5 Filtre

În multe situații, semnalul de intrare este sumă a mai multor componente, de frecvențe diferite. Dintre ele, unele sînt utile, altele dorim să le rejectăm. Circuitele care nu sînt exclusiv rezistive (au componente reactive în compunerea lor) au proprietatea prezentată mai sus, de a răspunde diferit la semnalele de intrare, în funcție de frecvența lor. Această proprietate este exploatată în filtre. În general, filtrele sînt circuite liniare care atenuează semnalele dintr-o bandă de frecvențe, transmițînd neatenuate semnalele din restul benzii. Din această categorie de circuite, au fost deja prezentate filtrul trece jos (figura 8.13) şi circuitele rezonante.

*Exemple*:
FTJ, care transmite frecvețele joase şi atenuează frecvențele înalte (figura 8.32a). Circuitul folosit ca exemplu în paragrafele anterioare este un FTJ. Un exemplu de utilizare este păstrarea semnalului dat de chitara bas şi diminuarea semnalelor de frecvență mai mare la semnalul muzical.
FTS, care transmite semnalele de frecvențe înalte şi le diminuează pe cele de frecvențe joase (figura 8.32b). Exemplu de utilizare: circuitul de eliminare a componentei medii şi a semnalelor de frecvențe foarte joase (sub 5 Hz) de la intrarea osciloscopului.
FTB, care transmite semnalele dintr-o bandă de frecvențe determinată, atenuînd pe cele din afara benzii (figura 8.32c). Exemple de utilizare: filtru care lasă să treacă doar semnalele din banda 20Hz – 20kHz, în amplificatoarele audio, sau filtrul care lasă să treacă doar semnalele din banda 450-460 kHz, în amplificatoarele de frecvență intermediară din receptoarele radio MA.
FOB, care elimină din semnalul de intrare componentele dintr-o bandă fixată (figura 8.32d). Exemple: filtre care elimină zgomotul de rețea sau zgomotul produs de aparatele care oscilează pe o anumită frecvență. Banda de oprire a filtrului se alege centrată pe frecvența care trebuie eliminată.

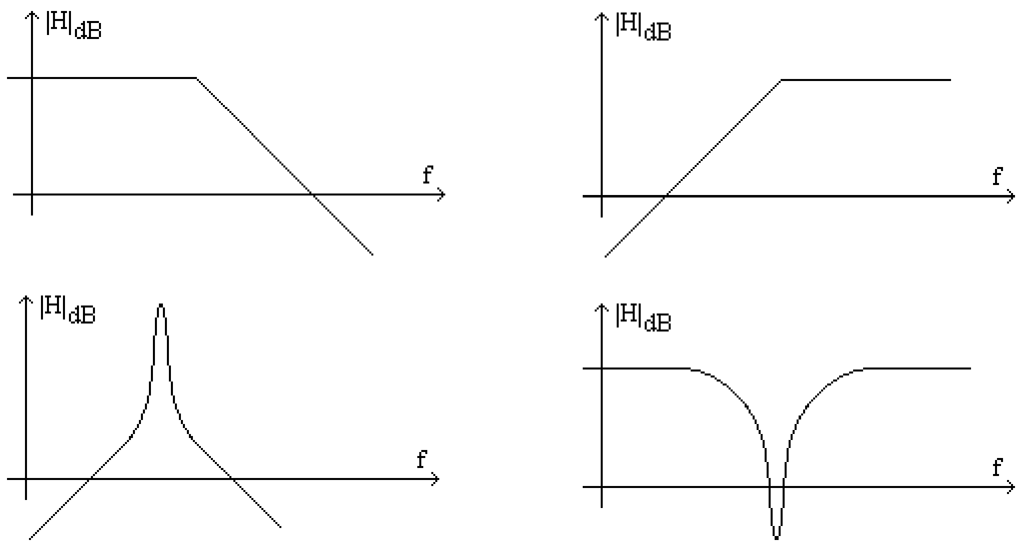


Figura 8.32: Caracteristici de frecvență ale unor filtre: FTJ, FTS, FTB, FOB

Tehnologie de realizare pentru filtrele selective (FTB şi FOB): circuite rezonante RLC sau ceramică piezoelectrică.
Exemple de funcții răspuns la frecvență, care aparțin unor filtre:

$H(j\omega) = k \cdot \dfrac{1}{1 + j\omega\tau}$; (FTJ, ordinul I, figura 8.32a)

$H(j\omega) = k \cdot \dfrac{j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau_2}$; (FTS, ordinul I, figura 8.32b)

$H(j\omega) = k \cdot \dfrac{2\varsigma \cdot j\omega\tau}{1 + 2\varsigma \cdot j\omega\tau + (j\omega)^2 \tau^2} = k \cdot \dfrac{2\varsigma \cdot j\omega\omega_n}{(j\omega)^2 + 2\varsigma \cdot j\omega\omega_n + \omega_n^2}$; (FTB, ordinul II, figura 8.32c)

$H(j\omega) = k \cdot \dfrac{1}{1 + 2\varsigma \cdot j\omega\tau + (j\omega)^2 \tau^2} = k \cdot \dfrac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\varsigma \cdot j\omega\omega_n + \omega_n^2}$; (FTJ, ordinul II, posibil cu rezonanță la pulsația naturală)