8.3 Analiza regimului permanent sinusoidal (abordarea frecvențială)

În subcapitolul precedent, a fost analizată comportarea unui circuit simplu (ordinul I), în regimul tranzitoriu. Au fost determinate tensiunea şi curentul ca funcții de timp, pentru o clasă de circuite, în regim tranzitoriu, după o variație în treaptă a mărimii de intrare.
O altă categorie de probleme de analiză se referă la circuitele aflate în regim periodic, pentru care integrarea ecuațiilor diferențiale nu mai este aşa de simplă ca în cazul precedent. Totuşi, pentru regimul periodic sinusoidal, există o metodă simplă de analiză, cu condiția ca circuitul să fie liniar. Această abordare presupune ca impedanțele să fie exprimate prin numere complexe şi permite determinarea amplitudinilor şi defazajelor mărimilor variabile. Reprezentarea fazorială a mărimilor este o metodă grafică care ajută analiza.

Ca exemplu de circuit care va fi analizat, în regim permanent sinusoidal, a fost ales un element RC de întîrziere de ordinul I (figura 8.9). Acest circuit va fi studiat prin aboradrea în timp şi prin cea în frecvență.

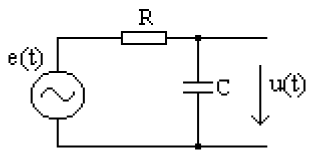


Figura 8.9: Circuit RC în regim sinusoidal

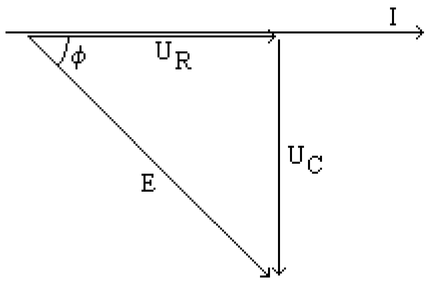


Figura 8.10: Diagrama fazorilor în circuitul RC

Analiza în timp
Se consideră semnalul de intrare:
$e(t) = E\sin(\omega t)$
şi se ține cont de faptul că toate mărimile variabile au formă sinusoidală, deoarece circuitul este liniar.
Reprezentarea fazorială din figura 8.10 exprimă următoarele relații:
- elementul comun între cele două componente este curentul (se presupune că circuitul lucrează în gol, adică nu mai există altă impedanță de sarcină, în paralel cu condensatorul);
- tensiunea pe rezistor este în fază cu curentul;
- tensiunea pe condensator este defazată în urma curentului cu un sfert de perioadă;
- tensiunea de intrare este suma fazorială a tensiunilor pe rezistor şi pe condensator (teorema Kirchhoff II).

Amplitudinile tensiunilor pe cele două componente: $U_R = RI$, $U_C = \dfrac{I}{\omega C}$.

Relația lor cu amplitudinea tensiunii de intrare: $E = \sqrt{U_R^2 + U_C^2} = I\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}$.

Defazajul curentului față de tensiunea de intrare: $\varphi = \mathrm{arctg}(\dfrac{1}{\omega RC}) = \pi/2 - arctg(\omega RC)$ (curentul înaintea tensiunii, din cauza capacității).

Defazajul tensiunii de ieşire faţă de cea de intrare: $-(\pi/2-\varphi)=-arctg(\omega RC)$ (tensiunea de ieşire întîrziată faţă de cea de intrare).
Expresiile curentului şi tensiunii de ieşire (originea fazei este tot tensiunea de intrare):

$$i(t)=\frac{E}{Z}\cdot\sin(\omega t+\varphi)=\frac{E}{\sqrt{R^2+\frac{1}{\omega^2C^2}}}\cdot\sin(\omega t+\varphi) \quad (8.11)$$

$$u(t)=\frac{E}{Z}\cdot\frac{1}{\omega C}\cdot\sin(\omega t+\varphi-\pi/2)=\frac{E}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cdot\sin(\omega t+\varphi-\pi/2). \quad (8.12)$$

Important pentru electronişti: Modelul frecvenţial (variabila independentă este frecvenţa)

Analiza frecvenţială
În exemplul de mai sus, am determinat raportul amplitudinilor celor două tensiuni (în regim periodic sinusoidal): $\frac{U_C}{E}=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}$
Defazajul este: $-(\pi/2-\varphi)=-arctg(\omega RC)$.
Cele două semnale sinusoidale de tensiune se pot exprima prin numere complexe, care să aibă modulul egal cu amplitudinea semnalului, iar argumentul egal cu faza semnalului (fazorii sînt reprezentarea grafică a acestor numere complexe):

$$E(j\omega)=E\cdot e^{j\cdot 0} \quad (8.13)$$

$$U(j\omega)=\frac{E}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cdot e^{j\cdot(\varphi-\pi/2)} \quad (8.14)$$

Acum se poate introduce o mărime, număr complex, egală cu raportul dintre cele două semnale exprimate ca numere complexe:

$$H(j\omega)=\frac{U(j\omega)}{E(j\omega)}. \quad (8.15)$$

În acest caz particular, are loc relaţia:

$$H(j\omega)=\frac{U(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{1}{1+j\omega RC}. \quad (8.16)$$

Exerciţiu propus: Verificaţi că modulul şi argumentul mărimii din (8.16) au valorile găsite anterior.

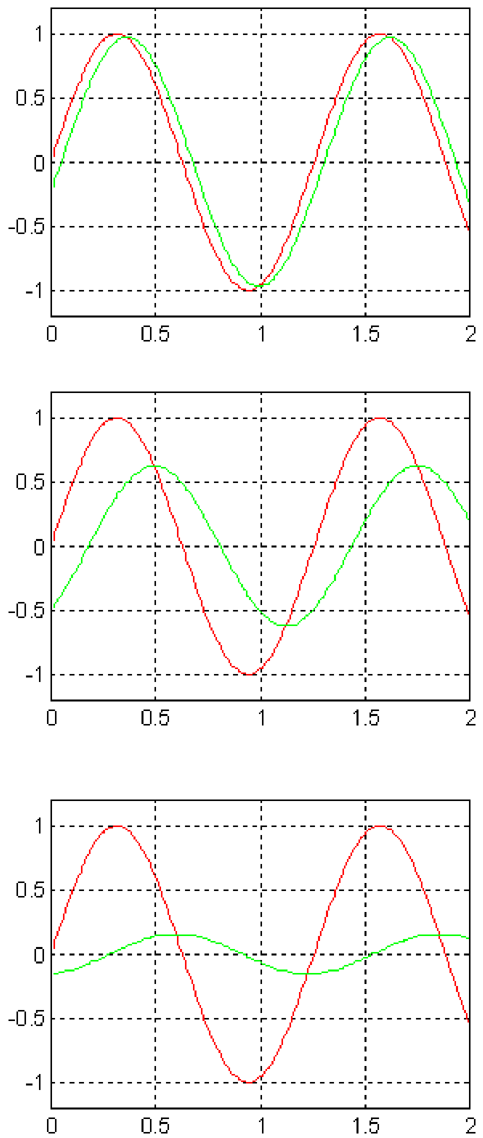
Utilizînd doar cunoştinţele de numere complexe, se observă că modulul funcţiei $H(j\omega)$ este egal cu raportul amplitudinilor semnalelor, iar argumentul lui $H(j\omega)$ este egal cu defazajul dintre cele două semnale.
N.B. Formal, raportul poate fi găsit ca şi cum am calcula tensiunea de ieşire a unui divizor de tensiune (figura 8.9), ale cărui elemente sînt R şi $\frac{1}{j\omega C}$ şi care lucrează în regim permanent sinusoidal:

$$H(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{Z_c}{R + Z_c} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\,. \qquad (8.17)$$

De regulă, gradul numitorului acestei funcții este egal cu numărul componentelor reactive din circuit.

Exercițiu propus: Verificați acest calcul.

Acest număr complex se numeşte <u>funcția răspuns la frecvență</u> şi caracterizează funcționarea în regim permanent sinusoidal a circuitelor liniare. Este un instrument foarte important pentru analiza circuitelor liniare, utilizat de electronişti (nu se aplică circuitelor neliniare). Intuitiv, funcția răspuns la frecvență este raportul dintre mărimea de ieşire şi mărimea de intrare dintr-un circuit, reprezentate prin numere complexe, atunci cînd circuitul se află în regim permanent sinusoidal. Ea ne permite să anticipăm comportarea circuitului, atît în regim periodic sinusoidal, cît şi în alte regimuri. (Semnificația mai profundă a mărimilor introduse aici şi tratarea sistematică vor fi explicate la cursul de Analiza şi Sinteza Circuitelor şi Sistemelor, semestrul 4.)



$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{25} \text{ sau } \omega\tau \cong 0{,}25 \text{ sau } \frac{\omega}{\omega_p} \cong 0{,}25$$

$$\frac{\tau}{T} = \frac{1}{5} \text{ sau } \omega\tau \cong 1{,}25 \text{ sau } \frac{\omega}{\omega_p} \cong 1{,}25$$

$$\frac{\tau}{T} = 1 \text{ sau } \omega\tau \cong 6{,}25 \text{ sau } \frac{\omega}{\omega_p} = 6{,}25$$

Figura 8.11: Semnalul de ieşire, pentru trei valori diferite ale constantei de timp a circuitului

În mod evident, din expresia (8.16) rezultă că modulul şi argumentul lui $H(j\omega)$ depind de frecvenţă şi de proprietăţile circuitului. Mai exact, depind de produsul dintre frecvenţa semnalului şi constanta de timp a circuitului (cu notaţia $\tau = RC$, din subcapitolul precedent): $H(j\omega) = \dfrac{1}{1 + j\omega\tau}$.

În figura 8.11 se arată verificarea acestei proprietăţi, pentru trei valori ale constantei. Semnalul sinusoidal (reprezentat cu roşu) se aplică la intrarea circuitului din figura 8.9. Perioada semnalului de intrare este 1,25 ms (timpul în abscisă), frecvenţa de 8kHz. Constanta de timp are valorile: 0,05ms, 0,25ms, 1,25ms. Semnalul de ieşire (reprezentat cu verde) este tot sinusoidal, de aceeaşi frecvenţă cu cel de intrare, dar are amplitudine şi fază diferite.

Valorile amplitudinii ieşirii, în cele trei cazuri: 0,97, 0,62 şi 0,16. Valorile defazajelor ieşirii, în cele trei cazuri: –14 grade, –51 grade şi –72 grade.

Se observă că amplitudinea şi defazajul semnalului de ieşire sînt apropiate de cele ale semnalului de intrare, dacă constanta de timp a circuitului este mică, în comparaţie cu perioada semnalelor (sau produsul dintre frecvenţă şi constanta de timp este mic). Dimpotrivă, pentru valori mai mari ale constantei de timp, amplitudinea semnalului de ieşire devine mai mică iar faza se deplasează spre –90 grade.

Deoarece modulul şi faza funcţiei $H(j\omega)$, pentru un anume circuit, sînt dependente de frecvenţă, este util să le reprezentăm grafic, ca în figura 8.12 (se numesc caracteristici de frecvenţă sau caracteristici Bode). Din aspectul caracteristicilor se pot deduce proprietăţile circuitului, precum şi mărimea de ieşire, atunci cînd se cunoaşte semnalul sinusoidal de intrare.

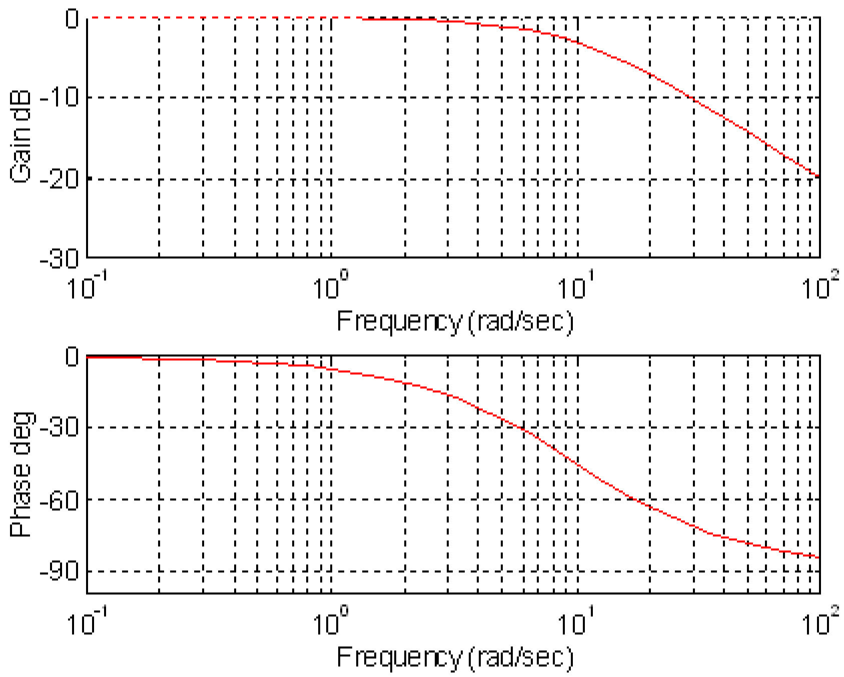


Figura 8.12: Caracteristicile de frecvenţă pentru un circuit ca cel din figura 8.9

În acest exemplu (figura 8.12), am reprezentat funcţia răspuns la frecvenţă din (8.16), în care valoarea constantei $\tau = 0{,}1\text{s}$. În abscisă este reprezentată pulsaţia, în rad/s, pe o scară logaritmică (termenul englez „frequency” nu corespunde termenului de pulsaţie, ci este introdus abuziv de programul care trasează caracteristicile). Scara logaritmică are proprietatea că păstrează o întindere echilibrată în grafic a domeniilor frecvenţelor joase şi înalte. În ordonata primului grafic este reprezentat modulul funcţiei $H(j\omega)$, denumit amplificare (termenul englez este „gain”). Amplificarea este reprezentată în decibeli (dB), conform cu relaţia de definiţie:

$$a_{dB} = 20 \cdot \lg a \, . \tag{8.18}$$

Această reprezentare logaritmică (ca şi frecvenţa) are avantajul că păstrează în grafic aspectul de dreaptă pentru dependenţele liniare. În ordonata graficului de jos este reprezentată liniar faza, în grade.

Cîteva valori remarcabile se pot observa pe cele două grafice.

1. Valoarea amplificării (modulul lui $H(j\omega)$) pentru frecvenţe foarte mici este 0dB. Aceasta înseamnă că $H(j\omega) = 1$, ceea ce se poate constata uşor, pe cale analitică, pentru $\omega \to 0$.
2. Valoarea amplificării scade, pentru frecvenţe înalte, odată cu frecvenţa, ceea ce iar se poate constata din expresia analitică. Panta asimptotică a graficului este –20dB/decadă, adică scade de 10 ori cînd frecvenţa creşte de 10 ori.
3. Dacă simplificăm caracteristica amplificare – frecvenţă aproximativ, astfel încît să conţină numai valoarea de frecvenţe joase şi asimptota părţii scăzătoare a curbei (ca în figura 8.13), cele două semidrepte se întîlnesc la o pulsaţie, numită pulsaţia de frîngere, cu valoarea $\omega_p = \frac{1}{\tau}$.
4. Defazajul variază descrescător, între 0 şi –90 grade.
5. Defazajul la pulsaţia de frîngere este –45 grade.

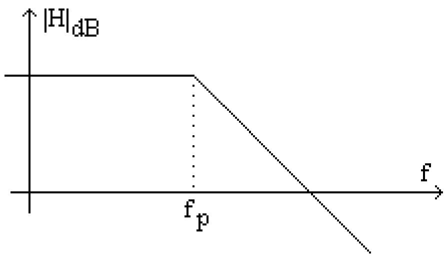


Figura 8.13: Aspectul aproximativ al caracteristicii amplificare – frecvenţă (din relaţia (8.16))

Proprietăţile anunţate mai sus se vor generaliza, la cursul ASCS.

8.4 Aplicaţii ale analizei în frecvenţă

Utilizarea funcţiei răspuns la frecvenţă (şi a caracteristicilor) pentru a deduce răspunsul circuitului

Funcţia răspuns la frecvenţă, introdusă prin (8.15), este un model al circuitului (de reţinut: numai pentru circuite liniare). Întrucît variabila independentă a funcţiei este pulsaţia (se poate converti în frecvenţă), modelul se numeşte frecvenţial. Acest model ne permite să anticipăm comportarea circuitului liniar în mai multe regimuri. Dintre ele, aici vor fi prezentate doar două cazuri: regimul periodic sinusoidal şi regimul periodic nesinusoidal.

Analiza în regim periodic sinusoidal a fost deja prezentată. Utilizarea funcţiei răspuns la frecvenţă (şi a caracteristicilor) este imediată.

1. Se presupune că se cunoaşte semnalul de intrare, sub forma $x_i(t) = X_i \sin(\omega_0 t)$ şi se notează semnalul de ieşire: $x_e(t) = X_e \sin(\omega_0 t + \varphi)$. Fiecare dintre cele două semnale poate fi tensiune sau curent, deci nu facem nici o ipoteză despre natura lor fizică.
2. Se deduce funcţia răspuns la frecvenţă a circuitului, folosind teoremele Kirchhoff şi exprimarea impedanţelor în numere complexe (aşa cum am procedat în expresia (8.17)).

3. Amplificarea (adică modulul funcției $H(j\omega)$, calculat la pulsația ω_0) furnizează amplitudinea semnalului de ieşire, potrivit cu relația:

$$X_e = |H(j\omega_0)| \cdot X_i \tag{8.19}$$

4. Argumentul funcției furnizează defazajul dintre intrare şi ieşire, potrivit cu relația:

$$\varphi = \arg(H(j\omega_0)) \tag{8.20}$$

5. Dacă am desenat deja caracteristicile de frecvență, atunci modulul şi argumentul funcției $H(j\omega)$ se extrag direct din grafice, la valoarea ω_0 a abscisei, şi se folosesc la fel ca în punctele 3 şi 4.

Analiza circuitului în regim periodic nesinusoidal este puțin mai laborioasă şi utilizează cunoştințele de descompunere a semnalelor periodice în serie Fourier (sumă de semnale sinusoidale).

1. Se cunoaşte semnalul periodic de intrare.
2. Se descompune într-o sumă de semnale sinusoidale (numite componente armonice).
3. Pentru fiecare componentă armonică, se deduce componenta corespunzătoare din semnalul de ieşire, aplicînd punctele 1-5 de la analiza sinusoidală.
4. Se reface semnalul de ieşire prin însumarea componentelor aflate la punctul precedent (proprietate numai a circuitelor liniare).

Cel mai adesea, nu ne interesează forma semnalului de ieşire, ca sumă a componentelor armonice, întrucît semnalul de intrare nu este previzibil. Ceea ce interesează este gama de frecvențe în care semnalul de intrare este amplificat uniform şi atenuarea componentelor care cad în afara acestei game. Această informație este reprezentată foarte convenabil în caracteristicile de frecvență.

Spre exemplu, dacă semnalul de intrare este dreptunghiular (figura 8.14), cu frecvența f_0, amplitudinile componentelor sale din seria Fourier au aspectul din figura 8.15.

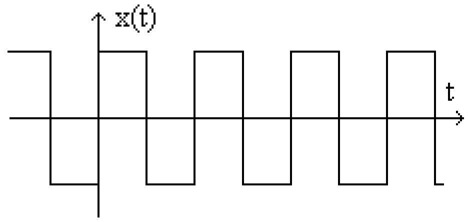


Figura 8.14: Semnal dreptunghiular

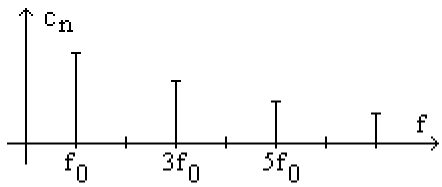


Figura 8.15: Spectrul semnalului dreptunghiular

Presupunem că acest semnal apare la intrarea circuitului din figura 8.9, care are caracteristica amplificare - frecvență din figura 8.13. Următoarele aprecieri calitative pot fi făcute, pornind de la raportul dintre frecvența semnalului f_0 şi frecvența de frîngere f_p:

- dacă frecvența de frîngere f_p este mult mai mare decît f_0 (figura 8.16a), componentele semnalului vor fi amplificate uniform, iar semnalul de ieşire va fi similar cu cel de intrare (uşoară teşire a fronturilor);
- dacă frecvența de frîngere f_p este comparabilă cu f_0 (figura 8.16b), prima armonică va fi atenuată puțin, în timp ce restul vor fi atenuate mai mult . Aspectul semnalului se va modifica spre o formă mai ascuțită;
- dacă frecvența de frîngere f_p este mult mai mică decît f_0 (figura 8.16c), toate armonicele vor fi atenuate, ceea ce va atrage o amplitudine mică a semnalului de ieşire (cu atît mai mică, cu cît armonica este de ordin mai mare).

Cele trei situații prezentate corespund cu analiza efectuată în subcapitolul 8.2 (figura 8.8). Pentru a sugera influența frecvenței de frîngere a circuitului, în figura 8.16 au fost marcate valorile frecvenței semnalului, în raport cu frecvența de frîngere.

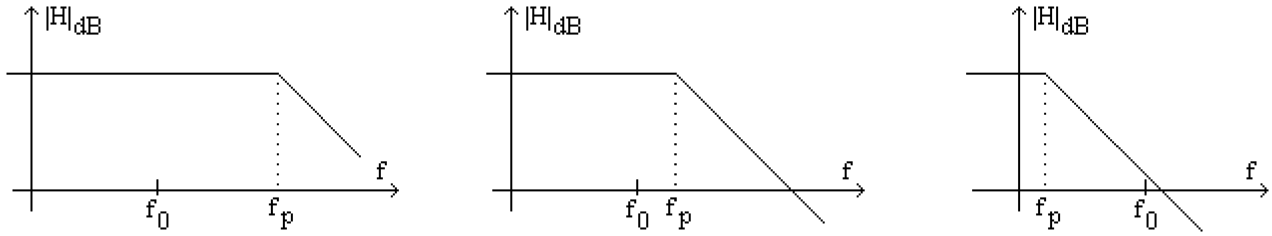


Figura 8.16: Poziții diferite ale frecvenței semnalului, în raport cu frecvența de frîngere

Un alt exemplu sugestiv este cel al unui semnal care are componentă medie şi componentă alternativă, ca în figura 8.17. Dacă frecvența de frîngere f_p este mult mai mică decît frecvența componentei alternative (figura 8.16c), această componentă va fi atenuată serios, iar semnalul de ieşire va consta doar într-o componentă constantă. Se spune că circuitul s-a comportat ca un filtru „trece-jos", în raport cu acest semnal, în sensul că a permis doar trecerea componentelor de frecvență joasă.

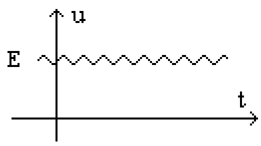


Figura 8.17: Semnal de intrare cu componentă medie şi componentă alternativă, de frecvență f_0

Exercițiu propus: deduceți funcția răspuns la frecvență pentru circuitul din figura de mai jos şi stabiliți constanta de timp, amplificarea pe asimptota orizontală şi frecvența la care se frînge caracteristica.

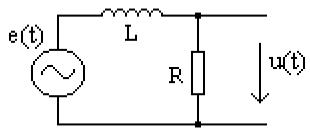


Figura 8.18: Circuit a cărui funcție de răspuns la frecvență trebuie determinată

<u>Problema atenuatorului compensatoiectarea unui circuit cu proprietăți frecvențiale impuse</u>

Uneori dorim să obținem proprietăți ale circuitului, exprimate mai uşor în domeniul frecvență. În acest caz:
- se aleg caracteristicile de frecvență care asigură proprietățile dorite;
- se aproximează funcția răspuns la frecvență corespunzătoare;
- se alege tipul de circuit caracterizat prin această funcție;
- se determină valorile componentelor din circuit, care asigură amplificarea şi frecvențele de frîngere alese.

În continuare, este prezentată ca exemplu sugestiv proiectarea unui atenuator compensat în frecvență.

Problema atenuatorului compensat (ca aplicație la comportarea în frecvență a circuitelor)

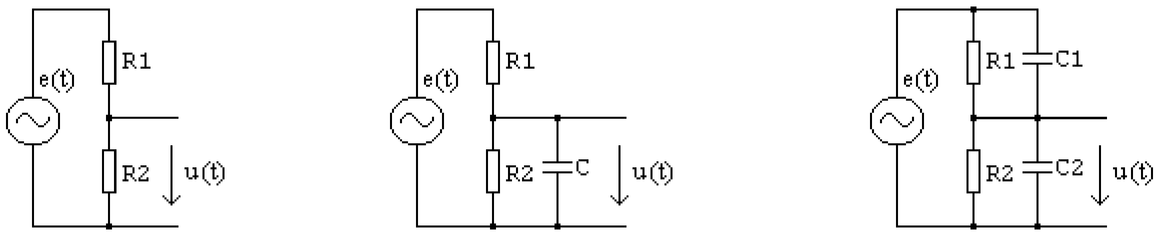


Figura 8.19: Circuitul de intrare în osciloscop, în diverse aproximări

Pentru atenuatoarele prezentate în subcapitolul 7.3, s-a presupus că intrarea în circuitul de măsură este pur rezistivă (ca în figura 8.19a). În figură, $e(t)$ este tensiunea de măsurat, $u(t)$ este tensiunea la intrarea circuitului de măsură, R_2 este rezistența de intrare a circuitului de măsură, iar R_1 este rezistența rezistorului adăugat pentru a obține atenuarea dorită. Raportul de divizare ar trebui să fie

$$\frac{u(t)}{e(t)} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}. \tag{8.21}$$

Spre exemplu, dacă $R_2 = 1\text{M}\Omega$ şi dorim o atenuare de 10 ori, este necesar ca $R_1 = 9\text{M}\Omega$.
În realitate, intrarea prezintă şi o capacitate parazită importantă, cum ar fi în cazul osciloscopului, cu valorile tipice $Z_i = 1\text{M}\Omega \,||\, 25\text{pF}$ (figura 8.19b).
Pentru acest circuit, funcția răspuns la frecvență este:

$$H(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{E(j\omega)} = \frac{R_2 \,||\, Z_c}{R_1 + R_2 \,||\, Z_c} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \text{ unde } \tau = C(R_1 \,||\, R_2). \tag{8.22}$$

Se observă că tensiunea de pe intrarea circuitului de măsură este deformată față de cea care trebuie măsurată. Spre exemplu, dacă se aplică $e(t)$ de formă dreptunghiulară, semnalul de la intrarea osciloscopului poate avea forma din figura 8.20 (frecvența semnalului comparabilă cu frecvența de frîngere a caracteristicii circuitului). Pentru frecvențe mai mari, forma semnalului va fi şi mai mult deformată.

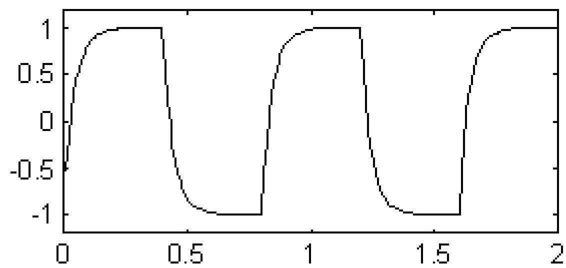


Figura 8.20: Răspunsul necompensat al circuitului la semnal dreptunghiular, cînd f_p şi f_0 sînt comparabile

Pentru a corecta răspunsul, se mai adaugă o capacitate, în paralel cu primul rezistor, ca în figura 8.19c (se spune că atenuatorul este compensat în frecvență). Problema atenuatorului compensat se formulează astfel: cum să alegem capacitatea adăugată (C_1), astfel încît comportarea circuitului să fie independentă de frecvență?

Rezolvare:
În acest context, analiza în timp nu este relevantă. Proprietatea esențială este un răspuns independent de frecvență, deci se va utiliza funcția răspuns la frecvență.

$$H(j\omega)=\frac{R_2 \parallel Z_{c2}}{R_1 \parallel Z_{c1}+R_2 \parallel Z_{c2}}=\frac{R_2}{1+j\omega R_2C_2}\cdot\frac{(1+j\omega R_2C_2)\cdot(1+j\omega R_2C_2)}{R_1+R_2+j\omega R_1R_2(C_1+C_2)}=$$
$$=\frac{R_2\cdot(1+j\omega R_2C_2)}{R_1+R_2+j\omega R_1R_2(C_1+C_2)}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1+j\omega R_2C_2}{1+j\omega(C_1+C_2)\cdot(R_1\parallel R_2)}. \quad (8.23)$$

Condiția ca funcția de mai sus să nu depindă de frecvență este: $R_2C_2=(C_1+C_2)\cdot(R_1\parallel R_2)$, de unde soluția pentru atenuator compensat:

$$R_1C_1=R_2C_2. \quad (8.24)$$

Practic, R_2 și C_2 se cunosc din proprietățile circuitului de măsură (intrarea în osciloscop). Se determină întîi R_1 din raportul de divizare dorit, apoi se determină C_1, din condiția (8.24).
Dacă capacitatea C_1 este corect aleasă, se obține un răspuns aproape de aceeaşi formă cu cel de intrare (nu este identic, din cauza capacităților şi inductanțelor parazite pe care le-am neglijat). Dacă capacitatea C_1 este insuficientă, se obține un răspuns întîrziat (figura 8.20). Dimpotrivă, dacă capacitatea C_1 este prea mare, se obține un răspuns ca cel din figura 8.21, despre care se spune că este supracompensat.

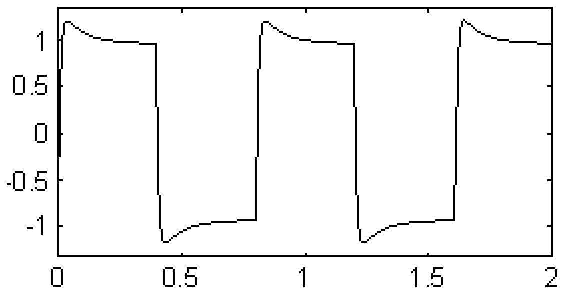


Figura 8.21: Răspuns supracompensat la semnalul dreptunghiular

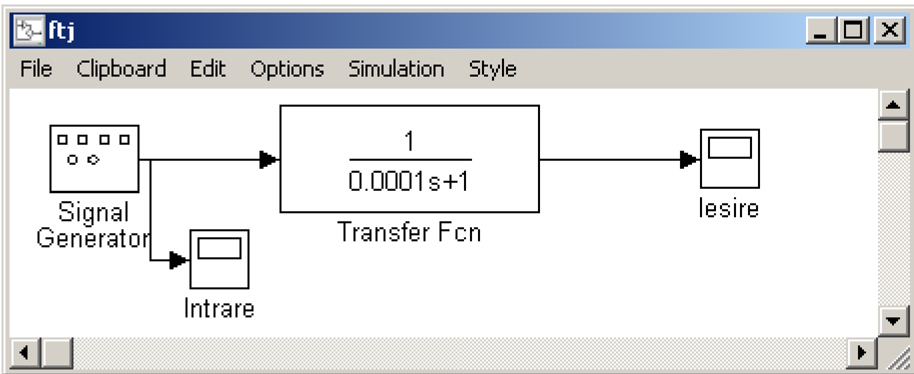


Figura 8.22: Simularea răspunsului circuitelor cu programul Matlab

Pentru simularea răspunsului circuitului se pot folosi mai multe programe. Figura 8.22 reprezintă fereastra din programul Matlab-Simulink, în care este simulat un element de întîrziere de ordinul I.

Programe mai adecvate pentru analiza circuitelor sînt cele care permit atît desenarea schemei, simularea circuitului, cît şi desenarea cablajului imprimat: Orcad, Eagle etc.