

Emil  
CEANGĂ

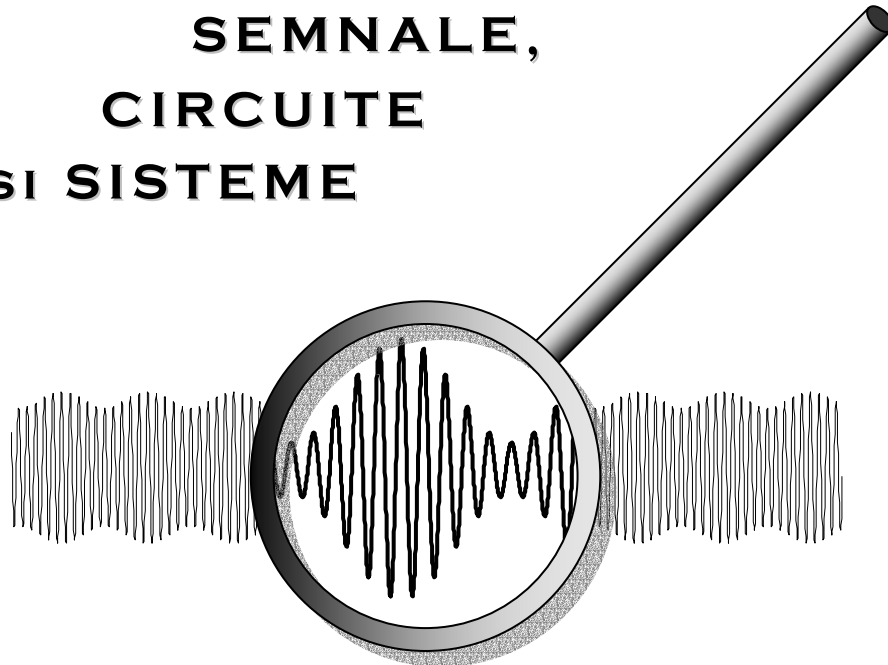
Iulian  
MUNTEANU

Antoneta  
BRATCU

Mihai  
CULEA



**SEMNALE,  
CIRCUITE  
SI SISTEME**



*Partea I: Analiza semnalelor*



EDITURA ACADEMICA

Emil Ceangă, Iulian Munteanu, Antoneta Bratcu, Mihai Culea  
**Semnale, circuite și sisteme. Partea I: Analiza semnalelor**  
Referent: Dr. Ing. Ion Mitescu

Editura **ACADEMICA**  
Str. Domnească 111  
6200 Galați ROMÂNIA

Copyright © 2001 Editura Academica  
Toate drepturile rezervate

Nici o parte din această publicație nu poate fi reprodusă,  
înregistrată sau transmisă, în nici o formă, prin mijloace  
electronice, mecanice, fotocopiare sau altele, fără  
permisiunea scrisă a editurii.

Tipărită la Universitatea “Dunărea de Jos” din Galați

ISBN 973-8316-16-2

## Prefață

Modelarea matematică a semnalelor are o importanță deosebită în problematica transmiterii și procesării informației. “Transferul” unui semnal printr-un sistem poate fi analizat utilizând o procedură de integrare a ecuației diferențiale care leagă mărimea de ieșire din sistem (răspunsul sistemului) de semnalul aplicat la intrarea sistemului. Această abordare, de tip „temporal”, are numeroase dezavantaje și limitări, nefiind adecvată situațiilor curente, când semnalele au forme oarecare și nu pot fi descrise ca simple funcții de timp. În aceste situații, singura abordare posibilă și eficientă are la bază **modelarea spectrală a semnalelor**.

Obiectivul principal al acestei lucrări constă în prezentarea fundamentelor modelării spectrale a semnalelor. S-a pus accentul pe analiza semnalelor deterministe cu timp continuu (analogice) și – mai ales – pe modelarea semnalelor cu timp discret (numerice). S-au inclus și unele noțiuni de bază privind semnalele aleatoare. În ultimul capitol al lucrării este prezentată o succintă introducere în analiza timp - frecvență a semnalelor nestaționare.

Principalele noțiuni introduse au fost ilustrate prin exemple. S-a acordat o atenție deosebită prezentării modalităților de utilizare a procedurilor incluse în mediul Matlab, pentru rezolvarea unor probleme specifice de modelare a semnalelor.

Prin conținutul ei, lucrarea are în vedere pregătirea de bază a studenților de la diferite specializări de inginerie electrică: în primul rând a studenților electroniști, dar și a celor de la specializările de Automatică și Informatică Industrială, de Acționări Electrice, etc.

Autorii țin să îi mulțumească domnului conf. dr. ing. Ioan Mătescu, care a acceptat sarcina de a fi referentul acestei lucrări și ale cărei observații și sugestii au contribuit la buna ei finalizare.

Apariția lucrării a fost posibilă cu sprijinul financiar oferit prin grantul Nr. 44081/16.11.1998, din cadrul Programului CNFIS.

Autorii, septembrie 2001

# Cuprins

<b>Capitolul 1: INTRODUCERE</b> .....	<b>1</b>
1.1. Noțiunea de semnal.....	1
<b>Capitolul 2: MODELAREA SEMNALELOR PERIODICE</b> .....	<b>5</b>
2.1. Seria Fourier generalizată (SFG).....	5
2.2. Analiza Fourier a semnalelor periodice.....	11
2.2.1. Seria Fourier trigonometrică (SFT).....	11
2.2.2. Seria Fourier armonică (SFA).....	12
2.2.3. Seria Fourier complexă (SFC).....	13
2.3. Utilizarea sistemelor de funcții binare ortogonale în modelarea semnalelor periodice.....	23
2.3.1. Analiza Fourier – Walsh.....	23
2.3.2. Analiza Fourier – Rademacher.....	29
2.3.3. Analiza Fourier – Hadamard.....	29
2.3.4. Analiza Fourier – Haar.....	30
2.4. Analiza polinomială a semnalelor periodice.....	31
<b>Capitolul 3: MODELAREA SEMNALELOR NEPERIODICE</b> .....	<b>35</b>
3.1. Analiza spectrală a semnalelor utilizând transformata Fourier.....	35
3.2. Semnificația fizică a caracteristicilor spectrale.....	37
3.3. Proprietățile caracteristicilor spectrale.....	41
3.4. Utilizarea distribuției $\delta(t)$ în analiza semnalelor.....	43
3.4.1. Definiția distribuției delta.....	43
3.4.2. Proprietățile distribuției delta.....	44
3.4.3. Determinarea unor caracteristici spectrale utilizând distribuția $\delta(t)$ .....	46
3.4.4. Distribuția delta periodică.....	49
3.4.5. Calculul numeric al caracteristicilor spectrale ale semnalelor utilizând distribuția $\delta$ .....	50
3.5. Convoluția semnalelor.....	54
3.6. Utilizarea transformatei Laplace în modelarea semnalelor.....	58
3.6.1. Noțiuni generale.....	58

3.6.2. Proprietăți ale transformatei Laplace	60
<b>3.7. Reprezentarea semnalelor prin transformata Hilbert</b>	<b>63</b>
3.7.1. Transformata Hilbert. Semnalul analitic	63
3.7.2. Caracteristica spectrală a transformatei Hilbert și a semnalului analitic	64
3.7.3. Transformata Hilbert a semnalelor periodice	65
3.7.4. Proprietățile semnalelor cauzale	68
<b>Capitolul 4: SEMNALE MODULATE</b>	<b>71</b>
4.1. Noțiuni generale privind modulația semnalelor. Tipuri de modulație	71
4.2. Semnale modulate în amplitudine pe purtător armonic	72
4.2.1. Modulația în amplitudine cu purtătoare și două benzi laterale	72
4.2.2. Modulația în amplitudine de tip produs	79
4.2.3. Modulația în amplitudine cu bandă laterală unică (BLU)	83
4.2.4. Modulația BLU utilizând transformata Hilbert (metoda semnalului analitic)	83
4.2.5. Modulația BLU utilizând metoda Weaver	85
4.2.6. Principiul multiplexării în frecvență	88
4.3. Semnale cu modulație unghiulară	90
4.3.1. Noțiuni generale privind modulația unghiulară	90
4.3.2. Analiza spectrală a semnalului modulat în frecvență	91
4.3.3. Analiza spectrală a semnalului modulat în fază	97
4.3.4. Semnale modulate MP și MF cu indice redus de modulație	98
4.4. Modulația impulsurilor	100
4.4.1. Modulația impulsurilor în amplitudine (MIA)	100
4.4.2. Principiul multiplexării în timp a semnalelor	106
4.4.3. Modulația impulsurilor în fază și în frecvență	107
4.4.4. Modulația impulsurilor în durată	113
<b>Capitolul 5: SEMNALE EȘANTIONATE</b>	<b>115</b>
5.1. Introducere	115
5.2. Modelarea semnalelor eșantionate	115
5.3. Transformata $\mathcal{Z}$	123
5.3.1. Transformata $\mathcal{Z}$ directă	123
5.3.2. Transformata $\mathcal{Z}$ inversă	125
5.4. Proprietățile transformatei $\mathcal{Z}$	125

---

5.5. Convoluția semnalelor eșantionate.....	129
5.6. Metode de calcul pentru transformata $\mathcal{F}$ directă.....	130
5.7. Calculul transformatei $\mathcal{F}$ inverse.....	133
5.8. Transformata Fourier discretă.....	137
5.9. Transformata Hilbert discretă.....	146
<b>Capitolul 6: SEMNALE ALEATOARE.....</b>	<b>151</b>
6.1. Noțiunea de semnal aleator.....	151
6.2. Clasificarea semnalelor aleatoare.....	152
6.3. Caracterizarea statistică a semnalelor.....	154
6.4. Teorema Wiener – Hincin.....	156
<b>Capitolul 7: ANALIZA TIMP – FRECVENȚĂ.....</b>	<b>167</b>
7.1. Introducere.....	167
7.2. Planul timp – frecvență.....	167
7.3. Principiul incertitudinii.....	169
7.4. Transformata Gabor continuă (CGT).....	171
7.5. Undine.....	173
7.6. Transformata continuă în undine (CWT – Continuous Wavelet Transform).....	176
7.7. Transformata inversă în undine.....	179
7.8. Transformata discretă în undine (DWT – Discrete Wavelet Transform).....	181
7.8.1. Discretizarea CWT.....	181
7.8.2. Analiza multirezoluție.....	182
7.9. Baze ortonormate de undine.....	184
<b>Bibliografie.....</b>	<b>191</b>
<b>Repertoriu de figuri.....</b>	<b>193</b>
<b>Index alfabetic.....</b>	<b>199</b>



# Capitolul 1

## INTRODUCERE

### 1.1. Noțiunea de semnal

Se numește *semnal* o mărime fizică măsurabilă, purtătoare de informație, care poate fi transmisă la distanță, recepționată și/sau prelucrată. În cele ce urmează, se va aborda problema modelării formei semnalelor, fără a ne preocupa de conținutul în informație al semnalelor.

Un semnal *unidimensional*, numit și semnal 1D, este o funcție de timp, notată generic prin  $x(t)$ ,  $t \in \mathfrak{R}$ . De regulă, mărimea fizică variabilă reprezentând semnalul este o tensiune electrică. Totuși, în echipamentele de automatizări se utilizează și semnale de altă natură fizică, așa cum sunt, de exemplu: curentul electric, presiunea aerului instrumental, deplasarea unui corp solid. În telecomunicații, semnalul 1D este întotdeauna o tensiune electrică variabilă în timp.

Fie  $\mathfrak{T}_t = [t_1, t_2]$  suportul semnalului  $x(t)$ , adică intervalul de timp finit în care se observă (măsoară) semnalul. Funcția  $x(t)$  se consideră de modul integrabil:

$$(1.1) \quad \int_{t_1}^{t_2} |x(t)| dt \leq M < \infty, \quad M \in \mathfrak{R},$$

adică  $x(t) \in L_1$ .

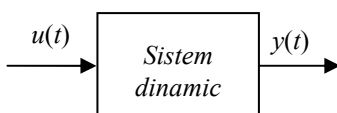


Fig. 1.1 Sistem dinamic

Semnalele se pot aplica unor circuite sau, mai general, unor sisteme dinamice. Fie  $u(t)$  semnalul aplicat la intrarea unui sistem și  $y(t)$  semnalul obținut la ieșirea acestuia, numit și *răspuns* al sistemului la semnalul de intrare (fig. 1.1). Sistemele dinamice realizează prelucrarea semnalelor, conform cu funcțiunile realizate de echipamentele electronice în care sunt înglobate.

Exemplificăm câteva operații uzuale de prelucrare a semnalelor: integrarea unui semnal, derivarea acestuia, filtrarea (extragerea unor componente spectrale ale semnalului sau, după caz, eliminarea componentelor parazite), modulația semnalelor, etc. De fapt, cele mai multe echipamente electronice sunt formate din lanțuri de sisteme dinamice, care realizează prelucrări consecutive ale semnalelor, conform unei „tehnologii” care determină funcțiunile realizate de echipamentul respectiv.

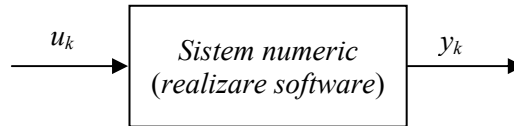


Semnalele pot fi: **cu timp continuu** și **cu timp discret**. În circuitele analogice de procesare, semnalele sunt cu timp continuu, fiind adesea numite **semnale analogice**.

**Semnalele numerice** pot fi generate de echipamente numerice sau se pot obține din cele analogice prin două operații:

- **eșantionarea** semnalului, adică discretizarea timpului  $t$  cu un pas  $T_e$ , numit perioadă de eșantionare. Semnalul cu timp discret,  $x(kT_e)$ , este notat adesea cu  $x(k)$ , unde  $k$  reprezintă timpul discret, adică pasul curent de eșantionare;

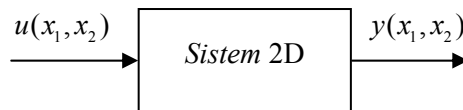
- **cuantizarea** semnalului, adică discretizarea amplitudinii eșantioanelor  $x(k)$ . Se alege un pas de cuantizare,  $\Delta$ , iar rezultatul operației de cuantizare este un număr întreg,  $q$ , astfel încât produsul  $q \cdot \Delta$  să fie cât mai apropiat de amplitudinea eșantionului cuantizat.



**Fig. 1.2** Sistem numeric

Cele două operații se realizează uzual în cadrul unui convertor analogic/numeric (A/N). La ieșirea acestuia se obține un șir de valori numerice,  $\{x_k\}$ , aferente momentelor de timp discrete  $k$ . Acest șir reprezintă un semnal numeric. Într-un sistem numeric (fig. 1.2), procesarea semnalului de intrare,  $\{u_k\}$ , în vederea obținerii răspunsului  $\{y_k\}$  se realizează prin mijloace software.

Semnalele care au o evoluție ce nu este supusă hazardului se numesc **semnale deterministe**. Alături de acestea, se întâlnesc și semnalele **aleatoare**, a căror evoluție în timp este supusă hazardului, așa cum sunt perturbațiile care afectează sistemele de transmitere și prelucrare a informațiilor.



**Fig. 1.3** Sistem 2D

Din clasa **semnalelor unidimensionale** menționăm: semnalul vocal, semnalul radio (modulat în amplitudine sau în frecvență), semnalele furnizate de traductoare ale mărimilor fizice uzuale (temperatură, viteză ș.a.) etc.

Semnalele **bidimensionale**, numite și semnale 2D, sunt – de regulă – imagini. Fie  $u(x_1, x_2)$  un semnal bidimensional, în raport cu coordonatele spațiale  $x_1$  și  $x_2$ . Mărimea  $u$  reflectă valoarea nivelului de gri în punctul de coordonate  $x_1$  și  $x_2$ . Ca și în cazul semnalelor unidimensionale, modelarea

matematică a semnalelor 2D vizează facilitarea descrierii operațiilor de prelucrare. Aceste operații de prelucrare se realizează cu ajutorul sistemelor 2D (fig. 1.3). Semnalul de ieșire din sistem,  $y(x_1, x_2)$ , se obține prin aplicarea unor operații specifice (filtrare, extragere contur, etc.) aplicate semnalului de intrare  $u(x_1, x_2)$ .

Obiectivul acestei lucrări constă în descrierea modelelor matematice ale semnalelor **unidimensionale**. S-a pus accentul pe semnalele deterministe cu timp continuu (analogice) și cu timp discret (numerice). În privința semnalelor aleatoare, sunt incluse doar unele noțiuni de bază.



## Capitolul 2

### MODELAREA SEMNALELOR PERIODICE

#### 2.1. Seria Fourier generalizată (SFG)

Instrumentul general de modelare a semnalelor periodice este seria Fourier generalizată (SFG).

Fie un semnal  $u(t)$  observat între momentele  $t_0$  și  $t_0+T$  (fig. 2.1). Acest semnal se consideră periodic, adică până la momentul  $t_0$  s-a reprodus periodic și după momentul  $t_0+T$  se reproduce de asemenea periodic.

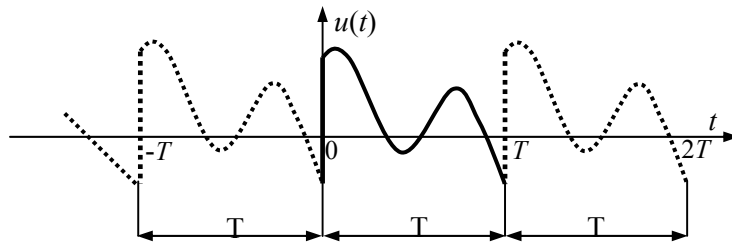


Fig. 2.1 Semnal periodic

Considerând că  $u(t)$  este un semnal în tensiune electrică, rezultă că puterea instantanee dezvoltată în rezistența  $R$  este  $p(t) = u^2(t)/R$ . Se consideră că energia dezvoltată în decursul perioadei  $T$  este finită, ceea ce implică:

$$(2.1) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} u^2(t) dt < \infty;$$

SFG utilizează descrierea funcției  $u(t)$  cu ajutorul unui sistem de funcții liniar independente  $\{\varphi_i(t)\}$ , unde  $i=0,1,2,3,\dots$ . Exprimarea lui  $u(t)$  prin SFG este:

$$(2.2) \quad u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(t)$$

În practică, limita superioară a sumei este întotdeauna finită.

O primă problemă care se pune este *alegerea funcțiilor*  $\{\varphi_i(t)\}_{i=0,1,2,\dots}$ . Prima condiție necesară este ca *funcțiile să fie liniar independente*. Cerințele suplimentare pe care le avem în vedere când alegem sistemul de funcții sunt enunțate mai jos:

- să realizeze o bună aproximare, atunci când limita superioară din

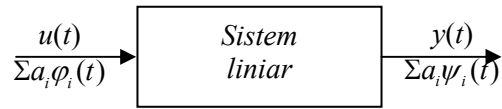
sumă,  $N$ , este dată; dacă vom calcula eroarea între  $u(t)$  și  $\sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(t)$ , adică:

$$\varepsilon(t) = u(t) - \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(t), \text{ atunci se caută ca această eroare să fie cât mai mică;}$$

- să poată fi ușor generate. Din acest punct de vedere, se recomandă funcțiile trigonometrice;

- **determinarea răspunsului unui sistem**, când la intrare se aplică semnalul modelat, să se realizeze cu ușurință.

Fie un sistem liniar, la intrarea căruia se aplică semnalul  $u(t)$ , prezentat ca o dezvoltare după sistemul de funcții  $\varphi_i(t)$  (fig. 2.2).



**Fig. 2.2** Răspunsul sistemului liniar

Conform principiului superpoziției, răspunsul  $y(t)$  este de forma  $\sum_{i=0}^N a_i \psi_i(t)$ , în care  $\psi_i(t)$  este răspunsul sistemului la intrarea  $\varphi_i(t)$  ( $\varphi_i(t) \rightarrow \psi_i(t)$ ). Scopul nostru este de a obține răspunsul  $y(t)$  cu un volum de calcul cât mai redus. Pentru aceasta, răspunsul  $\psi_i(t)$  trebuie să se obțină cât mai ușor posibil. Din acest punct de vedere, funcțiile trigonometrice sunt cele mai avantajoase;

- **determinarea parametrilor  $\{a_i\}$**  să se realizeze cu ușurință.

Se va arăta în cele ce urmează că, dacă sistemul de funcții este ortogonal, calculul parametrilor  $\{a_i\}$  devine facil.

**Determinarea parametrilor  $\{a_i\}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$**

Vom considera că modelul conține un *număr finit* de parametri:

$$(2.3) \quad u(t) = \sum_{i=0}^N a_i \varphi_i(t)$$

- Cazul sistemului de *funcții ortogonale*  
Funcțiile sunt ortogonale dacă:

$$(2.4) \quad \int_{t_0}^{t_0+T} \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t) dt = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ C_i^2, & i = j \end{cases}$$

unde  $C_i$  reprezintă norma funcției  $\varphi_i(t)$ . Notăm:  $\int_{t_0}^{t_0+T} (\cdot) dt = \int_T (\cdot) dt$ .

Fie  $j \in \{1, 2, \dots, N\}$  fixat. Prin înmulțirea relației (2.3) cu  $\varphi_j(t)$  și integrare pe intervalul  $[t_0, t_0+T]$ , se obține:

$$\int_T u(t)\varphi_j(t)dt = \sum_{i=0}^N a_i \int_T \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt,$$

sau, ținând cont de proprietatea de ortogonalitate (2.4),

$$(2.5) \quad a_j = \frac{1}{C_j^2} \int_T u(t)\varphi_j(t)dt, \quad j=1, 2, \dots, N$$

*Observații:*

Se constată că parametrii  $\{a_i\}_{i=1,2,\dots}$  se calculează în mod independent, fiecare față de ceilalți.

Dacă, pentru un  $N$  adoptat arbitrar, rezultă o eroare de modelare inacceptabilă, se adaugă noi termeni și se calculează parametrii  $a_{N+1}, a_{N+2}, \dots$ , până se obține precizia dorită pe intervalul  $T$ , fără ca parametrii determinați anterior să fie afectați.

- Cazul sistemelor de funcții neortogonale

Relația (2.3) se înmulțește cu  $\varphi_j(t)$ , unde  $j=0, 1, 2, \dots, N$ . Cele  $N+1$  relații astfel obținute se integrează pe intervalul  $T$ . Folosind notațiile:

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \int_T \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt, \quad \langle u, \varphi_i \rangle = \int_T u(t)\varphi_i(t)dt,$$

rezultă un sistem de  $N+1$  ecuații liniare cu necunoscutele  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle + a_1 \langle \varphi_1, \varphi_0 \rangle + \dots + a_N \langle \varphi_N, \varphi_0 \rangle = \langle u, \varphi_0 \rangle \\ a_0 \langle \varphi_0, \varphi_1 \rangle + a_1 \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle + \dots + a_N \langle \varphi_N, \varphi_1 \rangle = \langle u, \varphi_1 \rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ a_0 \langle \varphi_0, \varphi_N \rangle + a_1 \langle \varphi_1, \varphi_N \rangle + \dots + a_N \langle \varphi_N, \varphi_N \rangle = \langle u, \varphi_N \rangle \end{array} \right.$$

Acest sistem este compatibil determinat (sistem Cramer). Parametrii  $\{a_i\}_{i=0,1,\dots,N}$  se obțin ca fiind unica lui soluție.

*Observații:*

Volumul de calcul este foarte important. Parametrii nu se obțin în mod independent, ci se obține întregul set,  $\{a_i\}_{i=0,1,2,\dots,N}$ .

Dacă eroarea de aproximare la valoarea adoptată a lui  $N$  nu este acceptabilă, atunci trebuie adăugați termeni. În acest caz trebuie recalculați toți parametrii din model (se reface toată procedura).

Dacă funcțiile nu sunt liniar independente, sistemul liniar de ecuații

obținut este degenerat (matricea sistemului devenind singulară, sistemul nu mai admite o soluție unică).

### Noțiunea de spectru

Ansamblul parametrilor se reprezintă grafic într-o manieră specifică, reprezentarea respectivă numindu-se *spectru* (fig. 2.3).

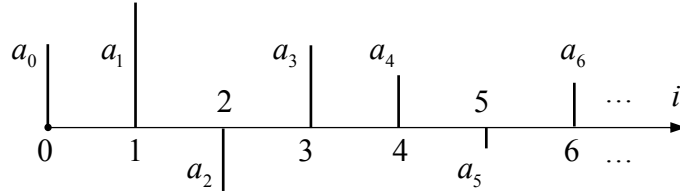


Fig. 2.3 Spectrul SFG al unui semnal

### Unicitatea reprezentării semnalelor prin SFG

Presupunem un semnal  $u(t)$ , modelat printr-un sistem de funcții ortogonale  $\{\varphi_i(t)\}_{i=1,2,\dots}$ , de normă  $C$ . SFG are expresia teoretică:

$$(2.6) \quad u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(t)$$

Presupunem că se utilizează pentru modelare un număr finit de termeni, și anume  $N$ . În mod riguros, nu ar trebui să acceptăm că în suma respectivă parametrii sunt identici cu  $a_i$ ; de aceea, parametrii din suma finită se notează cu  $b_i$ . Se obține:

$$u(t) \cong \sum_{i=0}^N b_i \varphi_i(t)$$

Se definește eroarea (instantanee) de modelare:

$$(2.7) \quad \varepsilon(t) = u(t) - \sum_{i=0}^N b_i \varphi_i(t)$$

Calitatea aproximării pe intervalul  $[t_0; t_0+T]$  este dată de *integrala pătratului erorii*:

$$(2.8) \quad I = \int_T \varepsilon^2(t) dt$$

Din (2.8), folosind (2.7), rezultă succesiv:

$$I = \int_T [u(t) - \sum_{i=0}^N b_i \varphi_i(t)]^2 dt = \int_T u^2(t) dt - 2 \sum_{i=0}^N b_i \int_T \varphi_i(t) u(t) dt + \int_T [\sum_{i=0}^N b_i \varphi_i(t)]^2 dt$$

În partea dreaptă a acestei relații, termenul al doilea conține integrale care sunt egale cu  $C^2 \cdot a_i$  (conform cu relația 2.5). Dezvoltarea pătratului din ultimul termen conduce la integrale ce reprezintă produse scalare ale funcțiilor  $\varphi_i(t)$  și  $\varphi_j(t)$ , care sunt nule pentru  $i \neq j$ , și la integrale care reprezintă pătratul normelor funcțiilor  $\varphi_i(t)$ , adică  $C^2$ . Rezultă:

$$I = \int_T u^2(t) dt - 2C^2 \sum_{i=0}^N a_i b_i + C^2 \sum_{i=0}^N b_i^2$$

Adăugând și scăzând  $C^2 \cdot \sum_{i=0}^N a_i^2$ , se obține:

$$I = \int_T u^2(t) dt - C^2 \sum_{i=0}^N a_i^2 + C^2 \sum_{i=0}^N (a_i - b_i)^2$$

Se pune problema să determinăm parametrii  $b_i$  care *minimizează criteriul de calitate*  $I$ . Valoarea minimă a acestui criteriu se obține atunci când  $b_i = a_i$  unde  $i=0,1,2,\dots,N$ . Prin urmare, parametrii modelului cu număr finit de termeni de dezvoltare sunt unici, indiferent de  $N$ , și sunt cei din expresia teoretică (2.2). Integrala pătratului erorii are expresia:

$$(2.9) \quad I = \int_T u^2(t) dt - C^2 \sum_{i=0}^N a_i^2$$

Întrucât  $I \geq 0$  pentru  $N$  finit, rezultă:

$$(2.10) \quad \int_T u^2(t) dt \geq C^2 \sum_{i=0}^N a_i^2$$

Relația (2.10) poartă denumirea de **inegalitatea lui Bessel**.

Vom pune acum primul termen din relația (2.9), sub forma:

$$\int_T u^2(t) dt = \int_T u(t) \cdot u(t) dt,$$

unde unul din factorii  $u(t)$  se înlocuiește prin modelul (2.2). Rezultă:

$$\int_T u^2(t) dt = \int_T u(t) \cdot \left[ \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(t) \right] dt = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \int_T u(t) \varphi_i(t) dt$$

În relația de mai sus se utilizează relația (2.5) și rezultă:

$$(2.11) \quad \int_T u^2(t) dt = C^2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2$$

Această relație reprezintă **egalitatea lui Parseval**. Ea are o interpretare energetică: dacă  $u(t)$  este un semnal în tensiune, atunci integrandul  $u^2(t)$  este



puterea instantanee pe o rezistență unitară, iar integrala este energia dezvoltată în intervalul de timp  $T$ . Se constată că această energie se repartizează pe componentele dezvoltării din SFG, proporțional cu pătratele parametrilor  $a_i$ ,  $i=0,1,2,\dots$

### Problema de analiză a semnalelor

Problema se formulează astfel: se dă semnalul  $u(t)$  și se cere spectrul său. Un *analizor de semnal* este un aparat care, primind la intrare semnalul  $u(t)$ , îi furnizează la ieșire spectrul. Schema de principiu a unui analizor de semnal este dată în fig. 2.4.

În structura analizorului intră un generator de funcții care furnizează setul de funcții  $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$ . Analizorul implementează fie analogic, fie numeric, expresia:

$$a_i = \frac{1}{C_i^2} \int_T u(t) \varphi_i(t) dt, \quad i = 0, 1, \dots, N$$

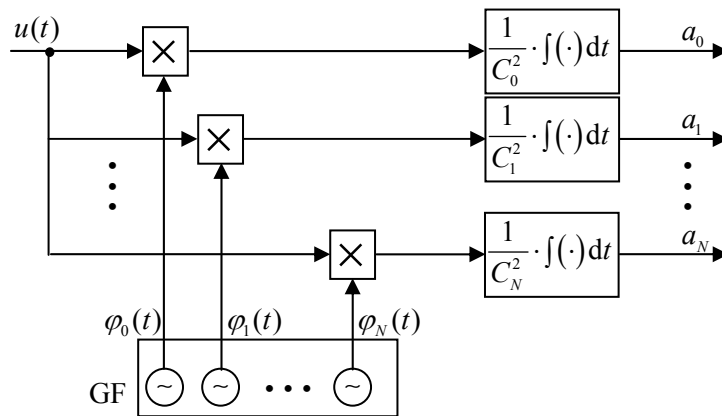


Fig. 2.4 Schema de principiu a unui analizor spectral

### Problema de sinteză a semnalelor

În acest caz, spectrul semnalului  $u(t)$  este dat și se cere să se sintetizeze semnalul. Echipamentul care realizează operația se numește *sintetizor*; acesta implementează relația (2.3) și are schema de principiu dată în fig. 2.5.

Particularizarea sistemului de *funcții ortogonale* folosit în modelare conduce la obținerea diverselor instrumente de modelare concrete. Astfel, rezultă următoarele tipuri de modelări:

- cu *funcții trigonometrice*, ceea ce conduce la analiza Fourier clasică;
- cu *funcții binare*: funcții Walsh, funcții Rademacher, funcții Haar, funcții Hadamard etc.;
- cu *polinoame ortogonale*: Legendre, Laguerre, Hermite, Cebâșev etc.

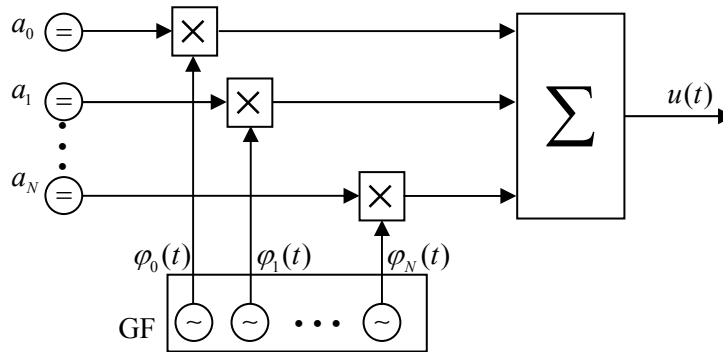


Fig. 2.5 Schema de principiu a unui sintetizor de semnal

## 2.2. Analiza Fourier a semnalelor periodice

### 2.2.1. Seria Fourier trigonometrică (SFT)

În acest caz sistemul de funcții ortogonale  $\{\varphi_i(t)\}_{i=0,1,2,\dots}$  este

$$(2.12) \quad \{1, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t); \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t); \dots; \cos(i\omega_0 t), \sin(i\omega_0 t); \dots\},$$

cu

$$(2.13) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T},$$

unde  $T$  este perioada semnalului periodic, iar  $\omega_0$  este pulsația. Acest sistem de funcții nu are aceeași normă. Pentru funcțiile trigonometrice sunt valabile relațiile:

$$\int_T \cos(i\omega_0 t) \cos(j\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

$$\int_T \sin(i\omega_0 t) \sin(j\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Deci pătratul normei acestor funcții este  $C^2 = \frac{T}{2}$ . În sistemul de funcții este și o constantă, și anume  $\varphi_0(t) = 1$ . Norma acesteia se obține din:  $C_0^2 = \int_T 1 \cdot 1 dt = T$ , deci componentei unitare din sistem îi corespunde norma  $\sqrt{T}$ .

Prin considerarea sistemului de funcții (2.12) în seria Fourier generalizată (SFG), rezultă următoarea relație:

$$(2.14) \quad u(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cos(\omega_0 t) + a_2 \sin(\omega_0 t) + a_3 \cos(2\omega_0 t) + a_4 \sin(2\omega_0 t) \dots$$

Utilizând notațiile:  $a_0 = C_0$ ,  $a_1 = C_1$ ,  $a_2 = S_1$ , ..., relația (2.14) devine:

$$(2.15) \quad u(t) = C_0 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cos(i\omega_0 t) + \sum_{i=1}^{\infty} S_i \sin(i\omega_0 t)$$

**Calculul parametrilor** se face aplicând relațiile generale (2.5) adaptate la sistemul de funcții (2.12).

$$\text{Rezultă: } C_0 = \frac{1}{T} \int_T u(t) \varphi_0(t) dt = \frac{1}{T} \int_T u(t) \cdot 1 dt$$

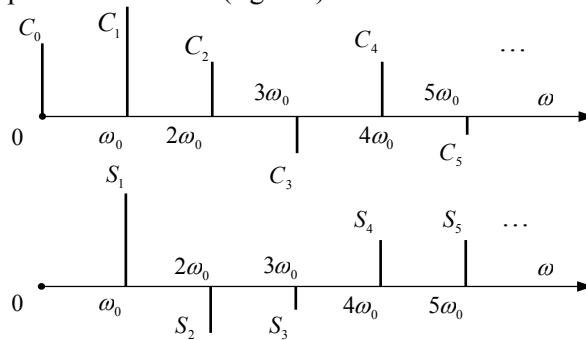
$$(2.16) \quad C_0 = \frac{1}{T} \int_T u(t) dt$$

Semnificația fizică a parametrului  $C_0$  este aceea de *medie a semnalului*. Ceilalți parametri se obțin conform relațiilor:

$$(2.17) \quad C_i = \frac{2}{T} \int_T u(t) \cos(i\omega_0 t) dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$(2.18) \quad S_i = \frac{2}{T} \int_T u(t) \sin(i\omega_0 t) dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

Relația (2.15) reprezintă expresia semnalului  $u(t)$  în *seria Fourier trigonometrică* (SFT), iar relațiile (2.16), (2.17) și (2.18) servesc la determinarea spectrului din SFT (fig. 2.6).



**Fig. 2.6** Spectrul SFT al unui semnal periodic

### 2.2.2. Seria Fourier armonică (SFA)

Seria Fourier armonică (SFA) se obține din SFT printr-o transformare simplă asupra termenului general  $C_i \cdot \cos(i\omega_0 t) + S_i \cdot \sin(i\omega_0 t)$ ,  $i=1, 2, \dots$ :

$$(2.19) \quad C_i \cdot \cos(i\omega_0 t) + S_i \cdot \sin(i\omega_0 t) = A_i \cdot \cos(i\omega_0 t + \varphi_i),$$

unde:

$$(2.20) \quad A_i = \sqrt{C_i^2 + S_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots \quad A_0 = C_0,$$

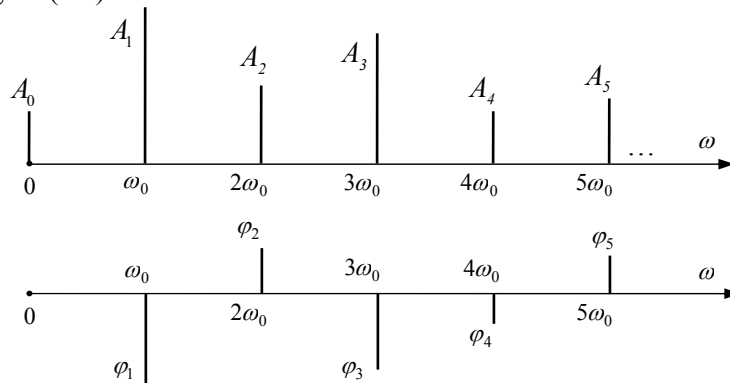
$$(2.21) \quad \varphi_i = -\arctg \frac{S_i}{C_i}, \quad i = 1, 2, \dots$$

În aceste condiții, relația (2.15) se poate scrie astfel:

$$(2.22) \quad u(t) = A_0 + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cos(i\omega_0 t + \varphi_i)$$

Relația (2.22) reprezintă expresia semnalului  $u(t)$  în SFA, adică sub formă de sumă de armonici, la care se adaugă componenta continuă  $A_0$ . O armonică de ordinul  $i$  are expresia  $A_i \cdot \cos(i\omega_0 t + \varphi_i)$  și reprezintă o componentă cosinusoidală având pulsația cunoscută,  $i\omega_0$ . Această armonică este determinată prin doi parametri: amplitudinea și faza inițială. Valoarea  $i=1$  corespunde componentei fundamentale, numită simplu *fundamentală*.

Spectrul SFA include *spectrul de amplitudini* și *spectrul fazelor inițiale*, ca în figura (2.7).



**Fig. 2.7** Spectrul de amplitudini și de faze inițiale la SFA

### 2.2.3. Seria Fourier complexă (SFC)

Fie armonică  $A_i \cdot \cos(i\omega_0 t + \varphi_i)$  din SFA. Reprezentarea nesimplificată în planul complex a acestei armonici se face printr-un vector rotitor de lungime  $A_i$  și de argument  $i\omega_0 t + \varphi_i$ :

$$(2.23) \quad A_i e^{j(i\omega_0 t + \varphi_i)} = \underline{A}_i e^{j i \omega_0 t},$$

unde  $\underline{A}_i = A_i e^{j\varphi_i}$  este reprezentarea în complex simplificată a armonicii  $i$ .

În relația (2.23) vom da indicelui  $i$  și valori negative. Înlocuind în relațiile (2.17) și (2.18) pe  $i$  cu  $-i$ , se obține  $C_{-i} = C_i$  și respectiv  $S_{-i} = -S_i$ . Din relațiile (2.20) și (2.21) rezultă că, dacă schimbăm  $i$  în  $-i$ , avem  $\underline{A}_{-i} = A_i e^{-j\varphi_i} = \underline{A}_i^*$  (conjugata lui  $\underline{A}_i$ ). Se obține:

$$\begin{aligned} \underline{A}_i \cos(i\omega_0 t + \varphi_i) &= \frac{1}{2} (\underline{A}_i e^{j\omega_0 t} + \underline{A}_{-i} e^{-j\omega_0 t}) = \frac{1}{2} [A_i e^{j(i\omega_0 t + \varphi_i)} + A_i e^{-j(i\omega_0 t + \varphi_i)}] = \\ &= \frac{A_i}{2} [\cos(i\omega_0 t + \varphi_i) + j \sin(i\omega_0 t + \varphi_i) + \cos(i\omega_0 t + \varphi_i) - j \sin(i\omega_0 t + \varphi_i)] \end{aligned}$$

În expresia (2.22), fiecare termen din sumă se poate înlocui cu semi-suma a două exponențiale, conform cu relația de mai sus. Se obține:

$$(2.24) \quad u(t) = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i e^{j\omega_0 t}$$

Notând  $\underline{A}_0 = 2 \cdot A_0$ , expresia (2.24) devine:

$$(2.25) \quad u(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i e^{j\omega_0 t}$$

Relația (2.25) reprezintă expresia modelului semnalului în seria Fourier complexă (SFC). În această expresie, factorii  $e^{j\omega_0 t}$  nu introduc nici o informație. Întreaga informație despre model este inclusă în parametrii  $\underline{A}_i$ . Pentru calculul parametrilor complecși  $\underline{A}_i$  se ține cont de relațiile

$$A_i = \sqrt{C_i^2 + S_i^2} \quad \text{și} \quad \varphi_i = -\arctg \frac{S_i}{C_i}, \quad \text{din care rezultă că:}$$

$$\underline{A}_i = C_i - jS_i$$

Vom utiliza această relație, împreună cu expresiile (2.17) și (2.18) care definesc parametrii SFT:

$$\begin{aligned} \underline{A}_i &= \frac{2}{T} \left[ \int_T u(t) \cos(i\omega_0 t) dt - j \int_T u(t) \sin(i\omega_0 t) dt \right] = \\ &= \frac{2}{T} \int_T u(t) [\cos(i\omega_0 t) - j \sin(i\omega_0 t)] dt \end{aligned}$$

sau:

$$(2.26) \quad \underline{A}_i = \frac{2}{T} \int_T u(t) e^{-j\omega_0 t} dt$$

SFC este complet definită de relațiile (2.25) și (2.26). Examinând acest model se constată prezența în prima relație a factorului  $\frac{1}{2}$ , iar în a doua relație a factorului 2. Este evident faptul că modelul poate fi pus sub o formă mai simplă, utilizată uzual în aplicații:

$$(2.27) \quad u(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i e^{ji\omega_0 t}$$

$$(2.28) \quad \underline{A}_i = \frac{1}{T} \int u(t) \cdot e^{-ji\omega_0 t} dt$$

Reprezentarea spectrală a semnalului în SFC este ilustrată în fig. 2.8. Aici s-a considerat că semnalul are în SFA spectrul din figura 2.7. Spectrul de amplitudini din SFC are simetrie pară. Trecerea de la spectrul de amplitudini din SFA la cel din SFC se face divizând la 2 amplitudinile  $A_i$  și atribuind amplitudinile înjumătățite inclusiv frecvențelor discrete negative,  $-i\omega_0$ . Spectrul fazelor inițiale în SFC are simetrie impară, iar pentru frecvențe pozitive el este identic cu cel din SFA. Deci legătura dintre SFC și SFA este dată de relațiile:

$$(2.29) \quad |\underline{A}_{\pm i}| = \frac{1}{2} \cdot A_i; \quad \varphi_{\pm i} = \pm \varphi_i$$

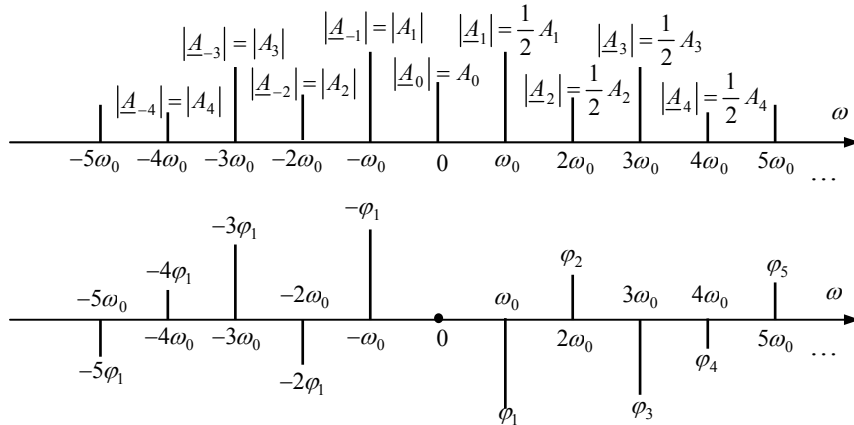


Fig. 2.8 Spectrul unui semnal periodic în SFC

*Observații:*

1. Pentru simplificarea exprimării, s-a utilizat noțiunea de „spectru” și în cadrul SFC, chiar dacă aici reprezentarea spectrală include mărimi fără corespondență fizică (frecvențe negative).

2. La calculul parametrilor SFT cu relațiile (2.17) și (2.18) se ține cont de următoarele reguli de calcul:

- dacă  $u(t)$  este funcție pară, adică  $u(-t) = u(t)$ , rezultă:

$$(2.30) \quad S_i = 0; \quad C_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} u(t) dt; \quad C_i = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \cos(i\omega_0 t) dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

- dacă  $u(t)$  este funcție impară, adică  $u(-t) = -u(t)$ , rezultă:

$$(2.31) \quad C_i = 0; S_i = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(i\omega_0 t) dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

3. Fie  $u(t)$  semnalul modelat prin SFC, conform relațiilor (2.27) și (2.28). Presupunem că semnalul este întârziat cu timpul  $\tau$ . Pentru obținerea modelului semnalului întârziat,  $u(t-\tau)$ , se înlocuiește  $t$  cu  $t-\tau$  în SFC, rezultând:

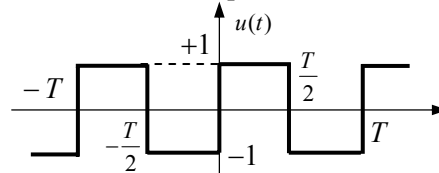
$$u(t-\tau) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i e^{ji\omega_0(t-\tau)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i e^{-ji\omega_0\tau} \cdot e^{ji\omega_0 t} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \widetilde{\underline{A}}_i e^{ji\omega_0 t},$$

unde  $\widetilde{\underline{A}}_i = \underline{A}_i e^{-ji\omega_0\tau}$ . Constatăm că  $|\widetilde{\underline{A}}_i| = |\underline{A}_i|$ , deci spectrul de amplitudini nu se modifică, dar fazele inițiale sunt afectate de întârziere:

$$(2.32) \quad \widetilde{\varphi}_i = \varphi_i - i\omega_0\tau$$

*Aplicația 2.1:*

Să se determine SFT, SFA și SFC pentru semnalul din fig. 2.9.



**Fig. 2.9** Semnal de tip „sinus pătrat”

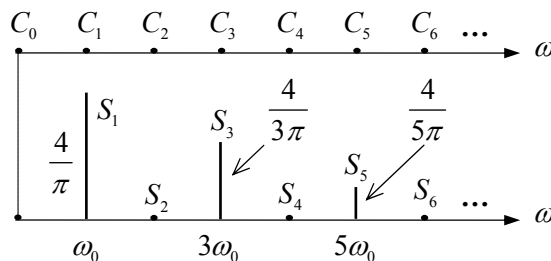
Întrucât funcția are simetrie impară, se aplică relațiile (2.31):

$$C_i = 0;$$

$$S_i = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} u(t) \sin(i\omega_0 t) dt = \frac{4}{T} \cdot \left( -\frac{\cos(i\omega_0 t)}{i\omega_0} \right) \Big|_0^{T/2} = \frac{4}{T} \cdot \frac{1 - \cos(i\omega_0 T/2)}{i\omega_0}$$

Înlocuind  $\omega_0 = 2\pi/T$  se obține:

$$S_i = \begin{cases} \frac{4}{\pi i}, & i \text{ impar} \\ 0, & i \text{ par} \end{cases}$$

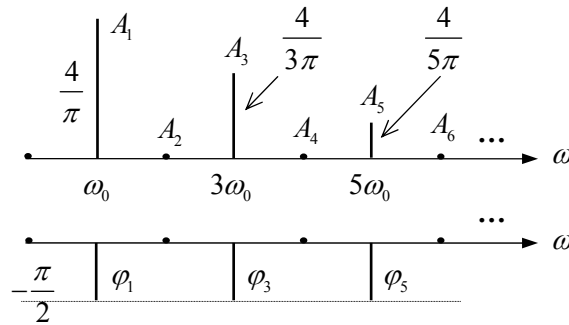


**Fig. 2.10** Spectrul SFT al semnalului din fig. 2.9

Valorile nenule ale parametrilor  $S_i$  se obțin pentru  $i = 2k + 1$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) și au expresia  $S_{2k+1} = \frac{4}{\pi(2k+1)}$ ;  $k = 0, 1, \dots$ . Cu parametrii  $C_i$  și  $S_i$  deduși, expresia (2.15) devine:

$$(2.33) \quad u(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \sin[(2k+1)\omega_0 t]$$

Spectrul SFT este reprezentat în fig. 2.10.



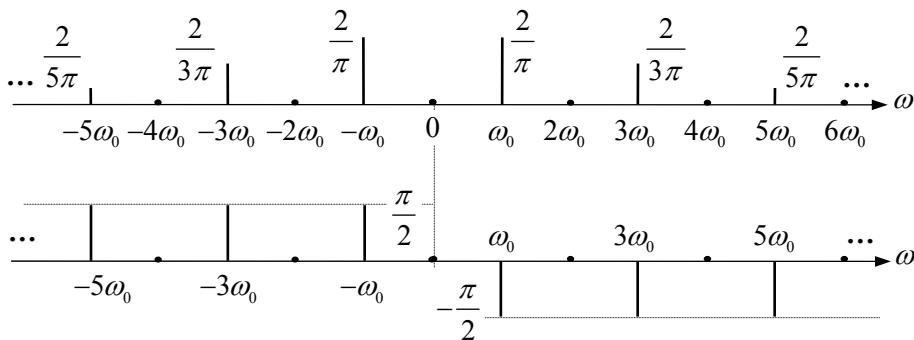
**Fig. 2.11** Spectrul SFA al semnalului din fig. 2.9

Dacă se exprimă funcția sinus prin funcția cosinus, expresia (2.33) devine:

$$(2.34) \quad u(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \cos[(2k+1)\omega_0 t - \pi/2],$$

reprezentând SFA. Există numai armonici de ordin impar, caracterizate de relațiile:

$$A_{2k+1} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1}; \quad \varphi_{2k+1} = -\pi/2; \quad k = 0, 1, \dots$$



**Fig. 2.12** Spectrul SFC al semnalului din fig. 2.9

Spectrul de amplitudini și de faze inițiale din SFA este reprezentat în fig. 2.11. În conformitate cu relațiile existente între spectrele SFA și SFC, se

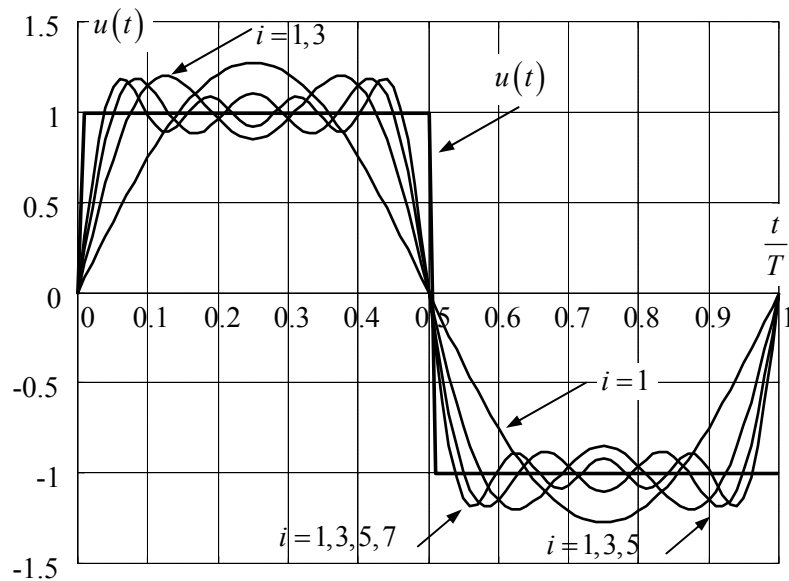


deduce spectrul SFC, reprezentat în fig. 2.12.

În fig. 2.13 sunt prezentate graficele semnalului  $u(t)$  și ale semnalului  $\hat{u}(t)$  calculat cu SFA conținând numai armonica 1 ( $i=1$ ), respectiv conținând 2 armonici ( $i=1,3$ ), 3 armonici ( $i=1,3,5$ ) și 4 armonici ( $i=1,3,5,7$ ).

Programul Matlab utilizat pentru generarea aproximărilor lui  $u(t)$  prin SFA este:

```
clear all;
T=1;w=2*pi/T;
t=0:0.01:T;u=sign(sin(w*t));
plot(t,u);grid;hold on;
for i=1:4,
    u=0;
    for k=1:i,
        u=u+sin((2*(k-1)+1)*w*t)/(2*(k-1)+1);
    end;
    u=u*4/pi;
    plot(t,u,'k');
end;
hold off;
```



**Fig. 2.13** Semnalul  $u(t)$  și diferite aproximări ale sale prin SFA

*Observație:*

Spectrul unor semnale se poate obține din spectrul cunoscut al unui semnal de referință, prin însumarea unei constante și/sau modificarea scării și/sau operație de întârziere. De exemplu, considerând  $u(t)$  din fig. 2.9 ca semnal de referință, semnalul periodic din fig. 2.14 se scrie:

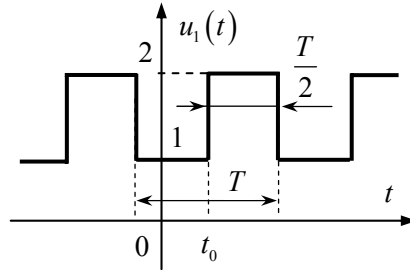
$$u_1(t) = 1.5 + 0.5 \cdot u(t - t_0)$$

Având în vedere relațiile (2.32) și (2.34), spectrul SFA al semnalului  $u_1(t)$  este:

$$u_1(t) = 1.5 + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \cos \left[ (2k+1)\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2} - (2k+1)\omega_0 \cdot t_0 \right],$$

deci:

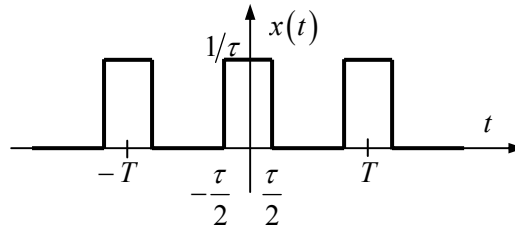
$$A_0 = 1.5; \quad A_{2k+1} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{2k+1}; \quad \varphi_{2k+1} = -\frac{\pi}{2} - (2k+1)\omega_0 \cdot t_0$$



**Fig. 2.14** Semnal derivat din semnalul  $u(t)$ , dat în fig. 2.9

*Aplicația 2.2:*

Fie  $x(t)$  un tren de impulsuri de arie unitară, reprezentat în fig. 2.15. Să se modeleze semnalul prin seria Fourier, știind că  $T=1$  ms și  $\tau=0.2$  ms.



**Fig. 2.15** Tren de impulsuri de arie unitară

Se utilizează SFC. Pentru a calcula parametrul  $A_i$  folosim relația (2.28):

$$(2.35) \quad \begin{aligned} \underline{A}_i &= \frac{1}{T} \int_T u(t) e^{-ji\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau} e^{-ji\omega_0 t} dt = \frac{1}{T\tau} \left( \frac{1}{-ji\omega_0} e^{-ji\omega_0 t} \right) \Bigg|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \\ &= \frac{1}{T} \text{sinc} \left( \frac{i\tau\omega_0}{2} \right) \end{aligned}$$

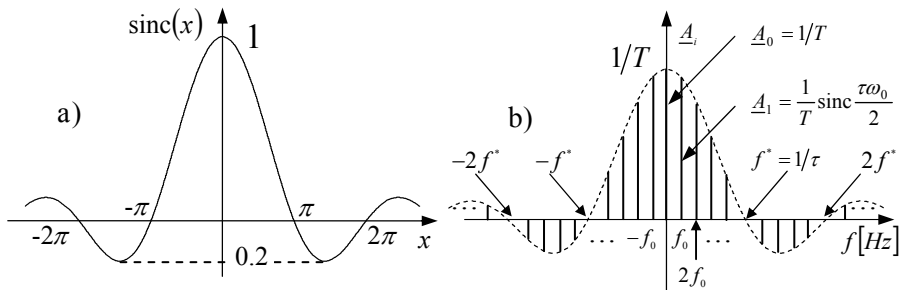
unde  $\text{sinc}(\cdot)$  este funcția *sinus cardinal*. Rezultă parametrul  $A_i$  și  $\varphi_i$ :

$$(2.36) \quad A_0 = |A_0| = \frac{1}{T}; \quad A_i = 2|A_i| = \frac{2}{T} \text{sinc} \left( \frac{i\tau\omega_0}{2} \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$(2.37) \quad \varphi_i = \begin{cases} 0, & \text{pentru } \text{sinc}\left(\frac{i\tau\omega_0}{2}\right) \geq 0 \\ -\pi, & \text{pentru } \text{sinc}\left(\frac{i\tau\omega_0}{2}\right) < 0 \end{cases}$$

Graficul funcției sinc(x) este dat în fig. 2.16, a). Reprezentarea semnalului cu ajutorul SFC este:

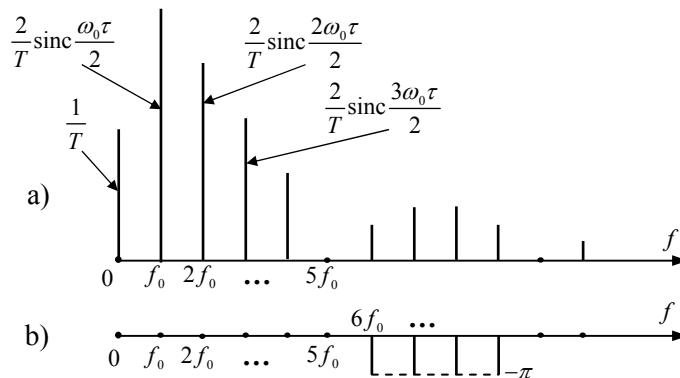
$$(2.38) \quad x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i e^{ji\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{i\omega_0 \tau}{2}\right) \cdot e^{ji\omega_0 t}$$



**Fig. 2.16** Funcția sinus cardinal a) și spectrul unui tren de impulsuri b)

Funcția sinus cardinal se anulează pentru  $\frac{i\tau\omega_0}{2} = \pm k\pi$  sau, altfel,  $\frac{i}{2} 2\pi f_0 \tau = \pm k\pi$ . Deci  $A_i = 0$  pentru frecvența  $f^* = \pm \frac{1}{\tau}$ ,  $f_0 = \frac{1}{T}$ , și pentru  $\pm 2f^*, \pm 3f^*, \dots$ . Spectrul SFC este reprezentat în fig. 2.16, b). Se observă că  $A_5 = A_{10} = \dots = 0$ .

Pornind de la relația (2.29) se poate construi spectrul de amplitudini (fig. 2.17, a)) și de faze (fig. 2.17, b)), care caracterizează seria Fourier armonică.

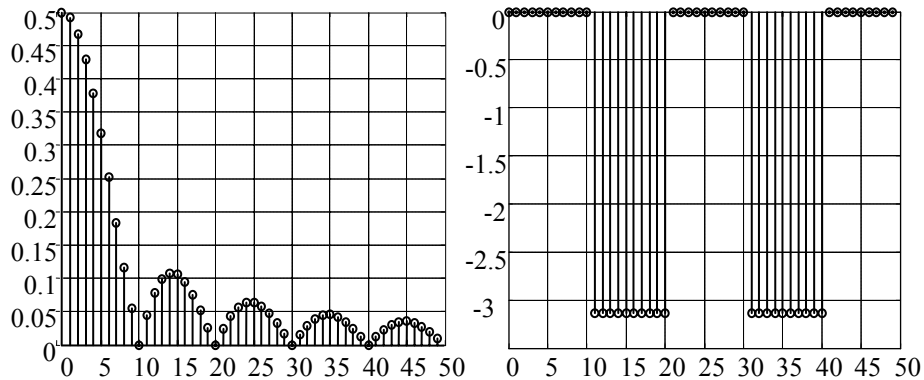


**Fig. 2.17** Spectrul de amplitudini și de faze al unui tren de impulsuri

*Aplicația 2.3:*

Fiind dat un tren de impulsuri cu arie unitară, având perioada  $T = 2\text{s}$  și durata  $\tau = 0.2\text{s}$ , să se realizeze programul care efectuează următoarele operații:

- calculul componentelor spectrale aferente SFC;
- reprezentarea în același grafic a semnalului dat (pe o perioadă a acestuia), cât și a semnalelor calculate pe baza unui număr finit de armonici din spectrul determinat. Se vor considera 9, 19, și 29 armonici în spectru.



**Fig. 2.18** Spectrele de amplitudini  $|A_i|$  și de faze  $\varphi_i$

Lista comentată a programului Matlab este următoarea:

```
clear all; clg;
%parametrii trenului de impulsuri
T=2;w0=2*pi/T;tau=0.2;Amplit=1/tau;
%calcului parametrilor modelului spectral
A=zeros(1,50);phi=zeros(1,50);
for i=1:50,
    alf=(i-1)*w0*tau/2;
    alf=alf/pi;
    A(1,i)=abs(sinc(alf)/T);
    phi(1,i)=-angle(sinc(alf));
end;
%se calculează vectorul ind, necesar în reprezentarea grafică a spectrului
for i=1:50,
    ind(i)=i-1;
end;
%reprezentarea spectrului SFC (numai pentru frecvențe pozitive)
figure(1)
stem(ind,A(1,:));grid;
figure(2)
stem(ind,phi(1,:));grid;
%generarea trenului de impulsuri și reprezentarea lui grafică
x1=zeros(1,900);x2=Amplit*ones(1,200);
x3=zeros(1,900);x=[x1 x2 x3];
```

```

dt=0.001;t=[-T/2+dt:dt:T/2];
figure(3);
h=plot(t,x,'k');set(h,'LineWidth',2);
axis([-1 1 -1.5 7]);hold on;
%calculul semnalelor deduse pe baza spectrului determinat
%se utilizează 9, 19 și 29 armonici în spectru; se reprezintă aceste
%semnale pe un grafic comun cu cel al trenului de impulsuri
for j=9:10:29,
    xy=A(1)*ones(1,2000);
    for i=1:j,
        xy=xy+2*A(1,i+1)*cos(i*w0*t+phi(1,i+1));
    end;
plot(t,xy,'k');axis([-1 1 -1.5 7]);end;grid;
    
```

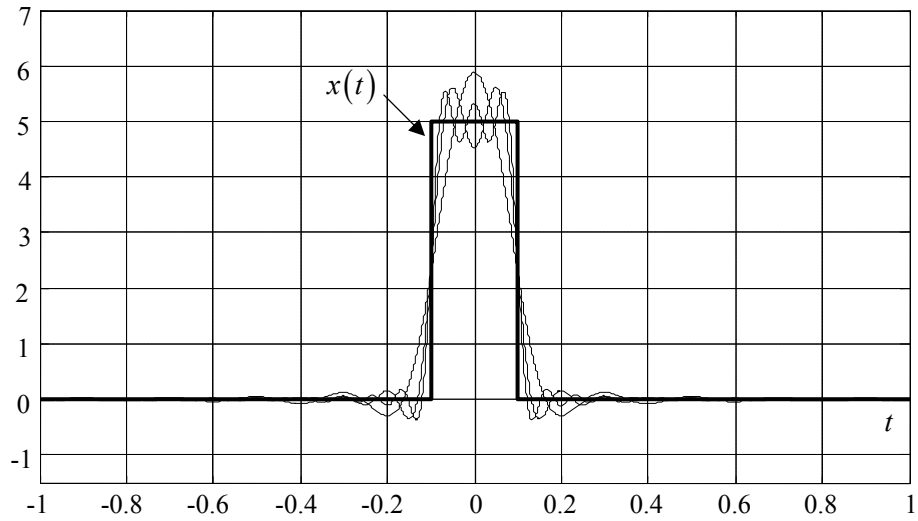


Fig. 2.19 Semnalul  $x(t)$  și aproximarea acestuia printr-un număr finit de armonici

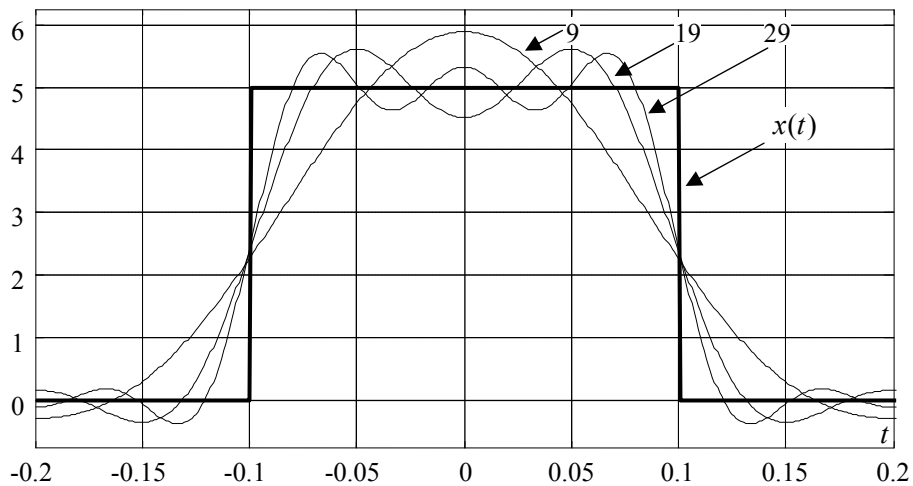


Fig. 2.20 Detalierea zonei centrale din fig. 2.19

În fig. 2.18 sunt date componentele spectrale  $|A_i|$  și  $\varphi_i$  din SFC, aferente frecvențelor pozitive. În fig. 2.19 este reprezentat semnalul  $x(t)$  și aproximările acestuia prin considerarea a 9, 19, și 29 armonici. Pentru a discerne mai bine calitatea aproximărilor, în fig. 2.20 s-a reprezentat, la scară de timp, zona centrală din fig. 2.19.

### 2.3. Utilizarea sistemelor de funcții binare ortogonale în modelarea semnalelor periodice

În acest caz, funcțiile ortogonale din sistemul  $\{\varphi_i(t)\}_{i=0,1,2,\dots}$ , utilizat în dezvoltarea  $u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \varphi_i(t)$ , pot lua doar două valori. Principalele funcții din această categorie sunt: funcțiile Walsh, funcțiile Rademacher, funcțiile Hadamard și funcțiile Haar.

#### 2.3.1. Analiza Fourier - Walsh

Funcțiile Walsh sunt funcții ortogonale, definite pe o bază de timp, numită și *suport*,  $[0; T]$ ,  $T$  fiind perioada. Frecvent se utilizează ca suport domeniul  $[-T/2; T/2]$ . De asemenea, se poate utiliza un domeniu de *timp normalizat*:  $\theta = t/T$ . În acest caz, suportul este  $[0; 1]$  sau  $[-1/2; 1/2]$ .

Reprezentarea grafică a primelor  $N=8$  funcții Walsh este dată în fig. 2.21.

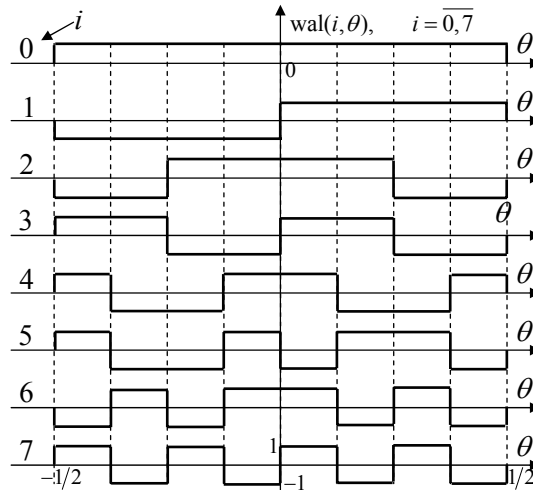


Fig. 2.21 Primele 8 funcții Walsh

Intervalul  $[-1/2; 1/2]$  s-a împărțit în  $N$  subintervale egale, de lățime  $\Delta$ , numărul subintervalului fiind o putere a lui 2:  $N = 2^p$ ; în fig. 2.21  $p=3$ .

Funcțiile Walsh se notează prin  $wal(i, \theta)$ ,  $i=0,1,\dots,N-1$ . Prin analogie cu funcțiile trigonometrice, funcțiile Walsh pare se notează:

$$(2.39) \quad \text{cal}(k, \theta) = \text{wal}(2k, \theta), \quad k=0,1,2,\dots,N/2-1$$

iar cele impare

$$(2.40) \quad \text{sal}(k, \theta) = \text{wal}(2k+1, \theta), \quad k=0,1,2,\dots,N/2-1$$

Indicele  $k$  din funcția  $\text{cal}(k, \theta)$  arată numărul de intersecții ale abscisei din jumătatea bazei de timp și se numește *secvența funcției*.

Norma funcțiilor Walsh, definite în raport cu timpul normalizat  $\theta$ , este 1.

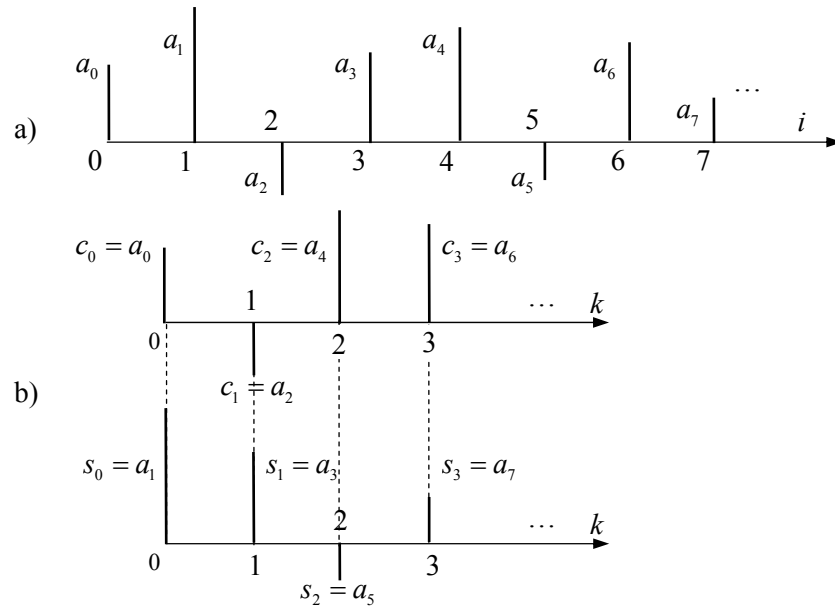
Dacă se utilizează timpul fizic,  $t$ , norma este  $\sqrt{T}$ .

Dezvoltarea unei funcții periodice  $u(t)$  în sistemul de funcții Walsh este:

$$(2.41) \quad u(t) = a_0 \text{wal}(0, t) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \text{wal}(i, t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

în care:

$$(2.42) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int u(t) \text{wal}(0, t) dt = \frac{1}{T} \int u(t) dt \\ a_i = \frac{1}{T} \int u(t) \text{wal}(i, t) dt, \quad i = 1, 2, \dots \end{cases}$$



**Fig. 2.22** Spectre în analiza Fourier-Walsh, conform modelelor (2.41) a) și (2.43) b)

Expresia (2.41) se poate pune sub forma:

$$(2.43) \quad u(t) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} c_k \text{cal}(k, t) + \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} s_k \text{sal}(k, t),$$

în care:

$$(2.44) \quad c_k = a_{2k} = \frac{1}{T} \int u(t) \text{cal}(k, t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2.45) \quad s_k = a_{2k+1} = \frac{1}{T} \int u(t) \text{sal}(k, t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

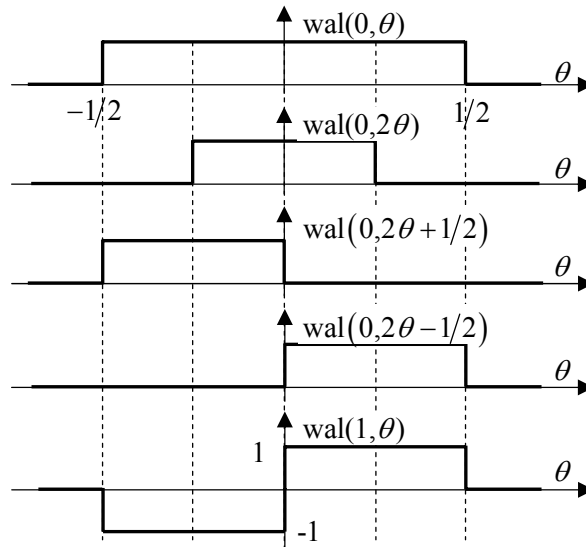
Spectrul semnalului modelat prin relațiile (2.41) și (2.43) este reprezentat în fig. 2.22, a), respectiv 2.22, b).

**Generarea funcțiilor Walsh** se face, de regulă, prin relații iterative. Vom ilustra două astfel de proceduri.

**Procedura 1.** Se inițializează  $\text{wal}(0, \theta)$ , cu valoare unitară pentru  $|\theta| \leq 1/2$  și zero în rest. În continuare,  $\text{wal}(i+1, \theta)$ , se calculează pe baza funcției anterioare,  $\text{wal}(i, \theta)$ ,  $i=0, 1, 2, \dots$ , utilizând ecuația:

$$(2.46) \quad \text{wal}(2j+l, \theta) = (-1)^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor + l} \cdot \left\{ \text{wal} \left[ j, 2 \left( \theta + \frac{1}{4} \right) \right] + (-1)^{j+l} \cdot \text{wal} \left[ j, 2 \left( \theta - \frac{1}{4} \right) \right] \right\}$$

cu  $j = 0, 1, 2, \dots$ ;  $l = 0, 1$ , iar  $\lfloor j/2 \rfloor$  este partea întreagă a lui  $j/2$ .



**Fig. 2.23** Generarea funcției  $\text{wal}(1, \theta)$

*Exemplul 2.1:*

Calculul funcției  $\text{wal}(1, \theta)$  pe baza funcției  $\text{wal}(0, \theta)$ . În cazul funcției  $\text{wal}(1, \theta)$ , indicii  $j$  și  $l$  sunt:  $j = 0$  și  $l = 1$ . Aplicând relația (2.46), rezultă:



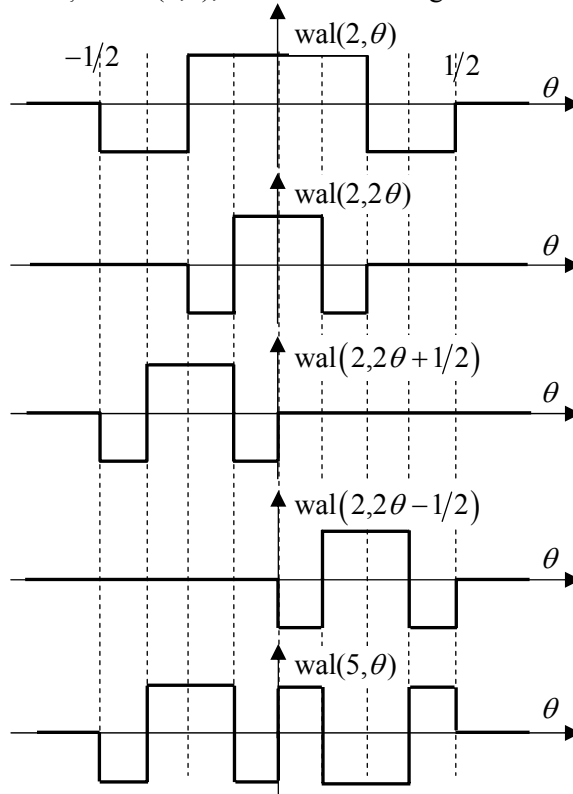
$$(2.47) \quad \text{wal}(1, \theta) = (-1) \cdot \left[ \text{wal}\left(0, 2\theta + \frac{1}{2}\right) + (-1) \cdot \text{wal}\left(0, 2\theta - \frac{1}{2}\right) \right]$$

În fig. 2.23 este ilustrată construcția funcției  $\text{wal}(1, \theta)$ , pe baza celor 2 termeni din partea dreaptă a expresiei (2.47).

Calculul funcției  $\text{wal}(5, \theta)$  se face punând  $j = 2$  și  $l = 1$ . Rezultă:

$$(2.48) \quad \text{wal}(5, \theta) = (-1)^2 \cdot \left[ \text{wal}\left(2, 2\theta + \frac{1}{2}\right) + (-1)^3 \cdot \text{wal}\left(2, 2\theta - \frac{1}{2}\right) \right]$$

Generarea funcției  $\text{wal}(5, \theta)$ , este ilustrată în fig. 2.24.



**Fig. 2.24** Generarea funcției  $\text{wal}(5, \theta)$

**Procedura 2.** Se notează prin  $r = 0, 1, \dots, N-1$  intervalul discret în care se împarte baza de timp a funcției. După inițializarea funcției  $\text{wal}(0, r)$ , calculul iterativ al celorlalte funcții se face cu relația:

$$(2.49) \quad \text{wal}(2j+l, r) = (-1)^{\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + l} \left\{ \text{wal}(j, 2r) + (-1)^{j+l} \text{wal}\left[j, 2\left(r - \frac{N}{2}\right)\right] \right\}$$

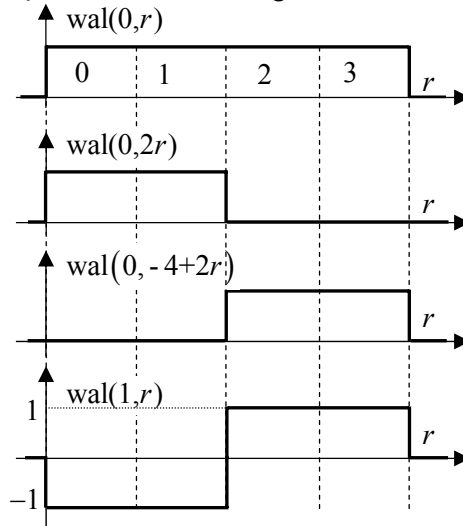
cu  $j = 0, 1, 2, \dots$ ;  $l = 0, 1$ ;  $r = 0, 1, \dots, N-1$ .

*Exemplul 2.2:*

Deducerea funcției  $wal(1,r)$  din  $wal(0,r)$  se face cu relația (2.49), în care se pune  $j=0$  și  $l=1$ . Considerând  $N=4$ , rezultă:

$$wal(1,r) = (-1) \cdot [wal(0,2r) + (-1) \cdot wal(0,-4+2r)]$$

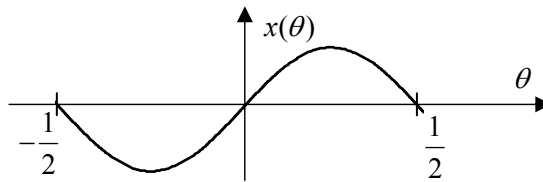
Construcția funcției este utilizată în fig. 2.25.



**Fig. 2.25** Construcția funcției  $wal(1,r)$

*Aplicația 2.4:*

Să se efectueze analiza Fourier-Walsh a semnalului  $x(t) = \sin(\omega_0 t)$ ,  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ , considerând numai primele 6 funcții Walsh.



**Fig. 2.26** Semnal sinusoidal

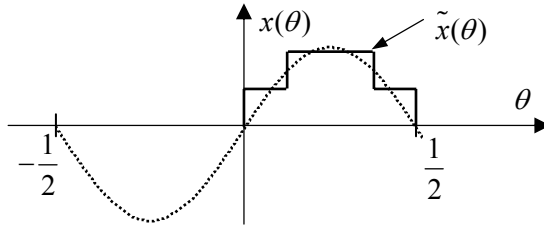
Se face schimbarea de variabilă:  $\theta = t/T$ ; rezultă  $x(\theta) = \sin(2\pi\theta)$  (fig. 2.26).

Se calculează coeficienții  $a_i$ ,  $i=0,1,\dots,5$ , din relația (2.41), conform expresiilor (2.42). Deoarece funcția  $x(\theta)$  este impară, rezultă  $a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$ . În continuare:

$$a_1 = \int_{-1/2}^{1/2} x(\theta) \cdot wal(1,\theta) d\theta = 2 \cdot \int_0^{1/2} \sin(2\pi\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} = 0.636$$

$$a_3 = \int_{-1/2}^{1/2} x(\theta) \cdot \text{wal}(3, \theta) d\theta = 0$$

$$a_5 = 4 \cdot \int_0^{1/8} \sin(2\pi\theta) d\theta - 2 \cdot \int_{1/8}^{3/8} \sin(2\pi\theta) d\theta$$



**Fig. 2.27** Aproximarea lui  $x(\theta)$  prin  $\tilde{x}(\theta)$  în analiza Fourier - Walsh

În ultima relație de mai sus, calculăm fiecare termen:

$$\int_0^{1/8} \sin(2\pi\theta) d\theta = -\frac{1}{2\pi} \cdot \cos(2\pi\theta) \Big|_0^{1/8} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right)$$

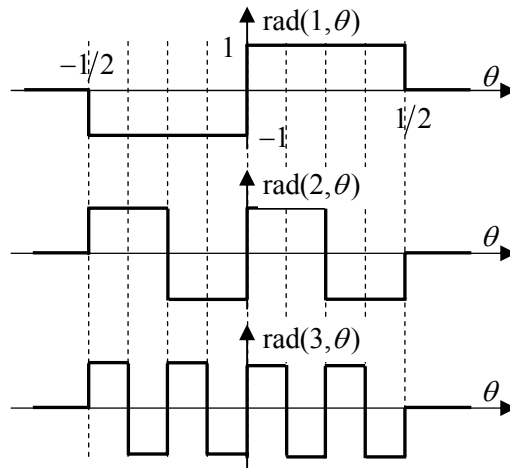
$$\int_{1/8}^{3/8} \sin(2\pi\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \cos(2\pi\theta) \Big|_{1/8}^{3/8} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se obține:

$$a_5 = \frac{4}{\pi} \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -0.265$$

Deci, semnalul  $x(\theta)$  se aproximează (vezi fig. 2.27) prin expresia:

$$\tilde{x}(\theta) = a_1 \cdot \text{wal}(1, \theta) + a_5 \cdot \text{wal}(5, \theta)$$



**Fig. 2.28** Funcții Rademacher

### 2.3.2. Analiza Fourier - Rademacher

Funcțiile Rademacher se generează cu relația:

$$(2.50) \quad \text{rad}(i, \theta) = \text{sign} \left[ \sin \left( 2^i \pi \theta \right) \right],$$

unde  $\theta \in [-1/2, 1/2]$  este timpul normat.

Primele 3 funcții Rademacher sunt ilustrate în fig. 2.28. Din relația de definiție (2.50), se constată că toate funcțiile sunt impare, deci ele nu formează un sistem *complet* de funcții ortogonale. În consecință, ele pot fi utilizate numai pentru modelarea semnalelor cu simetrie impară.

### 2.3.3. Analiza Fourier - Hadamard

Funcțiile ortogonale Hadamard se generează cu relația:

$$(2.51) \quad \text{had}(i, \theta) = \begin{cases} \text{sign} \left[ \cos \left( 2^k \pi \theta \right) \right]; & k = 0, 1, 2, \dots; i = 2k \\ (-1)^{k+1} \cdot \text{sign} \left[ \sin \left( 2^{k+1} \pi \theta \right) \right]; & k = 0, 1, 2, \dots; i = 2k + 1 \end{cases}$$

unde  $\theta$  este timpul normat. Ele formează un sistem *complet* de funcții ortogonale, ca și funcțiile Walsh.

În fig. 2.29 sunt ilustrate primele 5 funcții Hadamard.

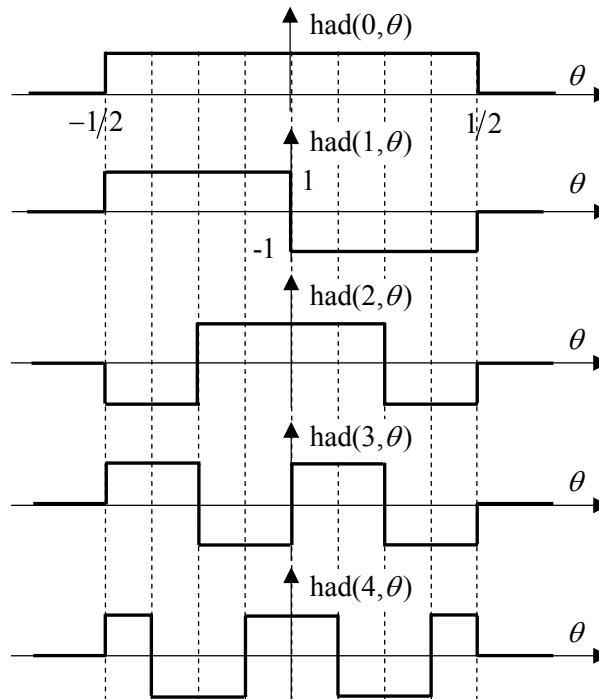


Fig. 2.29 Funcții Hadamard

### 2.3.4. Analiza Fourier - Haar

Sistemul de funcții ortogonale Haar  $\{\text{har}(i, \theta)\}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  este definit prin relațiile:

$$\begin{cases} \text{har}(0, \theta) = \text{wal}(0, \theta) \\ \text{har}(1, \theta) = \text{wal}(1, \theta) \end{cases}$$

$$(2.52) \quad \text{har}(2^p + m, \theta) = \begin{cases} \sqrt{2^p} & \text{pentru } \frac{m}{2^p} \leq \theta < \frac{m+0.5}{2^p} \\ -\sqrt{2^p} & \text{pentru } \frac{m+0.5}{2^p} \leq \theta < \frac{m+1}{2^p} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases},$$

unde  $p = 0, 1, 2, \dots$  și  $m = 0, 1, 2, \dots, 2^p - 1$ .

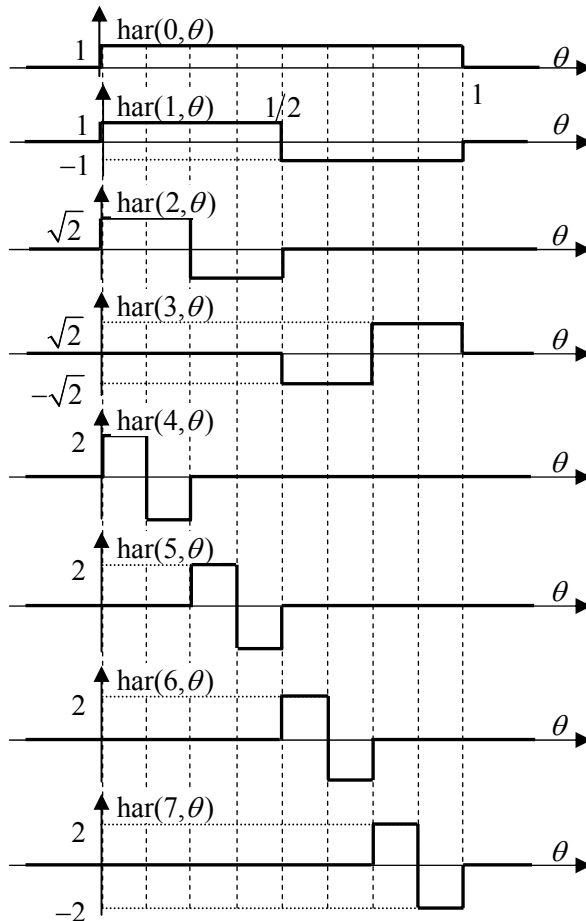


Fig. 2.30 Funcții Haar

Notând prin  $k = p$  gradul funcției și prin  $j = m + 1$  ordinul funcției ( $j = 1, 2, \dots, 2^k$ ), relația (2.52) se mai poate scrie ca în ecuația de mai jos:

$$(2.53) \quad \text{har}(k, j, \theta) = \begin{cases} \sqrt{2^k} & \text{pentru } \frac{j-1}{2^k} \leq \theta < \frac{j-0.5}{2^k} \\ -\sqrt{2^k} & \text{pentru } \frac{j-0.5}{2^k} \leq \theta < \frac{j}{2^k} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Norma funcțiilor Haar, exprimate în raport cu timpul normat, este unitară. Modelul Fourier – Haar al unui semnal  $u(t)$  este:

$$(2.54) \quad u(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot \text{har}(i, \theta),$$

unde  $a_i = \int_0^1 u(\theta) \cdot \text{har}(i, \theta) d\theta$ .

Reprezentarea grafică a primelor 8 funcții Haar este dată în fig. 2.30.

#### 2.4. Analiza polinomială a semnalelor periodice

În SFG, sistemul de funcții utilizat la modelarea semnalului  $u(t)$  se deduce pornind de la un set de funcții polinomiale, de forma  $\{P_i(t)\}_{i=1,2,\dots}$ . Dacă acestea satisfac relația:

$$(2.55) \quad \int_T \rho(t) P_i(t) P_j(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{pentru } i \neq j \\ C_i^2, & \text{pentru } i = j \end{cases}$$

atunci polinoamele se numesc ortogonale în raport cu funcția de ponderare  $\rho(t)$ . Dacă relația (2.55) este adevărată atunci sistemul de funcții:  $\{\varphi_i(t)\}_{i=1,2,\dots}$ , în care  $\varphi_i(t) = \sqrt{\rho(t)} \cdot P_i(t)$ , este un sistem de funcții ortogonale și se utilizează efectiv în SFG. Parametrii  $a_i$  din SFG se calculează cu relațiile:

$$(2.56) \quad a_i = \frac{1}{C_i^2} \cdot \int_T u(t) \sqrt{\rho(t)} \cdot P_i(t) dt, \quad i = 1, 2, \dots$$

În cele ce urmează sunt prezentate principalele funcții polinomiale utilizate în modelarea semnalelor.

*Polinoamele Legendre.* Aceste polinoame au funcția de ponderare egală cu 1, deci sunt efectiv polinoame ortogonale.

*Polinoamele Laguerre,* cu funcția de ponderare  $\rho(t) = e^{-t}$ ,  $t \in [0; \infty)$ . Ele se generează cu relația recursivă:

$$L_{i+1}(t) = (t - 2i - 1) \cdot L_i(t) - i^2 \cdot L_{i-1}(t)$$

*Polinoamele Hermite*, cu funcția de ponderare  $\rho(t) = e^{-t^2}$ ,  $t \in (-\infty; \infty)$ .  
Ecuția utilizată pentru generarea acestor funcții este:

$$H_{i+1}(t) = 2t \cdot H_i(t) - 2i \cdot H_{i-1}(t)$$

*Polinoamele Cebâșev*, cu funcția de ponderare

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad t \in [-1; +1] \text{ și ecuația recursivă de generare:}$$

$$C_{i+1}(t) = 2t \cdot C_i(t) - C_{i-1}(t)$$

*Observație:*

În principiu, în SFG, putem adopta orice sistem de funcții, cu condiția ca acestea să fie *liniar independente*.

Dacă se adoptă sistemul  $\{f_i(t)\}_{i=1,2,\dots}$  de funcții liniar independente, este oportun ca el să se transforme într-un sistem de funcții  $\{\varphi_i(t)\}$  ortogonale, pentru ca determinarea parametrilor SFG să se facă ușor. Se știe că, dacă este îndeplinită condiția  $\int_T \varphi_i(t) \cdot \varphi_j(t) dt = \delta_{ij}$ , unde  $\delta_{ij}$  este simbolul lui Kronecker, atunci sistemul este ortonormal.

Trecerea de la sistemul inițial de funcții  $\{f_i(t)\}$ , liniar independente, dar neortogonale, la sistemul de funcții ortonormale  $\{\varphi_i(t)\}$ , se face prin **procedura generală Gram-Schmidt de ortogonalizare**.

O prezentare elementară a acestei proceduri este dată în cele ce urmează:

- Se consideră  $\varphi_1(t)$  definită ca:  $\varphi_1(t) = a_1 \cdot f_1(t)$ , și se impune condiția ca norma funcției  $\varphi_1(t)$  să fie unitară:

$$\langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle = 1 \Leftrightarrow \int_T \varphi_1^2(t) dt = 1,$$

adică:

$$a_1^2 \cdot \int_T f_1^2(t) dt = 1,$$

de unde se obține  $a_1$ .

- Utilizând  $f_2(t)$  și  $f_1(t)$ , se definește  $\varphi_2(t)$ :

$$\varphi_2(t) = a_2 \cdot [f_1(t) + a_3 \cdot f_2(t)]$$

Din condiția  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = 0$  rezultă  $a_3$ , iar din  $\langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle = 1$  se obține  $a_2$ .

- Funcția  $\varphi_3(t)$  se definește sub forma:

$$\varphi_3(t) = a_4 \cdot [f_1(t) + a_5 \cdot f_2(t) + a_6 \cdot f_3(t)]$$

Condițiile  $\langle \varphi_1, \varphi_3 \rangle = 0$  și  $\langle \varphi_2, \varphi_3 \rangle = 0$  se folosesc pentru determinarea parametrilor  $a_5$  și  $a_6$ , iar pentru determinarea lui  $a_4$  se folosește condiția  $\langle \varphi_3, \varphi_3 \rangle = 1$ .

- Procedura **se repetă** până când sunt implicate toate funcțiile din sistemul inițial,  $\{f_i(t)\}$ .

Dintre funcțiile inițiale,  $\{f_i(t)\}_{i=1,2,\dots}$ , cel mai des apelate în modelarea semnalelor, făcând obiectul operației preliminare de ortogonalizare, sunt funcțiile exponențiale,  $f_i(t) = e^{-\alpha_i t}$ , cu valori impuse pentru  $\alpha_i$ .



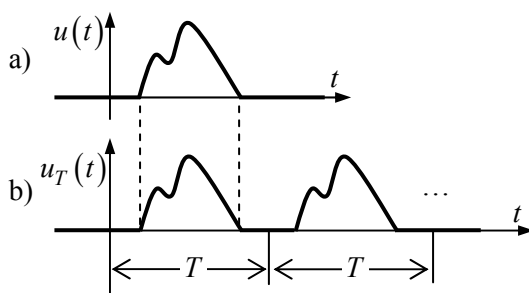


## Capitolul 3

### MODELAREA SEMNALELOR NEPERIODICE

#### 3.1. Analiza spectrală a semnalelor utilizând transformata Fourier

Se caută modelul unui semnal neperiodic oarecare,  $u(t)$ , de modul integrabil (fig. 3.1, a)). Pentru aceasta se utilizează un alt semnal, periodic, notat prin  $u_T(t)$ , care într-o perioadă  $T$  posedă forma semnalului  $u(t)$  (vezi fig. 3.2, b)).



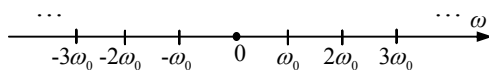
**Fig. 3.1** Semnal periodic obținut dintr-un semnal neperiodic

Să modelăm semnalul periodic  $u_T(t)$  prin SFC:

$$(3.1) \quad u_T(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i e^{ji\omega_0 t}$$

și, deoarece în perioada  $T$  avem  $u(t) = u_T(t)$ ,

$$(3.2) \quad \underline{A}_i = \frac{1}{T} \int_T u_T(t) e^{-ji\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int u(t) e^{-ji\omega_0 t} dt$$



**Fig. 3.2** Pulsațiile discrete din SFC

Înlocuind (3.1) în (3.2), se obține  $u_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{T} \int u(t) e^{-ji\omega_0 t} dt \right] \cdot e^{ji\omega_0 t}$ ,

sau:

$$(3.3) \quad u_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ \int u(t) e^{-ji\omega_0 t} dt \right] \cdot e^{ji\omega_0 t} \omega_0,$$

cu  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Parametrii  $A_i$  ai SFC sunt asociați pulsațiilor  $i\omega_0$  (fig. 3.2).

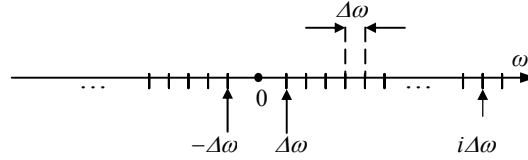


Fig. 3.3 Pulsațiile discrete pentru o perioadă  $T$  foarte mare

Să considerăm acum o creștere importantă a perioadei  $T$ . Să notăm pulsația – care devine foarte mică – prin  $\Delta\omega$ , deci  $\omega_0 = \Delta\omega$  (fig. 3.3). Relația (3.3) devine:

$$(3.4) \quad u_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ \int_T u(t) e^{-ji\Delta\omega t} dt \right] \cdot e^{ji\Delta\omega t} \cdot \Delta\omega$$

În continuare se admite că perioada  $T$ , în care se încadrează semnalul dat inițial, tinde spre infinit, prin transferarea spre  $-\infty$  a limitei din stânga a perioadei și spre  $\infty$  a limitei din dreapta. Dacă  $T \rightarrow \infty$ , se obține:

$$\begin{aligned} u_T(t) &\rightarrow u(t); \Sigma \rightarrow \int \\ \Delta\omega &\rightarrow d\omega; \int_T (\cdot) dt \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} (\cdot) dt \\ i\Delta\omega &\rightarrow \omega \end{aligned}$$

deci:

$$(3.5) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} u_T(t) = u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right] \cdot e^{j\omega t} d\omega$$

Paranteza din partea dreaptă a relației (3.5) este transformata Fourier a semnalului  $u(t)$ , adică:

$$(3.6) \quad U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Transformata Fourier reprezintă modelul matematic al semnalului  $u(t)$ . Această transformată, numită **funcție spectrală** sau **caracteristică spectrală a semnalului**, există și pentru frecvențe negative, deci pentru tot domeniul de frecvențe  $(-\infty, \infty)$ . Semnalul  $u(t)$  se exprimă în funcție de  $U(\omega)$  prin transformata Fourier **inversă**:

$$(3.7) \quad u(t) = \mathcal{F}^{-1}\{U(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Funcția complexă  $U(\omega)$  se poate exprima prin următoarea relație:

$$U(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)(\cos\omega t - j\sin\omega t) dt = A(\omega) - jB(\omega),$$

unde  $A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cos\omega t dt$ , iar  $B(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)\sin\omega t dt$ .

În concluzie, se obține:

$$(3.8) \quad U(\omega) = |U(\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

$$\text{cu: } \begin{cases} |U(\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)} \\ \varphi(\omega) = \arg U(\omega) = -\arctg \frac{B(\omega)}{A(\omega)} \end{cases}$$

Funcțiile  $A(\omega)$  și  $|U(\omega)|$  sunt pare, iar funcțiile  $B(\omega)$  și  $\varphi(\omega)$  sunt impare.

### 3.2. Semnificația fizică a funcțiilor spectrale

Pornind de la relația (3.4), în ipoteza că perioada  $T$  este foarte mare și intervalul de integrare nu este infinit, putem admite:

$$\int_T u(t)e^{-ji\Delta\omega t} dt \cong U(i\Delta\omega)$$

În consecință:

$$(3.9) \quad u(t) \approx u_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} [U(i\Delta\omega) \cdot \Delta\omega] \cdot e^{ji\Delta\omega t}$$

Pentru semnalul  $u_T(t)$ , SFC este:

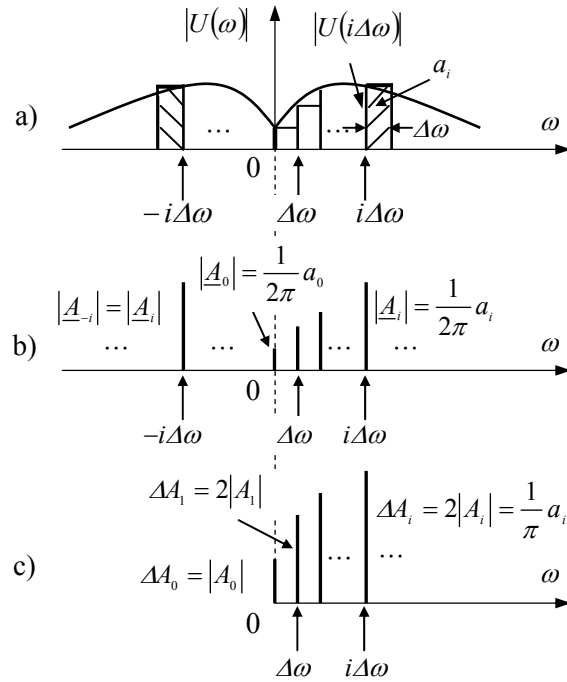
$$(3.10) \quad u_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i e^{ji\Delta\omega t},$$

unde  $\Delta\omega \equiv \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ . Conform cu (3.9) și (3.10), rezultă:

$$(3.11) \quad \underline{A}_i = \frac{1}{2\pi} [U(i\Delta\omega) \cdot \Delta\omega]$$

Fie o formă oarecare a funcției spectrale  $|U(\omega)|$  (fig. 3.4, a)). Dacă se discretizează axa frecvențelor  $\omega$  cu un pas  $\Delta\omega$ , se observă că produsul  $|U(i\Delta\omega)| \cdot \Delta\omega$  reprezintă aria  $a_i$ , hașurată pe fig. 3.5, a), adică:

$$(3.12) \quad a_i = |U(i\Delta\omega)| \cdot \Delta\omega$$



**Fig. 3.4** Procedul de discretizare a unei funcții spectrale

Pornind de la relațiile (3.11) și (3.12), se obține:

$$(3.13) \quad |A_i| = \frac{1}{2\pi} |U(i\Delta\omega)| \cdot \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} a_i$$

Această relație dă legătura între caracteristica spectrală  $|U(i\Delta\omega)|$  și spectrul de amplitudini al SFC (fig. 3.4, b)). Pentru modelele spectrale, trecerea  $u(t) \rightarrow u_r(t)$  corespunde trecerii  $|U(i\omega)| \rightarrow \{|A_i|\}$ ,  $i = -\infty, \dots, +\infty$ , unde  $|A_i|$  sunt date de relația (3.13). Fiecărui interval discret  $[i\Delta\omega, (i+1)\Delta\omega]$  îi corespunde o armonică elementară având amplitudinea (fig. 3.4, c)):

$$\Delta A_i = 2 \cdot |A_i| \cdot \frac{1}{\pi} a_i = \frac{1}{\pi} \cdot |U(i\Delta\omega)| \cdot \Delta\omega$$

Se obține:

$$(3.14) \quad |U(i\Delta\omega)| = \pi \frac{\Delta A_i}{\Delta\omega}$$

Deci mărimea  $|U(i\Delta\omega)|$  este proporțională cu *densitatea de amplitudini a armonicilor*,  $\frac{\Delta A_i}{\Delta\omega}$ . Dacă se trece la mărimi infinitezimale, atunci înlocuim

$i\Delta\omega$  prin  $\omega$  iar  $\frac{\Delta A}{\Delta\omega}$  prin  $\frac{dA}{d\omega}$  și rezultă  $|U(\omega)| = \pi \frac{dA}{d\omega}$ . Cele prezentate justifică utilizarea următoarelor denumiri: *funcție a densității spectrale*, pentru  $U(\omega)$ , și *densitate spectrală de amplitudini*, pentru  $|U(\omega)|$ .

Fie  $u(t) = \Delta(t)$  impulsul real de arie unitară (fig. 3.5). Să se calculeze funcția spectrală a acestui semnal.

Funcția spectrală este transformata Fourier a semnalului:

$$(3.15) \quad U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\tau} e^{-j\omega t} dt = \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right),$$

deci funcția posedă forma dată în fig. 3.6.

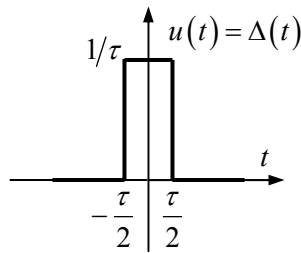


Fig. 3.5 Impuls de arie unitară

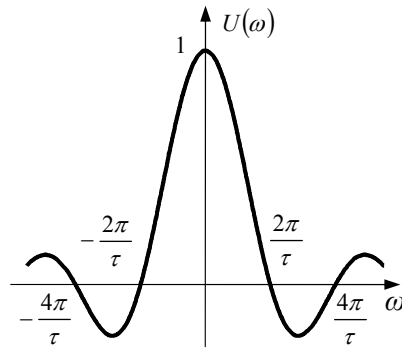


Fig. 3.6 Funcția spectrală a impulsului

Să considerăm acum un tren de impulsuri unitare cu  $T \gg \tau$ , notat cu  $x(t)$  (fig. 2.15). Să notăm  $u_T(t) \equiv x(t)$ , cu  $\lim_{T \rightarrow \infty} u_T(t) = u(t)$ , și  $\omega_0 = \Delta\omega = 2\pi/T$  frecvența foarte mică a semnalului periodic  $u_T(t) = x(t)$ .

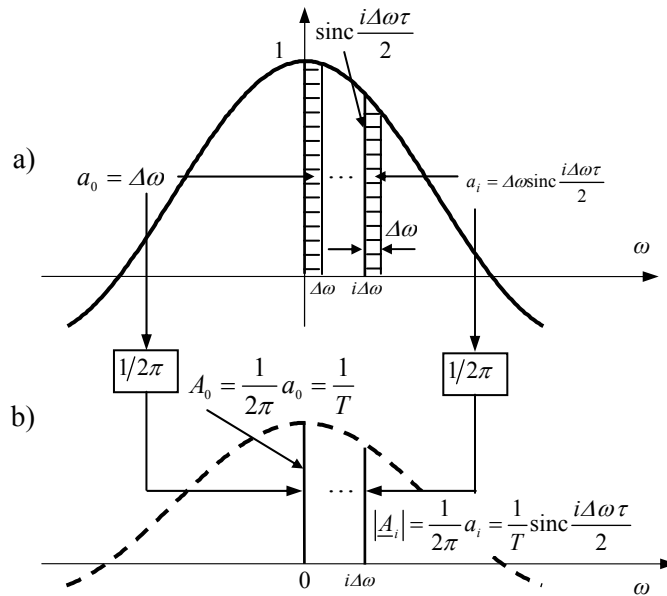
În fig. 3.7, a) și b), se ilustrează procedeul de discretizare a funcției spectrale prezentate mai sus.

**Se observă că, prin discretizarea funcției spectrale  $U(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$  a impulsului  $u(t)$  (fig. 3.7, a)), se obține spectrul semnalului periodic  $u_T(t)$  (fig. 3.7, b)).**

**Distribuția spectrală a energiei semnalului.** Fie  $u(t)$  un semnal în tensiune. Mărimea  $u^2(t)$  este puterea pe o rezistență unitară, iar:

$$(3.16) \quad W = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt$$

este energia semnalului.



**Fig. 3.7** Discretizarea funcției spectrale (3.15)

Vom scrie integrandul din (3.16) sub forma  $u^2(t) = u(t) \cdot u(t)$ , iar un factor  $u(t)$  se explicitează în raport cu  $U(\omega)$ , utilizând relația (3.7).

$$\begin{aligned}
 (3.17) \quad W &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot u(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ u(t) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \right] dt = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{j\omega t} dt \right] \cdot U(\omega) d\omega
 \end{aligned}$$

Dar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{j\omega t} dt = U(-\omega),$$

în concluzie:

$$(3.18) \quad W = \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) \cdot U(-\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |U(\omega)|^2 d\omega$$

Întrucât  $|U(\omega)|$  este o funcție pară, rezultă că energia semnalului este:

$$(3.19) \quad W = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} |U(\omega)|^2 d\omega,$$

deci funcția  $|U(\omega)|^2 = \pi \frac{dW}{d\omega}$  este proporțională cu densitatea energiei pe axa pulsațiilor  $\omega$ .

În mod similar se poate obține un rezultat mai general (teorema lui Parseval), care include – ca un caz particular – și relația (3.18):

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot Y(-\omega) d\omega,$$

unde  $X(\omega)$  și  $Y(\omega)$  sunt transformatele Fourier ale semnalelor  $x(t)$ , respectiv  $y(t)$ .

### 3.3. Proprietățile funcțiilor spectrale

Proprietățile funcțiilor spectrale se confundă cu proprietățile/teoremele transformatei Fourier.

*Proprietatea liniarității*

Fie semnalele  $u_i(t)$ ,  $i=1,2,\dots$  cu funcțiile spectrale  $U_i(\omega)$ . Atunci:

$$(3.20) \quad \mathcal{F} \left\{ \sum_i c_i u_i(t) \right\} = \sum_i c_i U_i(\omega); \quad \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_i c_i U_i(\omega) \right\} = \sum_i c_i u_i(t)$$

*Teorema derivării în timp*

Dacă semnalul  $u(t)$  are funcția spectrală  $U(\omega)$ , atunci:

$$(3.21) \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{du(t)}{dt} \right\} = j\omega U(\omega)$$

*Teorema integrării în timp*

Dacă semnalul  $u(t)$  are funcția spectrală  $U(\omega)$ , atunci integrala lui în timp,

$\int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$ , are funcția spectrală:

$$(3.22) \quad \mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \right\} = \frac{U(\omega)}{j\omega}$$

*Proprietatea parității*

Dacă semnalul este par, funcția spectrală este reală.

*Proprietatea simetriei*

Fie  $U(\omega)$  transformata Fourier a unui semnal  $u(t)$ . Dacă se înlocuiește  $\omega$  prin  $t$  se obține funcția  $U(t)$ . Transformata Fourier a acestei funcții este:

$$\mathcal{F}\{U(t)\} = \mathcal{F} \left\{ 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} U(t) \right\} = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt$$

Dacă în expresia (3.7) a transformatei Fourier inverse se substituie variabila  $\omega$  prin  $t$ , se obține:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(t) e^{-j\omega t} dt = u(-\omega)$$



Rezultă:

$$(3.23) \quad \mathcal{F}\{U(t)\} = 2\pi u(-\omega)$$

*Teorema schimbării de scară*

Fie semnalul  $u(t)$  cu funcția spectrală  $U(\omega)$ . Atunci funcția spectrală a semnalului cu scara timpului modificată se obține după cum urmează:

$$u\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\infty} u\left(\frac{t}{a}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt = a \cdot \int_{-\infty}^{\infty} u\left(\frac{t}{a}\right) \cdot e^{-ja\omega \frac{t}{a}} d\left(\frac{t}{a}\right) = a \cdot U(a\omega)$$

De asemenea:

$$(3.24) \quad \mathcal{F}\{u(at)\} = \frac{1}{|a|} \cdot U\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Deci, o compresie a scării timpului unui semnal antrenează două efecte:

- „extensia spectrului”, adică extinderea domeniului spectral al acestuia ( $\omega \rightarrow a \cdot \omega$ );
- creșterea de  $a$  ori a densității spectrale de amplitudine.

Prin urmare, dacă un semnal avea inițial scara timpului de ordinul milisecundelor și se trece apoi la scara de microsecunde (păstrându-i forma), scara frecvențelor se schimbă de la kilohertzi la megahertzi, iar densitatea spectrală de amplitudini crește de 1000 ori.

*Teorema întârzierii*

Fie  $u_i(t) = u(t - \tau)$  semnalul întârziat cu timpul  $\tau$ . Dacă  $\mathcal{F}\{u(t)\} = U(\omega)$ , atunci:

$$\mathcal{F}\{u_i(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(\eta) e^{-j\omega(\eta + \tau)} d\eta$$

Deci:

$$(3.25) \quad \mathcal{F}\{u_i(t)\} = U_i(\omega) = U(\omega) \cdot e^{-j\omega\tau}$$

Întârzierea nu afectează funcția densității de amplitudine, ci numai caracteristica de fază.

$$|U_i(\omega)| = |U(\omega)|$$

$$(3.26) \quad \arg(U_i(\omega)) = \arg(U(\omega)) - \omega\tau = \varphi(\omega) - \omega\tau$$

*Teorema deplasării spectrelor*

Termenul de „deplasare a spectrelor” se referă la deplasarea caracteristicilor spectrale pe axa pulsației,  $\omega$ .

Fie  $U(\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$  și calculăm funcția spectrală pentru  $u(t) \cdot e^{j\omega_0 t}$ :

$$\mathcal{F}\{u(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{j\omega_0 t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \cdot e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = U(\omega - \omega_0)$$

$$(3.27) \quad \mathcal{F}\{u(t) \cdot e^{j\omega_0 t}\} = U(\omega - \omega_0)$$

Deci caracteristica spectrală  $U(\omega)$  este „deplasată” în jurul pulsației  $\omega_0$ . Această proprietate este utilizată pentru modelarea semnalelor modulate. O procedură uzuală de modulare a unui semnal  $u(t)$  constă în înmulțirea acestuia cu un semnal cosinusoidal cu pulsația  $\omega_0$ , de valoare mare în raport cu domeniul spectral al funcției  $U(\omega)$ .

Funcția spectrală a produsului  $u(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$  se exprimă ținând cont de egalitatea  $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \cdot [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}]$  și de teorema deplasării spectrelor.

$$(3.28) \quad u_{\text{mod}}(t) = u(t) \cdot \cos(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2} \cdot \{U(\omega - \omega_0) + U(\omega + \omega_0)\}$$

În fig. 3.8, a) și b) sunt reprezentate schematic modulele funcțiilor spectrale ale semnalelor  $u(t)$  și  $u_{\text{mod}}(t)$ .

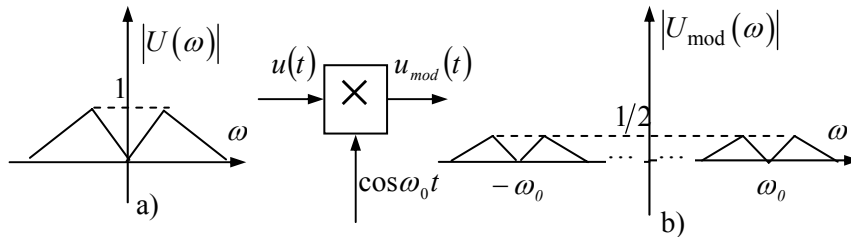


Fig. 3.8 Funcția spectrală a unui semnal modulat

### 3.4. Utilizarea distribuției $\delta(t)$ în analiza semnalelor

#### 3.4.1. Definiția distribuției delta

Fie  $x(t)$  o funcție și

$$(3.29) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi(t) dt = f(x)$$

funcționala prin care funcției  $x(t)$  îi corespunde valoarea  $f(x)$ . În (3.29),  $\varphi(t)$  se numește **distribuție** și mapează funcția  $x(t)$  în  $f(x)$ .

În modelarea semnalelor se utilizează frecvent două distribuții:

- **distribuția delta** (Dirac),  $\delta(t)$ , prin care unei funcții  $x(t)$  îi corespunde valoarea  $x(0)$ .

$$(3.30) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)dt = x(0)$$

• **distribuția treaptă unitară** (Heaviside),  $u(t)$ , prin care funcției  $x(t)$  îi corespunde valoarea  $\int_0^{\infty} x(t)dt$ :

$$(3.31) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot u(t)dt = \int_0^{\infty} x(t)dt$$

Între cele două distribuții există relația  $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ . Într-adevăr, substituind în (3.30) pe  $\delta(t)$  prin  $\frac{du(t)}{dt}$  se obține:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{du(t)}{dt} dt = x(t) \cdot u(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x'(t) \cdot u(t) dt$$

Întrucât  $u(\infty) = 1$ ,  $u(-\infty) = 0$  și  $u(t)$  are valoarea unitară pentru  $t \geq 1$ , rezultă:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \frac{du(t)}{dt} dt = x(\infty) - \int_0^{\infty} x'(t) dt = x(\infty) - x(t) \Big|_0^{\infty} = x(0)$$

### 3.4.2. Proprietățile distribuției delta

*Proprietatea de sondare în timp*

$$(3.32) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

Această proprietate, ca și cea care urmează, decurge din relația de definiție (3.30):

$$(3.33) \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(u+t_0)\delta(u)du = x(t_0)$$

*Proprietatea de sondare în frecvență*

$$(3.34) \quad \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\delta(\omega-\omega_0)d\omega = U(\omega_0)$$

Deoarece  $\delta(t-t_0) = 0$  pentru  $t \neq t_0$ , rezultă:

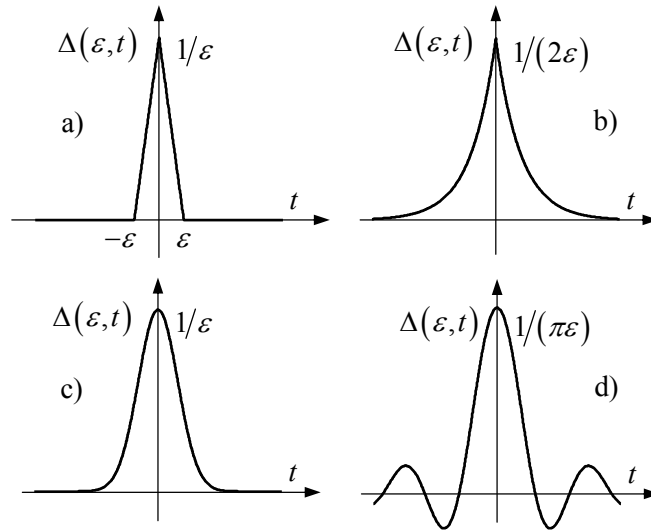
$$(3.35) \quad x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

Transformata Fourier a distribuției  $\delta$

$$(3.36) \quad \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \Delta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \cdot 0} = 1$$

Caracteristica spectrală a unui impuls este constantă pentru toate frecvențele. Transformata Fourier inversă pentru  $\Delta(\omega) = 1$  este  $\delta(t)$ , conform cu (3.36),  $\mathcal{F}^{-1}\{\Delta(\omega)\} = \delta(t)$ , sau:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$$



**Fig. 3.9** Funcții  $\Delta(\varepsilon, t)$  care pot genera, prin trecere la limită, distribuția  $\delta(t)$

Distribuția  $\delta(t)$  se poate obține prin trecerea la limită a unor funcții depinzând de un parametru  $\varepsilon$ . O asemenea funcție este reprezentată în fig. 3.5, în care  $\varepsilon = \tau$ . Alte funcții  $\Delta(\varepsilon, t)$  care pot genera distribuția  $\delta(t)$  prin trecere la limită

$$(3.37) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta(\varepsilon, t) = \delta(t)$$

sunt (fig. 3.9):

$$\Delta(\varepsilon, t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(1 - \frac{|t|}{\varepsilon}\right), & |t| < \varepsilon \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\Delta(\varepsilon, t) = \frac{1}{2\varepsilon} \cdot e^{-|t|/\varepsilon}$$

$$\Delta(\varepsilon, t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot e^{-\pi^2 t^2 / \varepsilon^2}$$

$$\Delta(\varepsilon, t) = \frac{1}{\pi \varepsilon} \cdot \text{sinc}(t/\varepsilon)$$

### 3.4.3. Determinarea unor caracteristici spectrale utilizând distribuția $\delta(t)$

O clasă largă de funcții (semnale) nu îndeplinesc condițiile de existență pentru transformata Fourier. Între acestea, menționăm: semnalul constant în timp, funcțiile trigonometrice, semnalul treaptă, semnalele periodice, etc. Chiar dacă nu există transformate Fourier *de tip funcție* pentru aceste semnale, se pot determina transformate Fourier *de tip distribuție*. Utilizând distribuția delta vom calcula caracteristicile spectrale ale acestor semnale, pentru care abordarea clasică a transformatei Fourier este inadecvată.

*Caracteristica spectrală a unei constante*

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega = e^{j0} = 1,$$

Deci caracteristica spectrală a constantei egală cu 1 este:

$$(3.38) \quad \mathcal{F}\{1\} = 2\pi\delta(\omega),$$

iar pentru o constantă  $A$  oarecare:

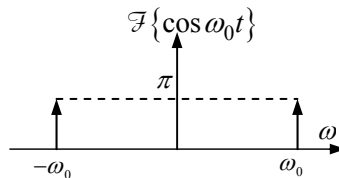
$$(3.39) \quad \mathcal{F}\{A\} = 2\pi A \cdot \delta(\omega)$$

Interpretarea relației (3.39) este simplă: densitatea spectrală este infinită la  $\omega = 0$ , pentru un semnal constant (tensiune continuă).

*Caracteristicile spectrale ale funcțiilor trigonometrice*

Dacă se consideră  $e^{j\omega_0 t} = 1 \cdot e^{j\omega_0 t}$ , se poate calcula  $\mathcal{F}\{1 \cdot e^{j\omega_0 t}\}$ , pornind de la relația (3.38) și de la teorema deplasării în frecvență (3.27):

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = \mathcal{F}\{1 \cdot e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



**Fig. 3.10** Caracteristica spectrală a unui semnal cosinusoidal

În consecință:

$$(3.40) \quad \mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})\right\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$(3.41) \quad \mathcal{F}\{\sin\omega_0 t\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})\right\} = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

*Observație:*

Interpretarea relațiilor de mai sus este următoarea: se consideră  $\cos\omega_0 t$  ca fiind o **armonică de frecvență**  $\omega_0$ ; densitatea de amplitudini la frecvența  $\omega_0$  este evident infinită (fig. 3.10), pentru că amplitudinea armonicii corespunde unei **singure** frecvențe  $\omega_0$  (distribuția de amplitudini este „concentrată” la o singură frecvență:  $\omega_0$ ). Deci prezența impulsurilor la frecvențele  $\omega_0$  și  $(-\omega_0)$  în caracteristica spectrală  $\mathcal{F}\{\cos\omega_0 t\}$  este justificată. Trecerea de la caracteristica spectrală a semnalului cosinusoidal la spectrul SFA al acestuia se face împărțind la  $\pi$  aria impulsului  $\pi\delta(\omega - \omega_0)$  (fig. 3.4, c)). Întrucât aria acestui impuls este  $\pi$ , se obține valoarea 1 pentru amplitudinea armonicii de pulsație  $\omega_0$ . În mod similar se face trecerea de la caracteristica spectrală a semnalului  $\sin\omega_0 t$  la spectrul SFA. Aici intervine factorul  $1/j$ , care semnifică faza inițială de  $-\pi/2$  a armonicii de amplitudine unitară și pulsație  $\omega_0$  ( $1 \cdot \cos(\omega_0 t - \pi/2) = \sin\omega_0 t$ ).

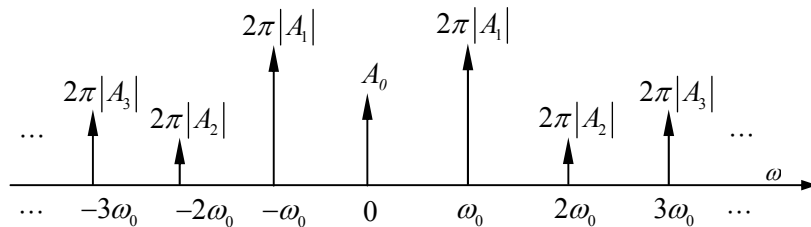
*Caracteristica spectrală a unui semnal periodic*

Dacă  $u(t)$  este un semnal periodic, atunci seria Fourier complexă este dată de relația:

$$u(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i \cdot e^{ji\omega_0 t}$$

În abordarea clasică, funcția  $u(t)$  nu are transformată Fourier, însă vom calcula caracteristica spectrală prin distribuția  $\delta$ :

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i \cdot \mathcal{F}\{e^{ji\omega_0 t}\} = 2\pi \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i \cdot \delta(\omega - i\omega_0)$$



**Fig. 3.11** Caracteristica spectrală (densitatea spectrală de amplitudine) a unui semnal periodic

Semnificația fizică este similară celei din cazul semnalului cosinusoidal: în spectrul semnalului există armonici la frecvențele  $i\omega_0$ . La aceste frecvențe densitățile spectrale sunt infinite, iar forma caracteristicii spectrale a semnalului periodic are alura prezentată în fig. 3.11 (densitatea spectrală de amplitudine).

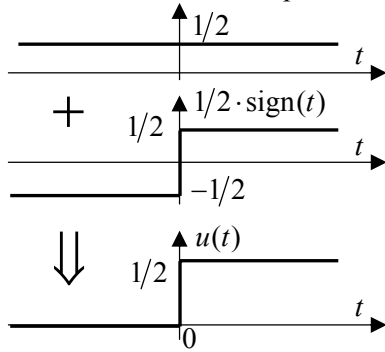
*Caracteristica spectrală a unei trepte unitare*

Fie  $u(t)$  treapta unitară, nulă pentru  $t < 0$  și egală cu 1 pentru  $t \geq 0$ . Acest semnal nu are transformată Fourier, însă îi vom determina caracteristica spectrală cu ajutorul distribuției  $\delta$ .

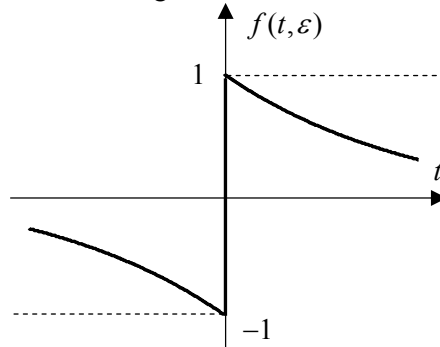
Vom pune semnalul  $u(t)$  sub forma:

$$(3.42) \quad u(t) = 1/2 + 1/2 \cdot \text{sign}(t),$$

însurarea celor două componente fiind ilustrată în fig. 3.12.



**Fig. 3.12** Obținerea treptei unitare prin intermediul relației (3.42)



**Fig. 3.13** Funcția  $f(t, \epsilon)$  definită prin relația (3.43)

Pentru a deduce caracteristica spectrală, se consideră funcția „sign” ca fiind obținută printr-o trecere la limită. Se adoptă funcția  $f$  de două argumente reale,  $t$  și  $\epsilon$ , definită prin:

$$(3.43) \quad f(t, \epsilon) = \begin{cases} -e^{\epsilon t}, & t < 0 \\ e^{-\epsilon t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

pentru care are loc relația:

$$(3.44) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f(t, \epsilon) = \text{sign}(t)$$

Calculăm caracteristica spectrală a funcției de mai sus:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t, \epsilon)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t, \epsilon) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 (-e^{\epsilon t}) \cdot e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\epsilon t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \\ &= -\frac{1}{\epsilon - j\omega} \cdot e^{(\epsilon - j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{1}{-(\epsilon + j\omega)} \cdot e^{-(\epsilon + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon - j\omega} + \frac{1}{\varepsilon + j\omega} = \frac{-\varepsilon - j\omega + \varepsilon - j\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} = -\frac{2j\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

Prin trecere la limită rezultă că:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}\{f(t, \varepsilon)\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( -\frac{2j\omega}{\varepsilon^2 + \omega^2} \right) = -\frac{2j}{\omega} = \frac{2}{j\omega},$$

ceea ce este echivalent, ținând cont de relația (3.44), cu:

$$(3.45) \quad \mathcal{F}\left\{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(t, \varepsilon)\right\} = \mathcal{F}\{\text{sign}(t)\} = \frac{2}{j\omega}$$

Calculând prin distribuția  $\delta$  transformata Fourier a semnalului (3.42), rezultă:

$$\mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} \cdot \text{sign}(t)\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{F}\{\text{sign}(t)\}$$

În continuare se ține cont de relațiile (3.39) și (3.45), rezultând caracteristica spectrală a treptei unitare:

$$(3.46) \quad \mathcal{F}\{u(t)\} = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{j\omega} = \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

#### 3.4.4. Distribuția delta periodică

Distribuția delta periodică este un tren de impulsuri  $\delta(t)$ , reprezentat în fig. 3.14. Ea are expresia:

$$(3.47) \quad \delta_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT)$$

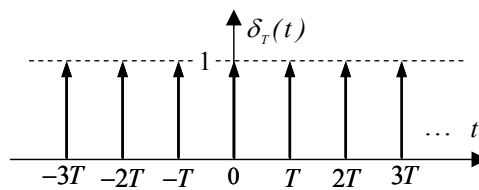


Fig. 3.14 Distribuția delta periodică

Semnalul fiind periodic, se poate calcula seria Fourier complexă a acestuia:

$$(3.48) \quad \delta_T(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i e^{j\omega_0 t},$$

unde:



$$(3.49) \quad \omega_0 = 2\pi/T$$

$$(3.50) \quad \underline{A}_i = \frac{1}{T} \cdot \int_T \delta_T(t) e^{-ji\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-ji\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

Deci:

$$(3.51) \quad \delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{ji\omega_0 t}$$

Calculând transformata Fourier, se obține:

$$(3.52) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}\{\delta_T(t)\} &= \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{ji\omega_0 t}\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - i\omega_0) \\ &= \omega_0 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - i\omega_0) \end{aligned}$$

Se notează:

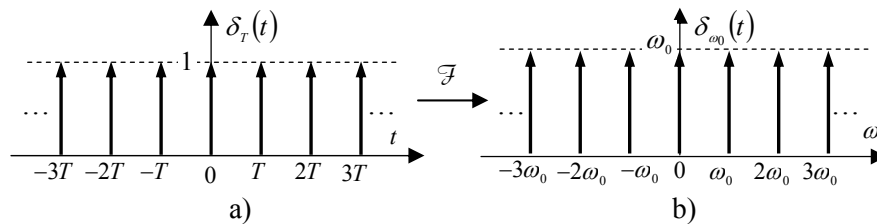
$$(3.53) \quad \delta_{\omega_0}(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - i\omega_0)$$

distribuția delta periodică în domeniul frecvențial (având perioada  $\omega_0$ ). Conform relațiilor (3.52) și (3.53), se obține:

$$(3.54) \quad \mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$$

*Concluzie:*

Caracteristica spectrală a distribuției delta periodice  $\delta_T(t)$  (vezi fig. 3.15, a)) este o distribuție delta periodică,  $\delta_{\omega_0}(\omega)$ , definită în domeniul frecvențial (fig. 3.15, b)).

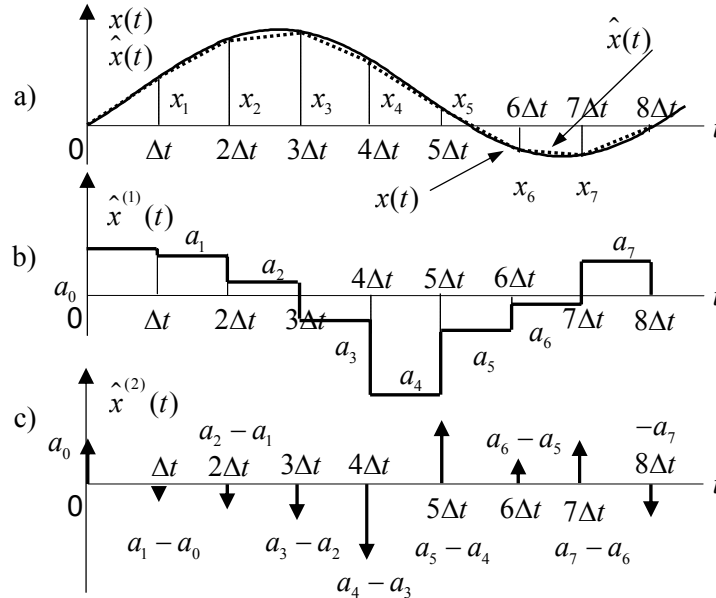


**Fig. 3.15** Distribuția delta periodică a) și caracteristica ei spectrală b)

### 3.4.5. Calculul numeric al caracteristicilor spectrale ale semnalelor utilizând distribuția $\delta$

Fie un semnal  $x(t)$ , dat sub formă grafică (fig. 3.16, a)). Se cere determinarea unei funcții  $\hat{X}(\omega)$  care să aproximeze caracteristica spectrală

$X(\omega)$  a semnalului.



**Fig. 3.16** Prelucrarea semnalului  $x(t)$  pentru determinarea caracteristicii spectrale

Determinarea funcției  $\hat{X}(\omega)$  implică parcurgerea următoarelor etape:

- aproximarea funcției  $x(t)$  printr-o funcție  $\hat{x}(t)$ , liniară pe porțiuni (fig. 3.16, a)). În acest scop se adoptă un pas  $\Delta t$  de discretizare a timpului, astfel încât în fiecare interval de lărgime  $\Delta t$  semnalul  $x(t)$  să fie aproximat printr-o funcție liniară. Evident, cu cât intervalul  $\Delta t$  este mai mic, cu atât aproximarea este mai bună. Fie  $x_i = x(i\Delta t)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N$ , valorile care marchează cele  $N$  intervale de aproximare liniară;

- derivarea semnalului  $\hat{x}(t)$ . Funcția  $\frac{d\hat{x}(t)}{dt}$ , notată prin  $\hat{x}^{(1)}(t)$ , este constantă pe porțiuni, având valorile:

$$a_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

în intervalele  $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$  (fig. 3.16, b);

- calculul derivatei a doua,  $\frac{d^2\hat{x}(t)}{dt^2}$ . Derivata unei variații în treaptă este distribuția  $\delta(t)$  înmulțită cu amplitudinea treptei. În consecință, la timpul discret  $t = i\Delta t$  avem:

$$x^{(2)}(t) \Big|_{t=i\Delta t} = (a_i - a_{i-1})\delta(t), \quad i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

unde  $a_{-1} = 0$  și  $a_N = 0$ .

Transformata Fourier a derivatei a doua,  $x^{(2)}(t)$ , este:

$$\mathcal{F}\{\hat{x}^{(2)}(t)\} = \sum_{i=0}^N (a_i - a_{i-1})e^{j\omega\Delta t}$$

Întrucât  $\hat{x}(t)$  se obține printr-o dublă integrare din  $\hat{x}^{(2)}(t)$ , rezultă (din teorema integrării în timp):

$$(3.55) \quad \hat{X}(\omega) = \left(\frac{1}{j\omega}\right)^2 \cdot \mathcal{F}\{\hat{x}^{(2)}(t)\} = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{i=0}^N (a_i - a_{i-1})e^{j\omega\Delta t}$$

*Aplicația 3.1:*

Fie semnalul  $x(t)$  de formă triunghiulară, reprezentat în fig. 3.17, a). Se cere transformata Fourier a semnalului  $x(t)$ .

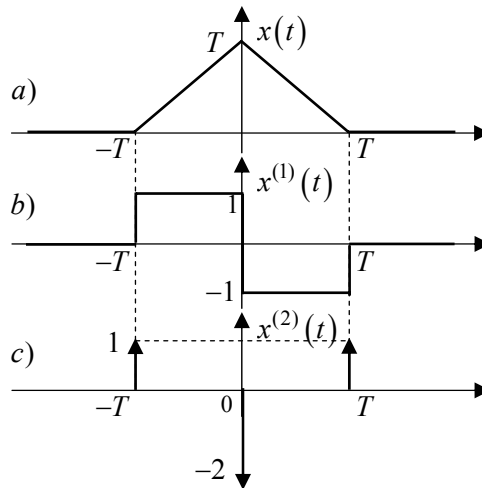
Conform procedurii de mai sus, se derivează semnalul de două ori. Prima derivată,  $\hat{x}^{(1)}(t)$ , este reprezentată în fig. 3.17, b), iar derivata a doua,  $\hat{x}^{(2)}(t)$ ,

în fig. 3.17, c). Transformata Fourier a semnalului  $\hat{x}^{(2)}(t)$  este:

$$\mathcal{F}\{\hat{x}^{(2)}(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T}\delta(t+T) - \frac{2}{T}\delta(t) + \frac{1}{T}\delta(t-T)\right\}$$

sau, aplicând teorema întârzierii/anticipării,

$$\mathcal{F}\{\hat{x}^{(2)}(t)\} = \frac{1}{T} \cdot (e^{j\omega T} - 2 + e^{-j\omega T}) = \frac{1}{T} \cdot \left( e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}} \right)^2$$



**Fig. 3.17** Prelucrarea prin derivare a unui semnal, în vederea determinării caracteristicii spectrale

Utilizând teorema integrării în timp rezultă transformata Fourier a semnalului  $x(t)$ :

$$X(j\omega) = \left(\frac{1}{j\omega}\right)^2 F\{x^{(2)}(t)\} = \left(\frac{1}{j\omega}\right)^2 \frac{1}{T} \left(e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}\right)^2 = T \frac{\left(e^{j\frac{\omega T}{2}} - e^{-j\frac{\omega T}{2}}\right)^2}{(2j)^2 \cdot \left(\frac{\omega T}{2}\right)^2}$$

Prin urmare:

$$(3.56) \quad X(\omega) = T \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

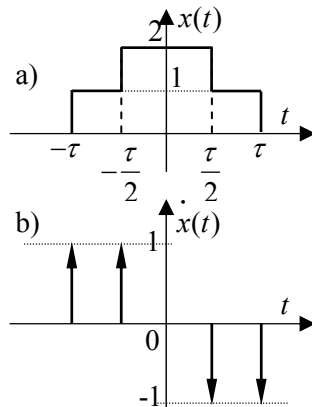
*Aplicația 3.2:*

Să se determine funcția spectrală a semnalului din fig. 3.18, a).

a) *Metoda 1*

Se derivează semnalul dat (fig. 3.18, b)). Prin aplicarea transformatei Fourier asupra derivatei, se obține:

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \cdot e^{j\omega\tau} + 1 \cdot e^{\frac{j\omega\tau}{2}} - 1 \cdot e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - 1 \cdot e^{-j\omega\tau} = \\ &= 2j \left( \frac{e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau}}{2j} + \frac{e^{\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{-\frac{j\omega\tau}{2}}}{2j} \right) = 2j \left( \sin(\omega\tau) + \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right) \end{aligned}$$



**Fig. 3.18** Semnalul  $x(t)$  și derivata lui

Întrucât  $x(t)$  se obține prin integrarea lui  $x^{(1)}(t)$ , din relația (3.21) rezultă:

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega} \cdot \mathcal{F}\{x^{(1)}(t)\} = \frac{2}{\omega} \cdot \left( \sin(\omega\tau) + \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right),$$

relație care se rescrie succesiv:

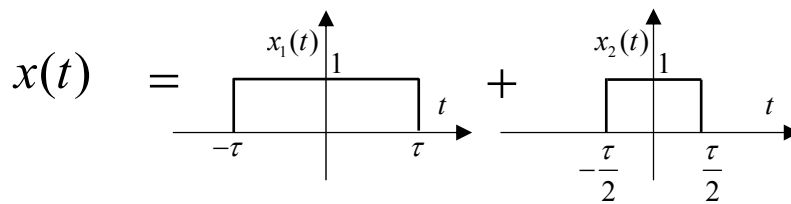
$$X(\omega) = \frac{2}{\omega} \cdot \left( \sin(\omega\tau) + \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right) \cdot \frac{\tau}{\tau} = \tau \cdot \left( \frac{2\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} + \frac{1}{\omega\tau/2} \sin(\omega\tau/2) \right)$$

În concluzie, funcția spectrală a semnalului  $x(t)$  este:

$$X(\omega) = \tau \cdot \left( 2\text{sinc}(\omega\tau) + \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right)$$

b) *Metoda 2*

Se descompune semnalul dat într-o sumă de 2 impulsuri reale, de arii  $2\tau$ , respectiv  $\tau$ , ca în fig. 3.19.



**Fig. 3.19** Descompunerea semnalului  $x(t)$  într-o sumă de impulsuri

Funcțiile spectrale ale acestora sunt cunoscute (vezi aplicația 3.1); folosind proprietatea de liniaritate a transformatei Fourier, se obține același rezultat ca la metoda precedentă:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x_1(t) + x_2(t)\} = 2\tau \cdot \text{sinc}(\omega\tau) + \tau \cdot \text{sinc}(\omega\tau/2)$$

### 3.5. Convoluția semnalelor

Produsul de convoluție a două semnale,  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$ , este o funcție  $x(t)$  definită prin:

$$(3.57) \quad x(t) = x_1(t) \otimes x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau)x_2(\tau) d\tau$$

Convoluția se mai notează  $x_1(t) * x_2(t)$  sau  $(x_1 * x_2)(t)$ .

#### Proprietățile produsului de convoluție

1. *Comutativitatea:*

$$(3.58) \quad x_1(t) \otimes x_2(t) = x_2(t) \otimes x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau) d\tau$$

2. *Transformata Fourier a produsului de convoluție:*

$$(3.59) \quad \mathcal{F}\{x_1(t) \otimes x_2(t)\} = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

**Prin transformata Fourier produsul de convoluție devine un produs algebric al caracteristicilor spectrale.**

Pentru a demonstra relația (3.59), explicităm transformata Fourier a convoluției:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau) d\tau \right] \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Făcând schimbarea de variabilă  $\theta = t - \tau$ , relația de mai sus devine:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\theta) \cdot e^{-j\omega\theta} d\theta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

3. Convoluția unui semnal  $x(t)$  cu distribuția delta este egală cu semnalul  $x(t)$ :

$$(3.60) \quad x(t) \otimes \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$$

Proprietățile de sondare în timp și în frecvență ale distribuției  $\delta$  (vezi relațiile (3.32) și (3.34)) conduc la relațiile mai generale:

$$(3.61) \quad x(t) \otimes \delta(t-t_0) = x(t-t_0); \quad X(\omega) \otimes \delta(\omega-\omega_0) = X(\omega-\omega_0)$$

**Deci convoluția unei funcții cu distribuția  $\delta$  este egală cu funcția respectivă având argumentul distribuției  $\delta$ .**

4. Fiind date semnalele  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$ , avem:

$$(3.62) \quad x_1(t) \otimes x_2(t) = x_1^{(1)}(t) \otimes x_2^{(-1)}(t),$$

unde:

$$x_1^{(1)}(t) = \frac{dx_1(t)}{dt}; \quad x_2^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau$$

Pentru a demonstra relația (3.62), se consideră:

$$\mathcal{F}\{x_1^{(1)}(t)\} = j\omega X_1(\omega), \quad \mathcal{F}\{x_2^{(-1)}(t)\} = \frac{1}{j\omega} X_2(\omega). \text{ Și cum:}$$

$$\mathcal{F}\{x_1^{(1)}(t) \otimes x_2^{(-1)}(t)\} = j\omega X_1(\omega) \frac{1}{j\omega} X_2(\omega) = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega), \text{ iar:}$$

$$\mathcal{F}\{x_1(t) \otimes x_2(t)\} = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega), \text{ atunci:}$$

$$\mathcal{F}\{x_1^{(1)}(t) \otimes x_2^{(-1)}(t)\} = \mathcal{F}\{x_1(t) \otimes x_2(t)\},$$

deci relația (3.62) este demonstrată. Această relație se generalizează în raport cu derivatele/integralele de ordin  $n$ :

$$x_1(t) \otimes x_2(t) = x_1^{(n)}(t) \otimes x_2^{(-n)}(t)$$

5. Dacă se consideră  $x_1(t) = x(t)$  și  $x_2(t) = \delta(t)$ , se obține:

$$x(t) \otimes \delta(t) = x^{(1)}(t) \otimes \delta^{(-1)}(t)$$

Deoarece  $x(t) \otimes \delta(t) = x(t)$  și  $\delta^{(-1)}(t) = u(t)$  (treaptă unitară), rezultă:

$$(3.63) \quad x(t) = x^{(1)}(t) \otimes u(t)$$

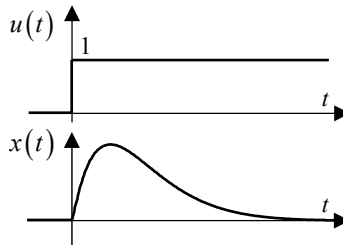
6. Convoluția unui semnal  $x(t)$  cu treapta unitară  $u(t)$  se poate scrie sub forma  $x(t) \otimes u(t) = x^{(-1)}(t) \otimes u^{(1)}(t) = x^{(-1)}(t) \otimes \delta(t)$ , întrucât derivata treptei unitare este distribuția  $\delta(t)$ . Având în vedere relația (3.60), rezultă  $x^{(-1)}(t) \otimes \delta(t) = x^{(-1)}(t)$ , deci:

$$(3.64) \quad x(t) \otimes u(t) = x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

*Aplicația 3.3:*

Fie  $x(t)$  un semnal, reprezentat grafic în fig. 3.20. Se va ilustra în cele ce urmează construcția convoluției semnalului  $x(t)$  cu treapta unitară,  $u(t)$ , în conformitate cu relația:

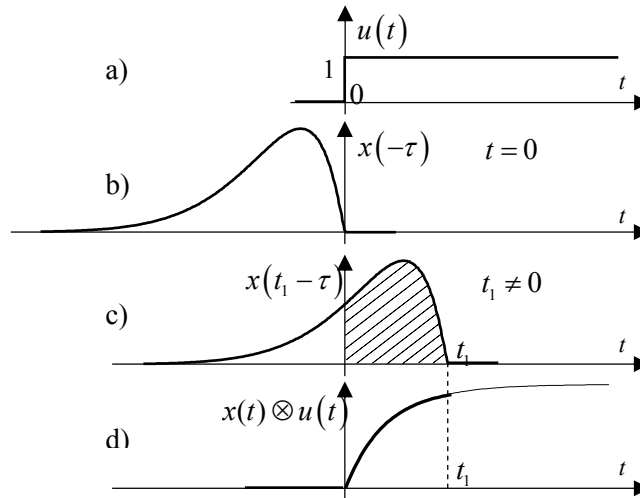
$$(3.65) \quad x(t) \otimes u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \cdot u(\tau) d\tau$$



**Fig. 3.20** Semnalele  $u(t)$  și  $x(t)$  pentru care se determină convoluția

În fig. 3.21 sunt desenate funcțiile care intervin în integrandul relației (3.65), reprezentate în raport cu  $\tau$ , pentru două valori ale timpului  $t$ : pentru  $t = 0$  (fig. 3.21, b)), când produsul  $x(-\tau) \cdot u(\tau)$  este nul, și pentru  $t = t_1 > 0$ , când produsul  $x(t_1 - \tau) \cdot u(\tau)$  este diferit de zero, iar convoluția (adică produsul integrat de la zero la  $t_1$ ) este egală cu aria hașurată din figura 3.19, c).

Se poate admite că graficul funcției  $x(t - \tau)$  este dat de un șablon care, pornind din poziția pentru  $t = 0$  (fig. 3.21, b)), se deplasează spre dreapta până la infinit. Aria cuprinsă în cadranul 1, între curba  $x(t - \tau)$  și abscisă, pentru diversele valori ale timpului  $t$ , reprezintă convoluția  $x(t) \otimes u(t)$ . Se constată că în situația analizată  $x(t) \otimes u(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$ , ceea ce corespunde relației (3.64).



**Fig. 3.21** Construcția grafică a convoluției (3.65)

#### 8. Convoluția caracteristicilor spectrale

Fie  $X_1(\omega)$  și  $X_2(\omega)$  caracteristicile spectrale ale semnalelor  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$ . Convoluția acestor caracteristici spectrale se definește prin relația:

$$X_1(\omega) \otimes X_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(u) \cdot X_2(\omega - u) du = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega - u) \cdot X_2(u) du$$

9. Transformata Fourier inversă a convoluției a două caracteristici spectrale este produsul algebric al semnalelor corespundente, înmulțit cu coeficientul de scară  $2\pi$ .

$$\mathcal{F}^{-1}\{X_1(\omega) \otimes X_2(\omega)\} = 2\pi \cdot x_1(t) \cdot x_2(t)$$

Prin aplicarea transformatei Fourier se obține:

$$(3.66) \quad \mathcal{F}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot X_1(\omega) \otimes X_2(\omega),$$

relație foarte des utilizată în modelarea semnalelor modulate.

Deci, prin transformata Fourier directă, produsul algebric al semnalelor este transformat, până la un coeficient de scară ( $1/(2\pi)$ ) într-un produs de convoluție al caracteristicilor spectrale aferente semnalelor respective.

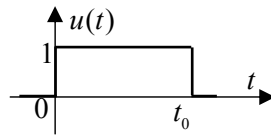
#### Aplicația 3.4:

Să se calculeze  $x(t) = u(t) \otimes u(t)$ , unde  $u(t)$  este reprezentat în fig. 3.22.

Convoluția  $u(t) \otimes u(t)$  este dată de relația:

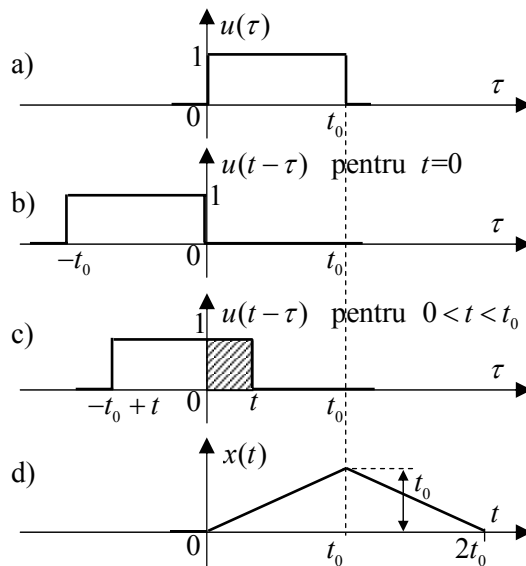
$$x(t) = \int_0^t u(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau$$





**Fig. 3.22** Semnalul  $u(t)$  (aplicația 3.5)

Ea poate fi imaginată ca un proces de suprapunere a semnalului cu varianta întârziată a semnalului  $u(-\tau)$ . Întârzierea variază continuu crescător în intervalul  $[0; 2t_0]$ . În figura 3.23, b) și c), sunt ilustrate două instanțe ale semnalului întârziat, pentru  $t=0$ , respectiv pentru o valoare oarecare a lui  $t$  între  $t_0$  și 0.



**Fig. 3.23** Construcția grafică a convoluției semnalului  $u(t)$  din fig. 3.22 cu el însuși

Pe parcursul acestei variații continue gradul de suprapunere crește liniar de la 0, pentru  $t=0$ , până la suprapunerea maximă (egală cu aria impulsului,  $t_0$ ), (vezi fig. 3.23, d)). După aceea, gradul de suprapunere descrește până la 0, pentru  $t=2t_0$ , deci și valoarea convoluției. Se observă că intervalul pe care produsul de convoluție  $x(t)$  este nenul este dublul lățimii impulsului  $u(t)$ .

### 3.6. Utilizarea transformatei Laplace în modelarea semnalelor

#### 3.6.1. Noțiuni generale

Transformata Laplace se utilizează mai mult în teoria sistemelor decât în teoria semnalelor. Așa cum s-a constatat în capitolele anterioare, în teoria semnalelor se folosește cu precădere transformata Fourier, în accepțiunea clasică sau în abordarea bazată pe utilizarea distribuției  $\delta$ .

Presupunând ca cititorul este bine familiarizat cu proprietățile transformatei Laplace și cu utilizarea acesteia în analiza dinamicii circuitelor electrice, vom reliefa câteva aspecte care marchează diferențele dintre transformata Laplace și transformata Fourier.

Transformata Laplace uzuală este cea *unilaterală*, definită prin relația:

$$(3.67) \quad \mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s = \sigma + j\omega$$

Semnalul (originalul)  $x(t)$  trebuie să fie nul pentru  $t < 0$ . Un asemenea semnal se numește *cauzal* și satisface relația:

$$(3.68) \quad x(t) = x(t) \cdot u(t),$$

unde  $u(t)$  este treapta unitară.

Este știut faptul că transformata Fourier nu impune cerința ca semnalul să fie cauzal, deci, din acest punct de vedere, ea este mai puțin restrictivă.

*Observație:*

Pentru un semnal necauzal se definește transformata Laplace *bilaterală*:

$$(3.69) \quad \mathcal{L}_B\{x(t)\} = X_B(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt,$$

însă acest instrument de modelare este rar utilizat.

O altă condiție impusă semnalului  $x(t)$ , modelat prin transformata Laplace, este să existe o exponențială în raport cu care modulul lui  $x(t)$  nu crește mai rapid:

$$(3.70) \quad |x(t)| < M \cdot e^{ct}$$

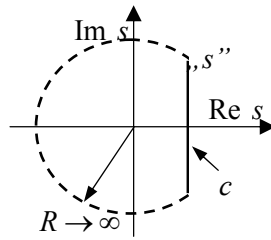
Valoarea minimă a lui  $c$  la care inegalitatea se transformă în egalitate, se numește *abscisă de convergență absolută*, notată prin  $\sigma_a$ . Altfel spus,  $\sigma_a$  este valoarea minimă a variabilei  $\sigma$ , pentru care este îndeplinită condiția:

$$(3.71) \quad \int_0^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

Comparând cu cerința de convergență a transformatei Fourier:

$$(3.72) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty,$$

este clar că, în cazul transformatei Fourier, este necesar ca  $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = 0$ , pe când în transformata Laplace, limita respectivă poate fi nenulă, semnalul putând evolua sub o exponențială de exponent  $c \cdot t$  (vezi relația (3.70)).



**Fig. 3.24** Conturul Bromwich

Deci, transformata Fourier este mai restrictivă, sub aspectul convergenței, decât transformata Laplace. Trecerea de la transformata Laplace la transformata Fourier și invers se poate face prin substituțiile  $s \rightarrow j\omega$ , respectiv  $j\omega \rightarrow s$ , numai dacă sunt îndeplinite simultan două condiții:

- semnalul este cauzal;
- abscisa de convergența absolută este nulă ( $\sigma_a = 0$ ), ceea ce implică îndeplinirea relației (3.72).

Relația de definiție a transformatei Laplace *inverse* este:

$$(3.73) \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) \cdot e^{st} ds,$$

în care  $c$  se alege astfel încât  $c > \sigma_a$ . Conturul de integrare din planul complex „s” (conturul Bromwich) este prezentat în fig. 3.24.

### 3.6.2. Proprietăți ale transformatei Laplace

Se vor prezenta numai câteva proprietăți care sunt mai des folosite în modelarea și analiza sistemelor.

*Proprietatea liniarității*

$$(3.74) \quad \mathcal{L}\left\{\sum_i a_i x_i(t)\right\} = \sum_i a_i X_i(s)$$

*Teorema derivării în domeniul timp*

$$(3.75) \quad \mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt^n}\right\} = s^n X(s) - s^{n-1}x(0) - \dots - x^{(n-1)}(0)$$

*Teorema integrării*

$$(3.76) \quad \mathcal{L}\left\{\int_0^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{s} \cdot X(s)$$

*Teorema întârzierii*

$$(3.77) \quad \mathcal{L}\{x(t - \tau)\} = e^{-s\tau} \cdot \mathcal{L}\{x(t)\} = e^{-s\tau} \cdot X(s)$$

*Teorema înmulțirii cu o exponențială*

$$(3.78) \quad \mathcal{L}\{e^{\pm at} \cdot x(t)\} = X(s \mp a)$$

*Teorema schimbării de scară*

$$(3.79) \quad \mathcal{L}\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = a \cdot F(a \cdot s)$$

*Teorema valorii inițiale*

$$(3.80) \quad \lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot X(s)$$

*Teorema valorii finale*

$$(3.81) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot X(s)$$

*Teorema produsului imaginilor*

$$(3.82) \quad \mathcal{L}\{x_1(t) \otimes x_2(t)\} = X_1(s) \cdot X_2(s)$$

*Teorema produsului originalelor*

$$(3.83) \quad \mathcal{L}\{x_1(t) \cdot x_2(t)\} = X_1(s) \otimes X_2(s),$$

în care convoluția imaginilor este definită prin relația:

$$(3.84) \quad X_1(s) \otimes X_2(s) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X_1(s-p) \cdot X_2(p) dp$$

*Transformatele Laplace ale funcțiilor uzuale*

- transformatele Laplace ale funcțiilor impuls unitar, treaptă unitară și rampă unitară:

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}\{r(t)\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}\left\{\frac{t^n}{n!} \cdot u(t)\right\} = \frac{1}{s^{n+1}}$$

- transformata Laplace a funcției exponențiale:

$$\mathcal{L}\{e^{\pm at}\} = \frac{1}{s \mp a}$$

- transformatele Laplace ale funcțiilor trigonometrice:

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2} \quad \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}.$$

- transformatele Laplace ale oscilațiilor amortizate:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t)\} = \frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}, \quad \mathcal{L}\{e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t)\} = \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$$

*Aplicația 3.5:*

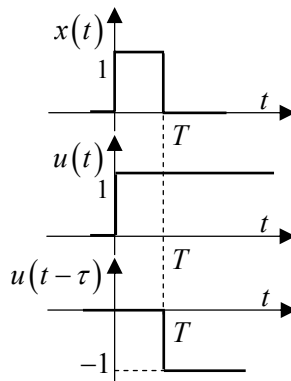
Fie semnalul  $x(t)$  din fig. 3.25. Să i se calculeze transformata Laplace și transformata Fourier.

Se pornește de la observația că  $x(t)$  poate fi exprimat ca suma dintre o treaptă unitară pozitivă și o treaptă unitară negativă întârziată cu  $T$  unități de timp (fig. 3.25). Rezultă:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} \cdot e^{-sT} = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

Se observă că semnalul este cauzal și de valoare finită a integralei modulului. În consecință, din transformata Laplace, cu substituția  $s=j\omega$ , se obține transformata Fourier a lui  $x(t)$ :

$$X(\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \cdot \frac{e^{-j\omega \frac{T}{2}} \cdot (e^{j\omega \frac{T}{2}} - e^{-j\omega \frac{T}{2}})}{2j \cdot \frac{\omega T}{2}} = T \cdot e^{-j\omega \frac{T}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$



**Fig. 3.25** Descompunerea unui impuls ca sumă a două semnale treaptă

*Aplicația 3.6:*

Fie un semnal cauzal sub forma unui tren de impulsuri de lățime  $\tau$  și perioadă  $T$  (fig. 3.26). Să se determine transformata Laplace a semnalului.

Pe baza rezultatului din aplicația anterioară, transformata Laplace a primului impuls este  $\frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s})$ . Impulsul de la momentul  $iT$  ( $i > 0$ ) se obține prin întârzierea primului impuls cu  $iT$  și va avea transformata Laplace  $\frac{1}{s}(1 - e^{-\tau s}) \cdot e^{-iT s}$  (teorema întârzierii). Prin urmare:

$$(3.85) \quad X(s) = \frac{1 - e^{-\tau s}}{s} (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots) = \frac{1 - e^{-\tau s}}{s(1 - e^{-Ts})}$$

Acest semnal nu are valoare finită a integralei modulului, deci nu este îndeplinită condiția de existență a transformatei Fourier. În consecință, nu este corectă aplicarea substituției  $s \rightarrow j\omega$  pentru a determina funcția spectrală a semnalului.

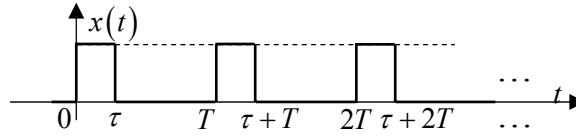


Fig. 3.26 Tren de impulsuri

### 3.7. Reprezentarea semnalelor prin transformata Hilbert

#### 3.7.1. Transformata Hilbert. Semnalul analitic

Transformata Hilbert este un instrument matematic util în teoria semnalelor, fiind utilizat îndeosebi pentru fundamentarea unor tehnici de modulație a semnalelor. Fiind dat un semnal  $x(t)$ , transformata Hilbert este definită prin relația următoare:

$$(3.86) \quad \hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} = \frac{1}{\pi} \cdot v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

în care *v.p.* înseamnă *valoarea principală a integralei*, adică:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot v.p. \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \right\} = \frac{1}{\pi} \cdot \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \right]$$

Fiind dată transformata Hilbert,  $\hat{x}(t)$ , se poate determina semnalul prin transformata Hilbert inversă, definită prin relația următoare:

$$(3.87) \quad x(t) = \mathcal{H}^{-1}\{\hat{x}(t)\} = -\frac{1}{\pi} \cdot v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

Ansamblul  $x(t)$  și  $\hat{x}(t)$  formează o *pereche Hilbert*. Obsevăm că, dacă se aplică transformata Hilbert semnalului  $\hat{x}(t)$ , rezultă:

$$\mathcal{H}\{\hat{x}(t)\} = \frac{1}{\pi} \cdot v.p. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

sau, ținând cont de (3.87):

$$(3.88) \quad \mathcal{H}\{\hat{x}(t)\} = -x(t)$$

Deci, aplicând de două ori consecutiv unui semnal transformata Hilbert, se obține semnalul cu semn schimbat. Funcția  $\hat{x}(t)$  se mai numește *conjugata* lui  $x(t)$ .

Se definește *semnalul analitic* prin relația:

$$(3.89) \quad z(t) = x(t) + j \cdot \hat{x}(t)$$

Modulul mărimii complexe  $z(t)$  se mai numește și *înfășurătoarea semnalului analitic*, iar argumentul lui  $z(t)$  – *faza semnalului analitic*:

$$(3.90) \quad |z(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}; \quad \arg(z(t)) = \arctg \frac{\hat{x}(t)}{x(t)}$$

### 3.7.2. Caracteristica spectrală a transformatei Hilbert și a semnalului analitic

Din relația (3.86), de definiție a transformatei Hilbert, rezultă că:

$$(3.91) \quad \hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot x(t) \otimes \left( \frac{1}{t} \right)$$

Aplicând transformata Fourier acestei relații și ținând cont că transformata Fourier a unui produs de convoluție este produsul (algebric) al transformatelor Fourier ale funcțiilor din convoluție, rezultă:

$$(3.92) \quad \hat{X}(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot X(\omega) \cdot \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{t} \right\}$$

Pentru a determina transformata Fourier a semnalului cu evoluție hiperbolică  $\frac{1}{t}$ , vom relua relația (3.45), dedusă în §3.4.3:

$$\mathcal{F} \{ \text{sign}(t) \} = \frac{2}{j\omega}$$

Utilizând proprietatea simetriei din transformata Fourier (vezi relațiile

(3.23) din §3.3.) se obține  $\mathcal{F} \left\{ \frac{2}{jt} \right\} = 2\pi \cdot \text{sign}(-\omega)$ , sau:

$$(3.93) \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{t} \right\} = -\pi j \cdot \text{sign}(\omega)$$

Înlocuind această expresie în (3.92), se obține caracteristica spectrală a transformatei Hilbert  $\hat{x}(t)$ :

$$(3.94) \quad \hat{X}(\omega) = -j \cdot X(\omega) \cdot \text{sign}(\omega)$$

Din relația (3.89), de definiție a semnalului analitic, se deduce că:

$$(3.95) \quad Z(\omega) = X(\omega) + j \cdot \hat{X}(\omega),$$

Aici vom înlocui  $\hat{X}(\omega)$  cu expresia (3.94) și obținem:

$$Z(\omega) = X(\omega) + X(\omega) \cdot \text{sign}(\omega), \text{ sau:}$$

$$(3.96) \quad Z(\omega) = \begin{cases} 2 \cdot X(\omega), & \omega > 0 \\ X(\omega), & \omega = 0 \\ 0, & \omega < 0 \end{cases}$$

În concluzie, semnalul analitic are o caracteristică spectrală întotdeauna nulă pentru frecvențe negative. Deci, dacă într-o caracteristică spectrală a unui semnal se ia în considerare numai domeniul frecvențelor pozitive (care există în natură), atunci caracteristicile spectrale respective îi va corespunde un semnal analitic.

### 3.7.3. Transformata Hilbert a semnalelor periodice

În §3.4.3 s-au calculat caracteristicile spectrale ale semnalelor trigonometrice:

$$(3.97) \quad \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$(3.98) \quad \mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{\pi}{j} \cdot [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

În cele ce urmează vom nota prin  $x_{\cos}(t)$  și  $x_{\sin}(t)$  funcțiile  $\cos(\omega_0 t)$ , respectiv  $\sin(\omega_0 t)$ , adică:

$$(3.99) \quad x_{\cos}(t) = \cos(\omega_0 t), \quad x_{\sin}(t) = \sin(\omega_0 t)$$

Caracteristica spectrală  $X_{\cos}(\omega)$ , corespunzătoare expresiei (3.97), este reprezentată în fig. 3.27, a).

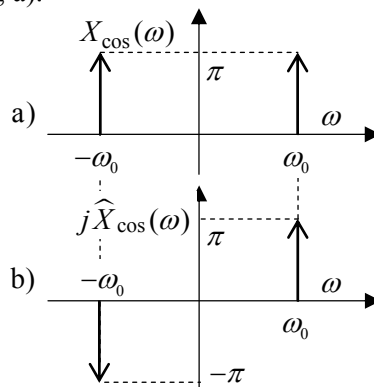


Fig. 3.27 Caracteristicile spectrale ale semnalelor  $x_{\cos}(t)$  și  $\hat{x}_{\cos}(t)$



Notăm prin  $\hat{x}_{\cos}(t)$  și  $\hat{x}_{\sin}(t)$  transformatele Hilbert ale funcțiilor  $x_{\cos}(t)$  respectiv  $x_{\sin}(t)$ . Transformata Fourier a semnalului  $\hat{x}_{\cos}(t)$  este, conform relației (3.94):

$$\hat{X}_{\cos}(\omega) = -jX_{\cos}(\omega) \cdot \text{sign}(\omega), \text{ sau:}$$

$$(3.100) \quad j\hat{X}_{\cos}(\omega) = X_{\cos}(\omega) \cdot \text{sign}(\omega)$$

În fig. 3.27, b) s-a reprezentat  $j\hat{X}_{\cos}(\omega)$ , pornind de la  $X_{\cos}(\omega)$ ; componenta aferentă pulsației  $\omega_0$  rămâne neschimbată, însă componenta de pulsație  $-\omega_0$  își schimbă semnul, datorită factorului  $\text{sign}(\omega)$ .

Rezultă:

$$j\hat{X}_{\cos}(\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \text{ sau:}$$

$$(3.101) \quad \hat{X}_{\cos}(\omega) = \frac{\pi}{j} \cdot [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] = X_{\sin}(\omega)$$

Întrucât transformatele Fourier  $\hat{X}_{\cos}(\omega)$  și  $X_{\sin}(\omega)$  sunt egale, rezultă că și semnalele respective sunt egale:

$$(3.102) \quad \hat{x}_{\cos}(t) = x_{\sin}(t)$$

Deci transformata Hilbert a semnalului cosinusoidal este semnalul sinusoidal. Similar se poate demonstra că transformata Hilbert a sinusoidei este cosinusoida cu semnul minus:

$$(3.103) \quad \hat{x}_{\sin}(t) = -x_{\cos}(t)$$

Semnalul analitic aferent cosinusoidei este:

$$(3.104) \quad z_{\cos}(t) = x_{\cos}(t) + j\hat{x}_{\cos}(t) = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t),$$

iar semnalul analitic aferent sinusoidei este:

$$(3.105) \quad z_{\sin}(t) = x_{\sin}(t) + j\hat{x}_{\sin}(t) = \sin(\omega_0 t) - j \cos(\omega_0 t)$$

Considerându-se un semnal periodic nesinusoidal, având SFT  $x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} (C_i \cdot \cos(i\omega_0 t) + S_i \cdot \sin(i\omega_0 t))$ ,  $S_0 = 0$ , semnalul analitic aferent lui este:

$$\begin{aligned} z(t) &= x(t) + j\hat{x}(t) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} [C_i \cdot \cos(i\omega_0 t) + S_i \cdot \sin(i\omega_0 t) + j \cdot (C_i \cdot \sin(i\omega_0 t) - S_i \cdot \cos(i\omega_0 t))] \end{aligned}$$

Vom prelucra termenul general,  $i$ , din sumă, exprimând funcțiile trigonometrice prin formulele lui Euler. După calcule elementare se obține:

$$\begin{aligned} C_i \cdot \cos(i\omega_0 t) + S_i \cdot \sin(i\omega_0 t) + j(C_i \cdot \sin(i\omega_0 t) - S_i \cdot \cos(i\omega_0 t)) = \\ = (C_i - jS_i)(\cos i\omega_0 t + j \sin i\omega_0 t) = \underline{A}_i \cdot e^{ji\omega_0 t} \end{aligned}$$

iar expresia semnalului analitic devine:

$$(3.106) \quad z(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \underline{A}_i \cdot e^{ji\omega_0 t}$$

Deci, dacă în SFC se omit componentele cu frecvențe negative, atunci modelul obținut nu este cel al semnalului  $x(t)$ , ci al semnalului analitic aferent lui  $x(t)$ .

*Observație:*

Fie un semnal  $x(t)$  având un spectru SFA cunoscut. Prin transformata Hilbert, fiecare armonică cosinusoidală se transformă într-o componentă spectrală de aceeași amplitudine. Deci spectrul de amplitudini rămâne neschimbat, însă fiecare armonică va fi defazată cu  $-\pi/2$ . Un sistem care primește la intrare semnalul  $x(t)$  și furnizează la ieșire  $\hat{x}(t)$ , numit convențional „filtru Hilbert”, introduce amplificare unitară și un defazaj de  $-\pi/2$  la toate frecvențele.

Vom determina în continuare transformatele Hilbert ale semnalelor:

$$(3.107) \quad x_{MA}^c(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

$$(3.108) \quad x_{MA}^s(t) = x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

Se va arăta în capitolul următor că aceste relații definesc semnale modulate în amplitudine, cu modulație de tip produs, pe purtător cosinusoidal, respectiv sinusoidal. Vom nota cu  $\hat{x}_{MA}^c(t)$  și  $\hat{x}_{MA}^s(t)$  transformatele Hilbert ale celor două semnale. Caracteristicile spectrale aferente sunt (vezi (3.94)):

$$(3.109) \quad \hat{X}_{MA}^c(\omega) = -jX_{MA}^c(\omega) \cdot \text{sign}(\omega)$$

$$(3.110) \quad \hat{X}_{MA}^s(\omega) = -jX_{MA}^s(\omega) \cdot \text{sign}(\omega),$$

unde:

$$(3.111) \quad X_{MA}^c(\omega) = \mathcal{F}\{x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)\}; \quad X_{MA}^s(\omega) = \mathcal{F}\{x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)\}$$

Utilizând relațiile (3.66), (3.40) și (3.41), rezultă consecutiv:

$$X_{MA}^c(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$X_{MA}^s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\sin(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$$

Convoluția unei funcții cu o distribuție  $\delta$  este egală cu funcția respectivă având argumentul distribuției  $\delta$  (vezi (3.61)); astfel, relațiile anterioare devin:

$$(3.112) \quad X_{MA}^c(j\omega) = \frac{1}{2} \{X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\}$$

$$(3.113) \quad X_{MA}^s(\omega) = \frac{1}{2j} \{X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)\}$$

Înlocuind (3.112) în (3.109), avem:

$$(3.114) \quad \begin{aligned} X_{MA}^c(\omega) &= -j \frac{1}{2} \cdot \{X(\omega - \omega_0) + X(\omega + \omega_0)\} \cdot \text{sign}(\omega) \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \{X(\omega - \omega_0) - X(\omega + \omega_0)\} \end{aligned}$$

întrucât:  $X(\omega - \omega_0) \cdot \text{sign}(\omega) = X(\omega - \omega_0)$  și

$$X(\omega + \omega_0) \cdot \text{sign}(\omega) = -X(\omega + \omega_0).$$

Din relațiile (3.114) și (3.113) rezultă că:

$$(3.115) \quad \widehat{X}_{MA}^c(\omega) = X_{MA}^s(\omega)$$

și, în consecință,  $\widehat{x}_{MA}^c(t) = x_{MA}^s(t)$ , sau, într-o exprimare explicită:

$$(3.116) \quad \mathcal{O}\mathcal{L}\{x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)\} = x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)$$

În mod similar se demonstrează că:

$$(3.117) \quad \mathcal{O}\mathcal{L}\{x(t) \cdot \sin(\omega_0 t)\} = -x(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$$

### 3.7.4. Proprietățile semnalelor cauzale

Semnalul *causal* este semnalul care este zero pentru  $t$  negativ. Cum s-a arătat în §3.6, semnalul causal satisface relația  $x(t) = x(t) \cdot u(t)$ , unde  $u(t)$  este semnalul treaptă unitară. Scopul urmărit este de a stabili, prin intermediul transformatei Hilbert, o proprietate specifică semnalelor cauzale.

Vom aplica transformata Fourier relației de mai sus și vom utiliza relația (3.66) pentru a explicita transformata Fourier a produsului  $x(t) \cdot u(t)$ :

$$(3.118) \quad X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot [X(\omega) \otimes \mathcal{F}\{u(t)\}]$$

Caracteristica spectrală a treptei unitare a fost dedusă în §3.4.3 și este dată de (3.46). Înlocuind această expresie în (3.118), rezultă:

$$\begin{aligned}
 (3.119) \quad X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \left\{ X(\omega) \otimes \left[ \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot X(\omega) \otimes \delta(\omega) + \frac{1}{2\pi} \cdot X(j\omega) \otimes \left[ \frac{1}{j\omega} \right]
 \end{aligned}$$

Pe baza faptului că produsul de convoluție al unei funcții cu distribuția  $\delta$  este egal cu funcția respectivă și făcând simplificările posibile, expresia (3.119) devine:

$$X(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot X(\omega) \otimes \left[ \frac{1}{j\omega} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(u)}{j(\omega - u)} du$$

Înlocuind:

$$(3.120) \quad X(\omega) = A(\omega) + j \cdot B(\omega),$$

rezultă:

$$A(\omega) + j \cdot B(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(u) + j \cdot B(u)}{j(\omega - u)} du$$

și în final:

$$(3.121) \quad A(\omega) = \frac{1}{\pi} \cdot v.p. \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(u)}{\omega - u} du \right\}$$

$$(3.122) \quad B(\omega) = -\frac{1}{\pi} \cdot v.p. \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A(u)}{\omega - u} du \right\}$$

Concluzia care se desprinde este că, la un semnal cauzal, partea reală  $A(\omega)$  a caracteristicii spectrale este transformata Hilbert a părții imaginare  $B(\omega)$ , deci funcțiile  $A(\omega)$  și  $B(\omega)$  formează o pereche Hilbert.



## Capitolul 4

### SEMNALE MODULATE

#### 4.1. Noțiuni generale privind modulația semnalelor. Tipuri de modulație

Prin **modulație** se înțelege transferarea proprietăților unui semnal, numit **semnal de bază** sau **semnal modulator**, către alt semnal, numit **purtător**. În urma acestui transfer rezultă semnalul **modulat**.

Necesitatea modulației în problema transmiterii informației se sprijină pe următoarele argumente.

Modulația este necesară pentru a face posibilă transmiterea informației printr-un mediu de transmitere dat (aerul sau vidul, ghiduri de undă, fibre, etc.). De exemplu, semnalul vocal nu poate fi transmis direct prin unde hertziene. Semnalul purtător trebuie să aibă capacitatea de a fi transmis prin mediul concret, dintr-o situație dată, făcând posibil transferul mesajului conținut în semnalul modulator.

Modulația este necesară pentru economicitatea transmisiei. Pe un canal fizic realizat printr-un mediu dat, se poate realiza transmiterea simultană a mai multor semnale, fără a exista interferențe între acestea.

Modulația oferă, în unele cazuri, o bună protecție la paraziți.

Se notează generic cu  $x(t)$  semnalul de bază. Semnalul purtător va fi notat cu  $x_p(t)$ . Semnalul purtător poate fi **armonic** (semnal sinusoidal) sau **tren de impulsuri**. Prin urmare, există două tipuri de semnale modulate:

- semnale modulate pe purtător armonic;
- semnale obținute prin modulația impulsurilor.

În cazul primei categorii de semnale modulate, purtătorul are expresia:

$$(4.1) \quad x_p(t) = A_p(t) \cdot \cos(\omega_p t + \varphi_p)$$

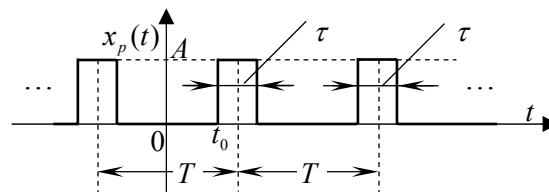


Fig. 4.1 Semnal purtător sub forma unui tren de impulsuri

Proprietățile semnalului de bază pot fi transferate unuia din cei trei parametri ai lui  $x_p(t)$ : amplitudinea  $A_p$ , frecvența  $f_p = \omega_p / 2\pi$  și faza inițială,  $\varphi_p$ .

Rezultă trei tipuri de modulație pe purtător armonic: **modulația în amplitudine (MA)**, **modulația în frecvență (MF)** și **modulația în fază (MP – Phase Modulation – în limba engleză)**.

În cazul **modulației impulsurilor**, parametrii care definesc un tren de impulsuri sunt amplitudinea  $A$ , perioada  $T$  (sau frecvența  $f=1/T$ ), faza inițială (dată de  $t_0$ ) și durata  $\tau$ . (fig. 4.1). Prin varierea fiecăruia din acești parametri se obțin respectiv **modulația impulsurilor în amplitudine (MIA)**, **în frecvență (MIF)**, **în fază (MIP)** și **în durată (MID)**.

## 4.2. Semnale modulate în amplitudine pe purtător armonic

### 4.2.1. Modulația în amplitudine cu purtătoare și două benzi laterale

Acest tip de modulație se utilizează în radiodifuziunea clasică pe unde lungi, medii și scurte.

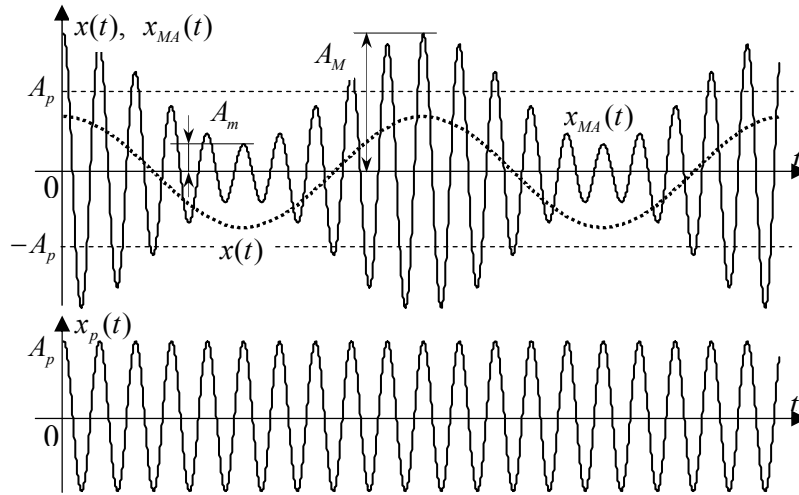


Fig. 4.2 Modulația în amplitudine

Se face ipoteza că semnalul modulator este format dintr-o componentă continuă, de valoare unitară, și componenta variabilă (variația purtătoare de informație); aceasta se admite la început în varianta cea mai simplă: o cosinusoidă de pulsație  $\omega_0$ , fază inițială nenulă și amplitudine  $m$ , subunitară. Deci semnalul modulator este de forma  $1 + m \cdot \cos(\omega_0 t)$ . În acest caz, semnalul modulat este dat de produsul semnalului purtător (4.1) (considerat cu  $\varphi_p=0$ ) cu semnalul modulator, adică:

$$(4.2) \quad x_{MA}(t) = A_p \cdot (1 + m \cdot \cos(\omega_0 t)) \cdot \cos(\omega_p t),$$

în care  $m = \frac{A}{A_p}$  se numește **grad de modulație**. Formele semnalelor  $x(t)$ ,  $x_p(t)$  și  $x_{MA}(t)$  sunt ilustrate în fig. 4.2. Utilizând notațiile din această figură,

gradul de modulație se determină cu relația:

$$(4.3) \quad m = \frac{A_M - A_p}{A_p} = \frac{A_M - A_m}{A_M + A_m}$$

Teoretic,  $m$  aparține intervalului  $[0; 1]$ . În telefonie,  $m$  aparține intervalului  $[0.5; 0.6]$ .

Se pune problema să determinăm spectrul semnalului din relația (4.2). Această relație se transformă succesiv:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} x_{MA}(t) &= A_p \cos(\omega_p t) + m \cdot A_p \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(\omega_p t) = \\ &= A_p \cos(\omega_p t) + \frac{m \cdot A_p}{2} [\cos(\omega_p + \omega_0)t + \cos(\omega_p - \omega_0)t] \end{aligned}$$

Spectrele semnalelor  $x(t)$  și  $x_p(t)$  constau din câte o singură armonică, la frecvențele  $\omega_0$  și, respectiv,  $\omega_p$  ( $\omega_p \gg \omega_0$ ). Spectrul semnalului modulat conține 3 componente: purtătoarea de amplitudine  $A_p$  și două componente laterale, la frecvențele  $\omega_p \pm \omega_0$ , cu amplitudinile egale cu  $mA_p/2$  (fig 4.3).

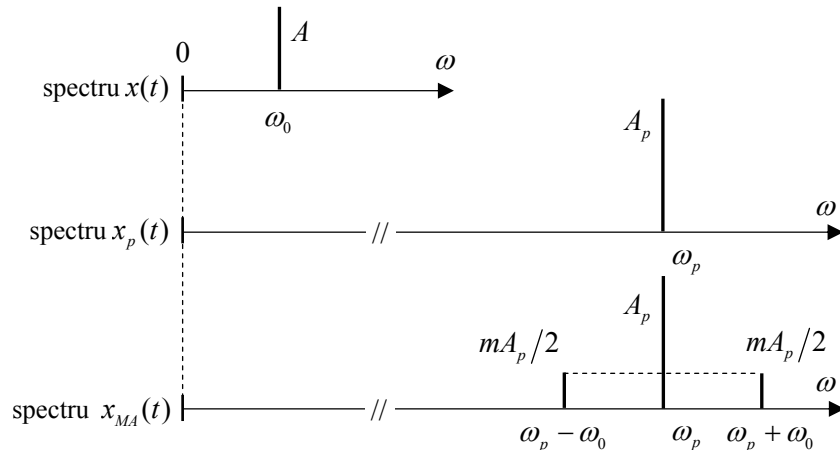


Fig. 4.3 Spectrul semnalelor  $x(t)$ ,  $x_p(t)$  și  $x_{MA}(t)$

Semnalul util este conținut în cele două componente laterale (în exces, pentru că ar fi suficientă o singură componentă laterală). Deci modulația nu este economică, în sensul că ocupă o bandă de frecvență dublă față de cea necesară. Purtătoarea este mult mai mare decât componentele laterale, rezultând unele dezavantaje, precum saturația amplificatoarelor și performanțe energetice slabe ale modulației.

Definim **randamentul modulației** ca fiind raportul dintre puterea dezvoltată de componentele laterale (utile) din spectru,  $P_u$ , și puterea semnalului modulat,  $P_{MA}$ :



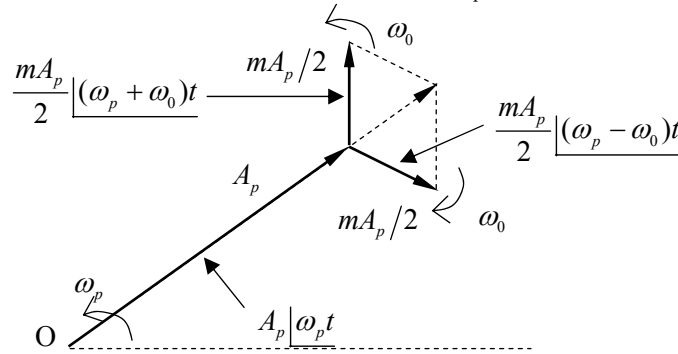
$$(4.5) \quad \eta = \frac{P_u}{P_{MA}}$$

Considerând că semnalele  $x(t)$  și  $x_p(t)$  au amplitudinile  $A$  și  $A_p$  ( $m = A/A_p$ ), iar semnalul modulat este obținut pe o rezistență  $R$ , avem:

$$\eta = \frac{2 \left( \frac{mA_p}{2 \cdot \sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{R}}{\left( \frac{A_p}{\sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{R} + 2 \left( \frac{mA_p}{2 \cdot \sqrt{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{R}} = \frac{0.5m^2}{1 + 0.5m^2}$$

Având în vedere valorile uzuale ale gradului de modulație, rezultă că randamentul modulației este redus.

**Reprezentarea fazorială a semnalului modulat** (fig. 4.4). Cele 3 componente din expresia (4.4) a semnalului modulat se reprezintă ca vectori rotitori de lungime  $A_p$  și, respectiv,  $mA_p/2$ . Ei au vitezele unghiulare  $\omega_p$  și, respectiv,  $\omega_p + \omega_0$  și  $\omega_p - \omega_0$ . Însurarea celor 3 vectori se face plasând în vârful vectorului aferent purtătoarei cele 2 componente laterale de modulație, care se rotesc cu vitezele  $+\omega_0$ , și respectiv  $-\omega_0$ , în raport cu vectorul purtătoarei (acesta se rotește cu viteza  $\omega_p$ ). Însurarea vectorială a celor 3 vectori conduce la un vector cu *lungime periodic variabilă* (de perioadă  $\omega_0$ ), care se rotește în jurul referinței O cu viteza unghiulară  $\omega_p$ .



**Fig. 4.4** Reprezentarea fazorială a semnalului modulat

Considerăm acum că semnalul util  $x(t)$  din componența semnalului modulator este **periodic nesinusoidal**. În acest caz, semnalul  $x(t)$  se poate reprezenta prin seria Fourier armonică, cu următoarea expresie:

$$(4.6) \quad x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \cos(i\omega_0 t + \varphi_i)$$

Am presupus că  $A_0 = 0$  (întrucât componenta continuă se adăunează separat). În acest caz, expresia semnalului modulat în amplitudine este:

$$(4.7) \quad x_{MA}(t) = A_p \left[ 1 + \sum_{i=0}^{\infty} m_i \cos(i\omega_0 t + \varphi_i) \right] \cdot \cos(\omega_p t)$$

unde  $m_i = \frac{A_i}{A_p}$  este gradul de modulație aferent armonicii  $i$ . Se observă că

fiecare armonică realizează modulația purtătorului cu un grad de modulație  $m_i$  proporțional cu amplitudinea  $A_i$  a armonicii ( $m_i \sim A_i$ ). Deci gradele de modulație sunt mai mari sau mai mici, după cum amplitudinile armonicilor sunt mai mari sau mai mici.

Relația (4.7) se pune sub forma:

$$(4.8) \quad x_{MA}(t) = A_p \cos(\omega_p t) + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{m_i A_p}{2} \cdot \left\{ \cos[(\omega_p - i\omega_0)t + \varphi_i] + \cos[(\omega_p + i\omega_0)t + \varphi_i] \right\}$$

Spectrele semnalelor  $x(t)$  și  $x_{MA}(t)$  sunt reprezentate în fig. 4.5.

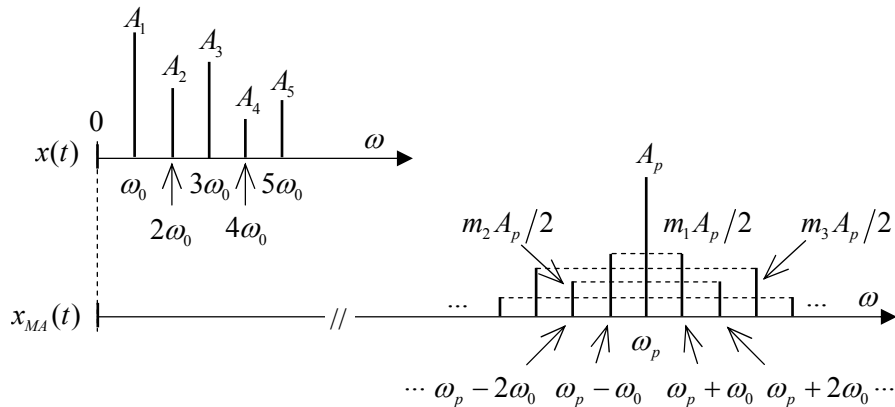


Fig. 4.5 Spectrul semnalelor (4.6) și (4.8)

În spectrul semnalului  $x_{MA}(t)$  există purtătoarea și două benzi laterale. Fiecare bandă laterală are spectrul identic cu spectrul amplitudinilor semnalului de bază, numai că scara este redusă cu coeficientul  $1/2$ .

Considerăm în continuare cazul general, când semnalul modulator este oarecare, având expresia  $x_M \cdot x(t)$ , unde  $\forall t, |x(t)| \leq 1$ . În acest caz:

$$(4.9) \quad x_{MA}(t) = A_p \cdot [1 + m \cdot x(t)] \cdot \cos(\omega_p t),$$

unde  $m = \frac{x_M}{A_p}$ .

Ne propunem determinarea unei reprezentări spectrale a semnalului modulat. În acest scop, se pleacă de la reprezentarea spectrală a semnalului de bază,  $x(t)$ , care este funcția spectrală  $X(\omega)$ . Aceasta furnizează densitatea de armonici, și nu armonicile.

Caracteristica spectrală a semnalului modulat în amplitudine se determină aplicând transformata Fourier în relația (4.9):

$$(4.10) \quad \begin{aligned} X_{MA}(\omega) &= \mathcal{F}\{x_{MA}(t)\} = \mathcal{F}\{A_p \cos(\omega_p t) + A_p m \cdot x(t) \cos(\omega_p t)\} = \\ &= A_p \cdot \mathcal{F}\{\cos(\omega_p t)\} + A_p m \cdot \mathcal{F}\{x(t) \cos(\omega_p t)\} \end{aligned}$$

Din relația (3.66) rezultă că:

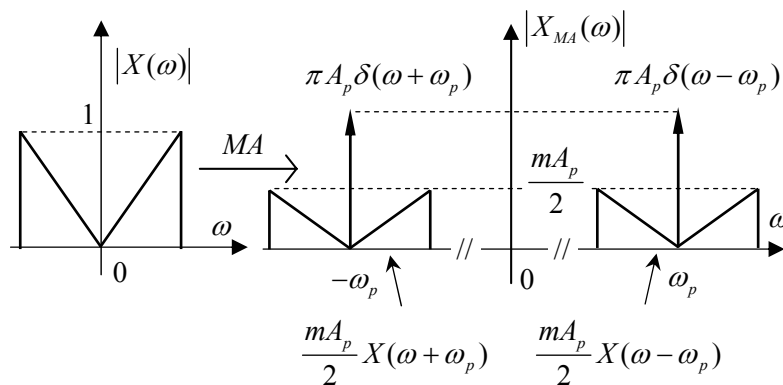
$$(4.11) \quad \mathcal{F}\{x(t) \cos(\omega_p t)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot X(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\cos(\omega_p t)\}$$

Înlocuind  $\mathcal{F}\{\cos(\omega_p t)\} = \pi[\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)]$  în relațiile de mai sus, rezultă:

$$(4.12) \quad \begin{aligned} X_{MA}(\omega) &= \pi A_p \cdot [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] + \\ &+ mA_p \cdot \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \{\pi[\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)]\} \end{aligned}$$

Convoluția unei funcții cu distribuția  $\delta$  este funcția având argumentul distribuției  $\delta$ . Deci:

$$(4.13) \quad \begin{cases} X(\omega) \otimes \delta(\omega - \omega_p) = X(\omega - \omega_p) \\ X(\omega) \otimes \delta(\omega + \omega_p) = X(\omega + \omega_p) \end{cases}$$



**Fig. 4.6** Caracteristicile spectrale ale semnalelor  $x(t)$ , și  $x_{MA}(t)$

În consecință, relația (4.12) devine:

$$(4.14) \quad X_{MA}(\omega) = \pi A_p \cdot [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] + \frac{mA_p}{2} \cdot [X(\omega - \omega_p) + X(\omega + \omega_p)]$$

Caracteristicile spectrale ale semnalelor  $x(t)$  și  $x_{MA}(t)$  sunt date în fig. 4.6. Aici se observă componentele caracteristicii spectrale ale semnalului modulat: purtătoarea (distribuția  $\pi A_p \delta(\omega \pm \omega_p)$ ) și cele două benzi laterale.

*Observație:*

Reprezentarea grafică a caracteristicii  $|X(\omega)|$  este simbolică și nu are legătură cu densitatea de amplitudini reală a semnalului. Simbolizarea permite să se discearnă banda semnalului și frecvențele maximă și minimă ce definesc banda.

În concluzie, din cele prezentate rezultă că modulația examinată are două dezavantaje:

- Banda ocupată de semnalul modulat este dublă față de cea minim necesară. De exemplu, banda semnalului telefonic este cuprinsă între 0.3 kHz și 3.4 kHz. Dacă s-ar utiliza modulația prezentată, lărgimea benzii semnalului modulat, în jurul frecvenței purtătoare, ar fi de 6.8 kHz.

- În semnalul modulat se regăsește integral purtătoarea, rezultând unele neajunsuri de natură energetică (randament scăzut) și de prelucrare a semnalului (posibilitatea saturării amplificatoarelor, datorită nivelului ridicat al purtătoarei, în raport cu componentele laterale – utile).

În schimb, extragerea semnalului de bază din cel modulat se realizează foarte simplu, printr-o operație de detecție/redresare.

*Aplicația 4.1:*

Fie semnalul purtător  $x_p(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_p t)$ , cu  $U_0 = 20$  V și  $\omega_p = 20$  kHz. Semnalul modulator este  $x_m(t) = \sum_{k=1}^4 U_k \cdot \cos(2\pi f_k t)$ , unde:

$k$	1	2	3	4
$f_k$ [kHz]	1	2	5	8
$U_k$ [V]	8	4	6	2

Se cere:

- să se reprezinte spectrele semnalului de bază și a celui modulat;
- să se calculeze puterea semnalului modulat și randamentul modulației.

Gradele de modulație ale celor 4 armonici sunt:  $m_1 = \frac{U_1}{U_0} = 0.4$ ,

$$m_2 = \frac{U_2}{U_0} = 0.2, \quad m_3 = \frac{U_3}{U_0} = 0.3 \quad \text{și} \quad m_4 = \frac{U_4}{U_0} = 0.1.$$

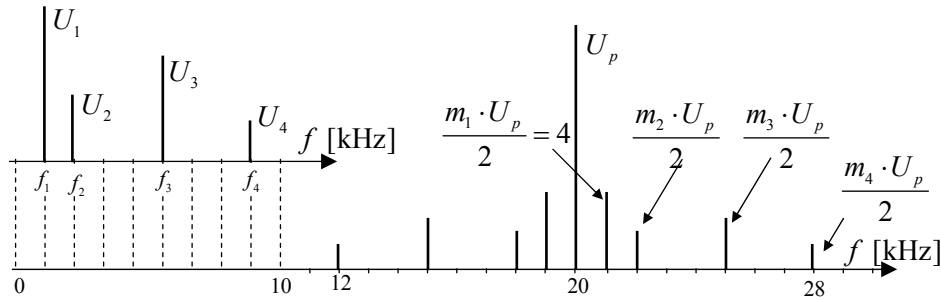
Conform relației (4.8),  $x_{MA}(t)$  se scrie:

$$x_{MA}(t) = U_p \cdot \cos(\omega_p t) + \sum_{k=1}^4 \frac{U_p \cdot m_k}{2} \cdot [\cos(\omega_p - k\omega_0)t + \cos(\omega_p + k\omega_0)t]$$

Ultima relație se poate rescrie punându-se în evidență purtătoarea și cele 2 benzi laterale:

$$x_{MA}(t) = \sum_{k=1}^4 \frac{U_p \cdot m_k}{2} \cdot [\cos(\omega_p - k\omega_0)t] + U_p \cdot \cos(\omega_p t) + \sum_{k=1}^4 \frac{U_p \cdot m_k}{2} \cdot [\cos(\omega_p + k\omega_0)t]$$

Conform acestei expresii, spectrul semnalului modulat este reprezentat în zona frecvențelor mari din fig. 4.7.



**Fig. 4.7** Spectrele semnalelor modulator și modulat (aplicația 4.1)

Puterea (RMS) semnalului modulat calculată pe o sarcină unitară este suma puterilor purtătoarei și a celor două benzi laterale:

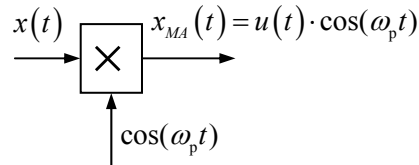
$$P_{MA} = \left(\frac{U_p}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \cdot \sum_{k=1}^4 \left(\frac{U_k}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{U_p^2}{2} + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2 = 320 \text{ W}$$

Randamentul modulației rezultă, conform relației (4.5), ca raport între puterea utilă conținută în cele două benzi laterale și puterea totală a semnalului modulat:

$$\eta = \frac{2 \cdot P_{BL}}{P_p + 2 \cdot P_{BL}} = \frac{2 \cdot \sum_{k=1}^4 \frac{U_k^2}{2}}{\frac{U_p^2}{2} + 2 \cdot \sum_{k=1}^4 \frac{U_k^2}{2}} = \frac{U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2}{\frac{U_p^2}{2} + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2} = 37.5\%$$

#### 4.2.2. Modulația în amplitudine de tip produs

Modulația de tip produs elimină cel de-al doilea dezavantaj din cele menționate în secțiunea anterioară. Modelul matematic este detaliat mai jos.



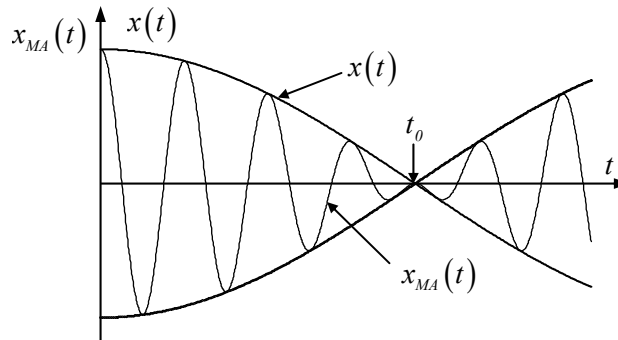
**Fig. 4.8** Modulator de tip produs

Fie  $x(t)$  semnalul modulator. Presupunem că acesta modulează un purtător cosinusoidal cu amplitudinea  $A_p$ . Semnalul modulat este:

$$(4.15) \quad x_{MA}(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_p t)$$

Schema modulatorului și forma semnalului modulat sunt date în fig. 4.8, respectiv fig. 4.9.

Atunci când semnalul modulator,  $x(t)$ , își schimbă semnul, în momentul  $t_0$  (vezi fig. 4.9), semnalul modulat în amplitudine cu modulație de tip produs își inversează faza.



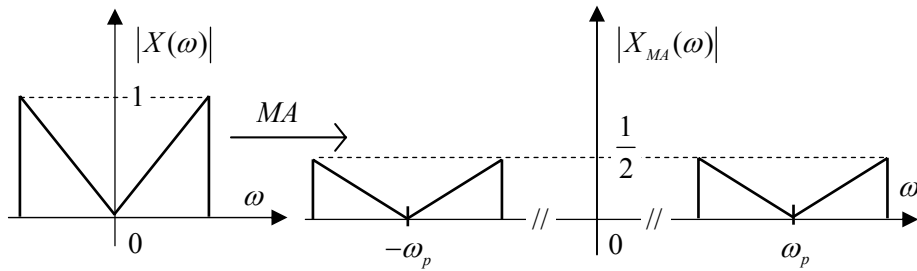
**Fig. 4.9** Modulația de tip produs a unui semnal

#### Reprezentarea spectrală a semnalelor cu modulație de tip produs

Se calculează transformata Fourier a semnalului  $x_{MA}(t)$ , exprimat prin relația (4.15).

Din  $x_{MA}(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_p t)$  rezultă:

$$\begin{aligned} X_{MA}(\omega) &= \mathcal{F}\{x(t) \cdot \cos(\omega_p t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\cos(\omega_p t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \left\{ \pi [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] \right\} \end{aligned}$$



**Fig. 4.10** Spectrul semnalului  $MA$  cu modulație de tip produs

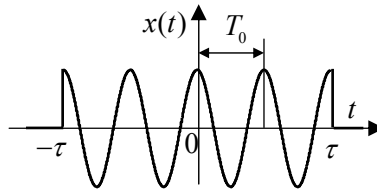
Ținând cont de relația (4.13), ultima relație devine:

$$(4.16) \quad X_{MA}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot [X(\omega - \omega_p) + X(\omega + \omega_p)]$$

Caracteristica spectrală  $X_{MA}(\omega)$  este ilustrată în fig. 4.10. Se observă absența purtătoarei, însă rămâne dezavantajul că banda semnalului modulat este dublă față de cea minimă necesară.

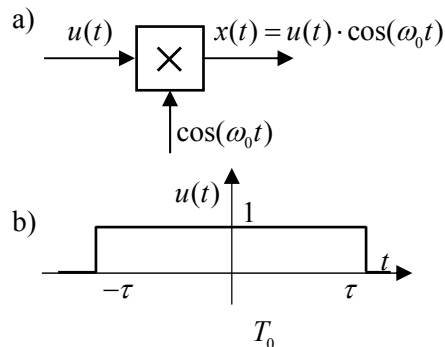
*Aplicația 4.2:*

Să se determine caracteristica spectrală a semnalului din fig. 4.11, unde  $\tau = 2T_0$  și  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ .



**Fig. 4.11** Semnalul de analizat (aplicația 4.2)

Semnalul se pune sub forma  $x(t) = u(t) \cdot \cos(\omega_0 t)$  (fig. 4.11, a)), unde  $u(t)$  este un impuls real de amplitudine unitară și arie  $2\tau$  (fig. 4.11, b)).



**Fig. 4.12** Generarea semnalului  $x(t)$  din fig. 4.11

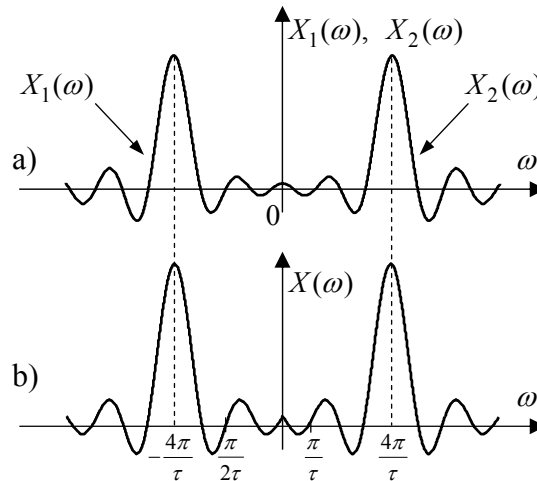
Prin aplicarea transformatei Fourier semnalului  $x(t)$ , se obține:

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \mathcal{F}\{u(t) \cdot \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{u(t)\} \otimes \mathcal{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot 2\tau \cdot \text{sinc}(\omega\tau) \cdot \pi \cdot [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = \\ &= \tau \cdot [\text{sinc}((\omega - \omega_0) \cdot \tau) + \text{sinc}((\omega + \omega_0) \cdot \tau)] \end{aligned}$$

În relația de mai sus se folosește faptul că  $\omega_0\tau = \frac{2\pi}{T_0} \cdot 2T_0 = 4\pi$ . Rezultă:

$$X(\omega) = \tau \cdot [\text{sinc}(\omega\tau - 4\pi) + \text{sinc}(\omega\tau + 4\pi)] = X_1(\omega) + X_2(\omega)$$

În fig. 4.13, a) sunt reprezentate funcțiile  $X_1(\omega)$ , respectiv  $X_2(\omega)$ , iar în fig. 4.13, b) caracteristica spectrală  $X(\omega)$ .



**Fig. 4.13** Caracteristicile spectrale  $X(\omega)$ ,  $X_1(\omega)$  și  $X_2(\omega)$  (aplicația 4.2)

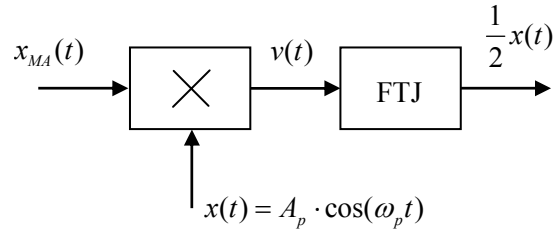
### Demodulația de tip produs

Extragerea semnalului de bază din cel modulat nu se poate face printr-o simplă detecție/redresare, pentru că – așa cum se remarcă din fig. 4.9 – atunci când se schimbă faza semnalului modulat, trebuie să se inverseze semnul semnalului extras din înfășurătoarea lui  $x_{MA}(t)$ . O asemenea comportare se realizează cu un demodulator sensibil la fază. Schema bloc a demodulatorului pentru semnale  $MA$  de tip produs este dată în fig. 4.14. El implică existența purtătoarei  $x_p(t)$  la recepție (unde se realizează demodularea).

Pentru simplificarea calculului, vom presupune  $A_p = 1$ . La ieșirea circuitului de tip produs se obține variabila  $v(t) = x_{MA}(t) \cdot \cos(\omega_p t)$ , a cărei caracteristică spectrală se deduce ca mai jos:



$$V(\omega) = \mathcal{F}\{x_{MA}(t) \cdot \cos(\omega_p t)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot X_{MA}(\omega) \otimes \left\{ \pi [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] \right\}$$



**Fig. 4.14** Demodulator de tip produs

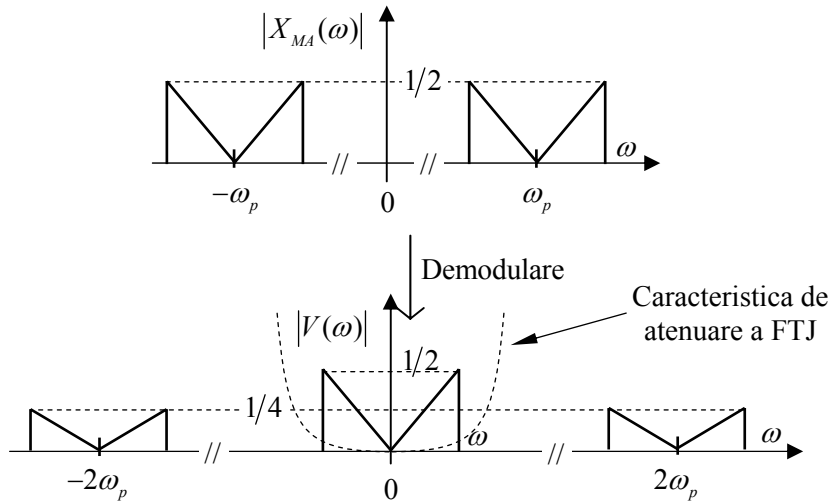
Înlocuind  $X_{MA}(\omega)$  prin relația (4.16), rezultă:

$$\begin{aligned} V(\omega) &= \frac{1}{4} [X(\omega - \omega_p) + X(\omega + \omega_p)] \otimes [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] = \\ &= \frac{1}{4} [X(\omega - 2\omega_p) + X(\omega + \omega_p - \omega_p) + \\ &\quad + X(\omega - \omega_p + \omega_p) + X(\omega + 2\omega_p)] \end{aligned}$$

În final se obține:

$$(4.17) \quad V(\omega) = \frac{1}{4} \cdot [X(\omega - 2\omega_p) + 2X(\omega) + X(\omega + 2\omega_p)]$$

Caracteristicile spectrale  $X_{MA}(\omega)$  și  $V(\omega)$  sunt prezentate în fig. 4.15.



**Fig. 4.15** Funcționarea demodulatorului de tip produs

Filtrul trece-jos (FTJ), situat după circuitul de înmulțire, elimină componentele de înaltă frecvență din zona pulsațiilor  $\omega \pm 2\omega_p$ , și extrage

numai componenta spectrală de joasă frecvență:  $\frac{1}{4} \cdot 2X(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega)$ . În consecință, la ieșirea FTJ se va obține  $(1/2) \cdot x(t)$ .

#### 4.2.3. Modulația în amplitudine cu bandă laterală unică (BLU)

În modulația de tip produs, analizată în secțiunea anterioară, banda ocupată de semnalul modulat este dublă față de cea minimă necesară. Pentru a mări capacitatea de transmisie a unui canal fizic, este util să se utilizeze o modulație care furnizează o singură bandă din cele 2 benzi rezultate în modulația de tip produs: fie banda superioară (în raport cu pulsația  $\omega_p$ ), fie banda inferioară. O asemenea modulație se numește *cu bandă laterală unică (BLU)*.

O soluție aparent simplă de obținere a unui semnal *MA-BLU* constă în selectarea, cu ajutorul unui filtru trece-bandă (FTB), a uneia din benzile laterale obținute cu un modulator de tip produs. Această soluție are un dezavantaj important în transmisiunile telefonice, unde banda semnalului de bază este în domeniul 0.3–3.4 kHz: ecartul între limita inferioară a benzii laterale superioare și limita superioară a benzii laterale inferioare este foarte mic, de  $0.3 + 0.3 = 0.6$  kHz, în jurul frecvenței purtătoare  $f_p$ . Rezultă că FTB trebuie să aibă o foarte bună selectivitate, astfel încât să suprimă banda inferioară fără a afecta zonele adiacente din banda laterală superioară.

Pentru evitarea utilizării FTB de înaltă selectivitate sunt elaborate două soluții, care vor fi prezentate în cele ce urmează: *metoda semnalului analitic* (bazată pe transformata Hilbert) și *metoda Weaver*.

#### 4.2.4. Modulația BLU utilizând transformata Hilbert (metoda semnalului analitic)

În schema de principiu care ilustrează această metodă există două modulatatoare de tip produs (fig. 4.16). Primul modulează un semnal cosinusoidal, semnalul modulator fiind  $x(t)$ . La cel de-al doilea modulator, intrarea este transformata Hilbert a lui  $x(t)$ , purtătorul fiind sinusoidal.

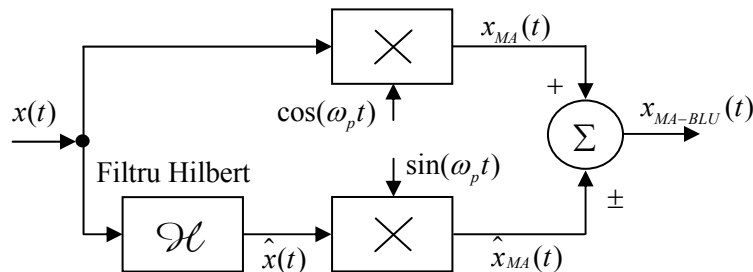


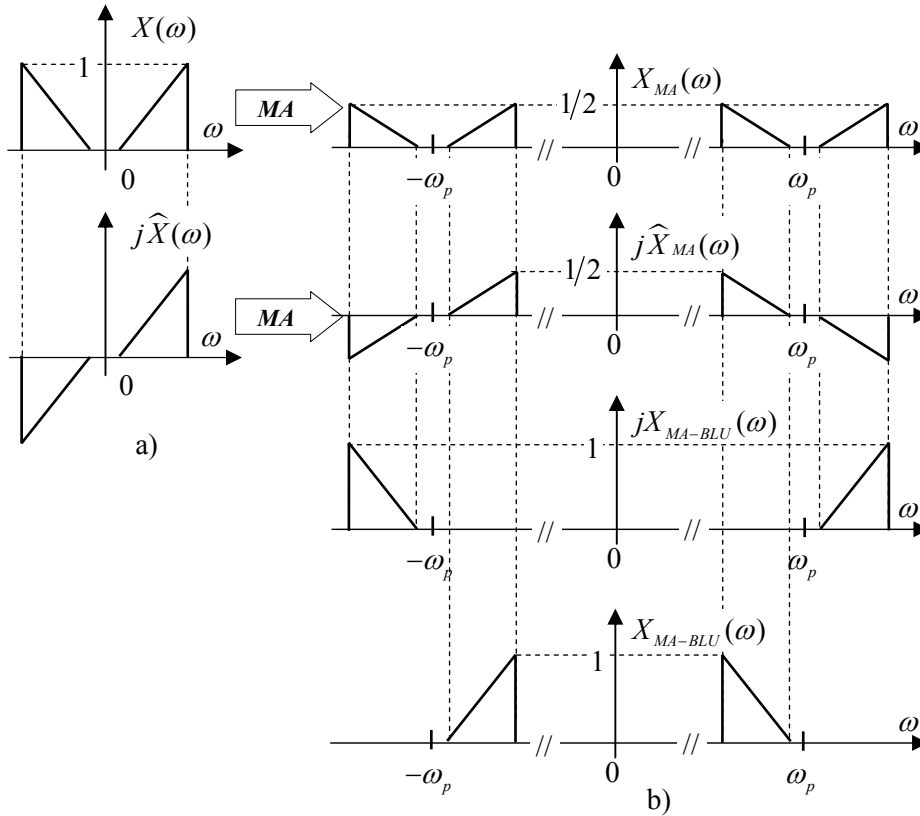
Fig. 4.16 Modulația BLU – metoda semnalului analitic

Caracteristica spectrală a semnalului la ieșirea filtrului Hilbert este (vezi

relația (3.94))  $\hat{X}(\omega) = -j \cdot X(\omega) \cdot \text{sign}(\omega)$ , de unde rezultă:

$$j\hat{X}(\omega) = X(\omega) \cdot \text{sign}(\omega)$$

În fig. 4.17, a) sunt reprezentate schematic funcțiile spectrale  $X(\omega)$  și  $j\hat{X}(\omega)$ . Se observă că, pentru  $\omega > 0$ ,  $j\hat{X}(\omega) = X(\omega)$ , iar pentru  $\omega < 0$ ,  $j\hat{X}(\omega) = -X(\omega)$ .



**Fig. 4.17** Caracteristicile spectrale ale semnalelor implicate în schema din fig. 4.16

La ieșirea primului modulator de tip produs se obține semnalul  $x_{MA}(t) = x(t) \cdot \cos(\omega_p t)$ . Caracteristica spectrală a acestuia, având expresia (4.16), este reprezentată în fig. 4.17, b). La ieșirea celui de-al doilea modulator se obține semnalul  $\hat{x}_{MA}(t) = \hat{x}(t) \cdot \sin(\omega_p t)$ , pentru care vom determina caracteristica spectrală:

$$\hat{X}_{MA}(\omega) = \mathcal{F}\{\hat{x}(t) \cdot \sin(\omega_p t)\} = \frac{1}{2\pi} \hat{X}(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\sin(\omega_p t)\}$$

Utilizând expresia (3.37) pentru  $\mathcal{F}\{\sin(\omega_p t)\}$  se obține:

$$\begin{aligned}\widehat{X}_{MA}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \widehat{X}(\omega) \otimes \left\{ \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_p) - \delta(\omega + \omega_p)] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} [-j\widehat{X}(\omega - \omega_p) + j\widehat{X}(\omega + \omega_p)]\end{aligned}$$

din care rezultă:

$$(4.18) \quad \widehat{X}_{MA}(\omega) = \frac{1}{2} [-j\widehat{X}(\omega - \omega_p) + j\widehat{X}(\omega + \omega_p)]$$

Această funcție spectrală, reprezentată în fig. 4.17, b), are două componente: cea situată în jurul pulsației  $\omega_p$ ,  $\frac{1}{2}j\widehat{X}(\omega - \omega_p)$ , obținută prin inversarea semnului și decalarea la dreapta a caracteristicii  $j\widehat{X}(\omega)$ , și cea situată în jurul pulsației  $-\omega_p$ ,  $\frac{1}{2}j\widehat{X}(\omega + \omega_p)$ , obținută prin deplasarea spre stânga a caracteristicii spectrale  $j\widehat{X}(\omega)$ . Din fig. 4.17, b), se observă că, dacă se scad funcțiile  $X_{MA}(\omega)$  și  $\widehat{X}_{MA}(\omega)$  (la elementul de însumare din fig. 4.16, semnele sunt '+', '-' și respectiv '+', '-'), se obține  $X_{MA-BLU}(\omega)$ , fiind suprimată banda laterală inferioară. Dacă se adună  $X_{MA}(\omega)$  și  $\widehat{X}_{MA}(\omega)$  (elementul de însumare din schemă, are semnul '+', '+' la ambele intrări), se obține  $X_{MA-BLU}(\omega)$ , cu banda superioară suprimată.

#### 4.2.5. Modulația BLU utilizând metoda Weaver

În modulatorul Weaver există două ramuri, fiecare ramură realizând câte două modulații consecutive. Prima ramură utilizează semnale purtătoare cosinusoidale, iar în a doua ramură semnalele purtătoare sunt sinusoidale (fig. 4.18).

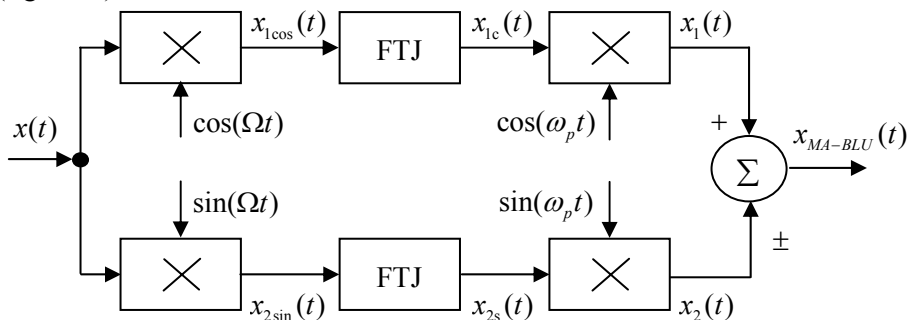


Fig. 4.18 Modulația BLU – metoda Weaver

Frecvența purtătoare la primele modulații de tip produs din cele 2 ramuri este notată cu  $\Omega$  și are o valoare mică, situată în zona mediană a benzii semnalului modulator. În fig. 4.19 este ilustrată prelucrarea semnalelor în

primul etaj al ramurii superioare. Se observă că funcția spectrală  $X_{1\cos}(\omega)$ , de forma:

$$(4.19) \quad X_{1\cos}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot [X(\omega - \Omega) + X(\omega + \Omega)]$$

este deplasată simetric în jurul pulsațiilor  $\Omega$  și  $-\Omega$ . Cu ajutorul FTJ se suprimă componentele spectrale având  $|\omega| > |\Omega|$  și se obține caracteristica spectrală a semnalului  $x_{1c}(t)$ , adică  $X_{1c}(\omega)$ .

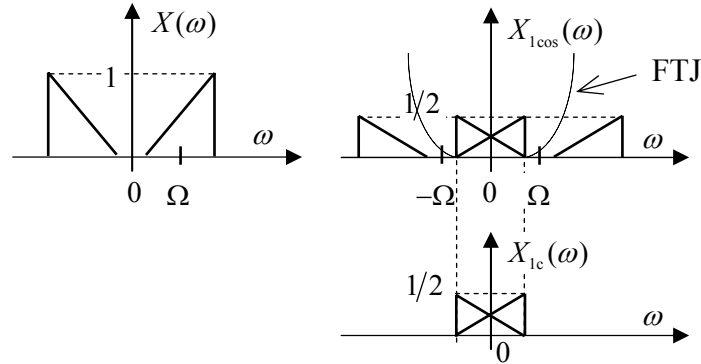


Fig. 4.19 Obținerea caracteristicii spectrale a semnalului  $x_{1c}(t)$

Modelul frecvențial al prelucrării semnalelor în primul etaj al ramurii inferioare este prezentat în fig. 4.20.

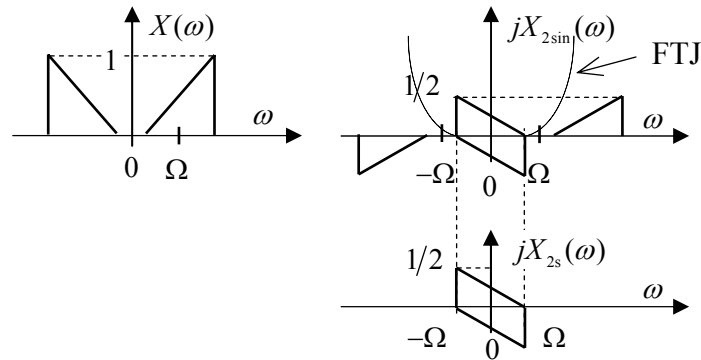


Fig. 4.20 Obținerea caracteristicii spectrale a semnalului  $x_{2s}(t)$

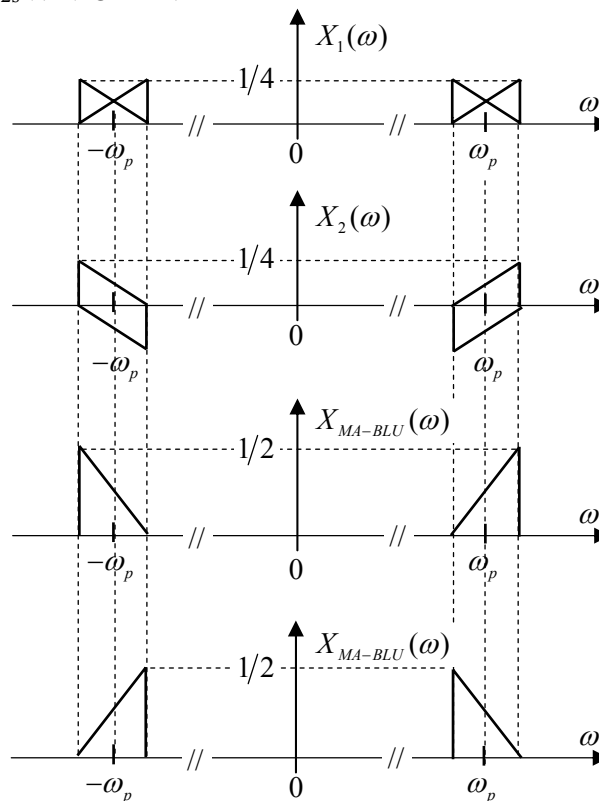
Mai întâi se determină caracteristica spectrală a semnalului  $x_{2\sin}(t) = x(t) \cdot \sin(\Omega t)$ :

$$X_{2\sin}(\omega) = \mathcal{F}\{x(t) \cdot \sin(\Omega t)\} = \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes \left\{ \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \Omega_p) - \delta(\omega + \Omega_p)] \right\},$$

din care rezultă:

$$(4.20) \quad jX_{2\sin}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot [X(\omega - \Omega) - X(\omega + \Omega)]$$

Caracteristica spectrală  $jX_{2\sin}(\omega)$  se obține prin simpla deplasare spre dreapta a caracteristicii  $X(\omega)$ , în jurul pulsației  $+\Omega$ , cât și prin inversarea semnelor caracteristicii  $X(\omega)$  și deplasarea ei spre stânga în jurul pulsației  $-\Omega$  (vezi fig. 4.20). Prin eliminarea componentelor spectrale de frecvențe  $|\omega| > |\Omega|$ , cu ajutorul FTJ, se obține caracteristica spectrală  $jX_{2s}(\omega)$ , asociată semnalului  $x_{2s}(t)$  (fig. 4.20).



**Fig. 4.21** Obținerea caracteristicii spectrale a semnalului  $x_{MA-BLU}(t)$

În cel de-al doilea etaj al ramurii superioare, semnalul  $x_{1c}(t)$  este modulat cu purtătorul cosinusoidal  $\cos(\omega_p t)$ , unde  $\omega_p$  este mult mai mare decât pulsația maximă din spectrul semnalului modulator. La ieșirea modulatorului se obține semnalul  $x_1(t)$ , a cărui caracteristică spectrală este:

$$X_1(\omega) = \mathcal{F}\{x_{1c}(t) \cos(\omega_p t)\} = \frac{1}{2\pi} X_{1c}(\omega) \otimes \left\{ \pi \left[ \delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p) \right] \right\}$$

sau:

$$(4.21) \quad X_1(\omega) = \frac{1}{2} [X_{1c}(\omega - \omega_p) + X_{1c}(\omega + \omega_p)]$$

În reprezentarea grafică din fig. 4.21, cele două componente ale funcției  $X_1(\omega)$  se obțin prin deplasarea simetrică, în jurul pulsațiilor  $\omega_p$  și  $-\omega_p$  a caracteristicii spectrale  $X_{1c}(\omega)$  din fig. 4.19.

În ramura inferioară, semnalul  $x_{2s}(t)$  este modulată pe purtătorul sinusoidal  $\sin(\omega_p t)$ . La ieșirea modulatorului se obține semnalul  $x_2(t) = x_{2s}(t) \cdot \sin(\omega_p t)$ , a cărui caracteristică spectrală este:

$$X_2(\omega) = \mathcal{F}\{x_{2s}(t) \cdot \sin(\omega_p t)\} = \frac{1}{2\pi} X_{2s}(\omega) \otimes \left\{ \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_p) - \delta(\omega + \omega_p)] \right\}$$

$$(4.22) \quad X_2(\omega) = \frac{1}{2} [-jX_{2s}(\omega - \omega_p) + X_{2s}(\omega + \omega_p)]$$

Caracteristica  $X_2(\omega)$ , reprezentată în fig. 4.21, se obține pe baza funcției  $jX_{2s}(\omega)$ , dată în fig. 4.20, prin inversarea semnului acestei funcții și deplasarea ei în jurul pulsației  $\omega_p$ , precum și prin simpla deplasare a ei spre stânga, în jurul pulsației  $-\omega_p$ .

Dacă în elementul de însumare din fig. 4.18, ambele intrări au semnul  $+$  ( $x_{MA-BLU}(t) = x_1(t) + x_2(t)$ ), atunci  $X_{MA-BLU}(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega)$  și semnalul modulată de la ieșirea modulatorului conține banda laterală superioară. Dacă semnalele  $x_1(t)$  și  $x_2(t)$  se scad, semnalul modulată va conține banda laterală inferioară (vezi fig. 4.21).

#### 4.2.6. Principiul multiplexării în frecvență

Multiplexarea semnalelor presupune transmiterea mai multor semnale pe același canal fizic, fără ca semnalele să interfereze. Multiplexarea în frecvență se realizează prin modularea semnalelor respective. Frecvențele purtătoare utilizate la modulatoare, distincte la fiecare modulator, se aleg în așa fel încât densitățile spectrale ale semnalelor modulate să nu se suprapună și – în plus – să aibă între ele un ecart în frecvență suficient pentru a selecta (separa) fiecare canal prin intermediul filtrelor.

Principiul multiplexării în frecvență este ilustrat în fig. 4.22. Aici s-au considerat 3 semnale diferite,  $x^A(t)$ ,  $x^B(t)$  și  $x^C(t)$ , ale căror caracteristici spectrale, schematizate în fig. 4.22, sunt  $X^A(\omega)$ ,  $X^B(\omega)$  și  $X^C(\omega)$ .

Cele 3 semnale se aplică modulatorilor de tip produs, care lucrează cu semnale purtătoare având pulsațiile  $\omega_{p_1}$ , respectiv  $\omega_{p_2}$  și  $\omega_{p_3}$ . Așa cum se remarcă din fig. 4.22, prin alegerea frecvențelor purtătoare, caracteristicile

spectrale ale semnalelor modulate,  $X^A(\omega)$ ,  $X^B(\omega)$  și  $X^C(\omega)$  ocupă zone distincte pe axa frecvențelor, fiind transmise pe canalul fizic. La recepție, presupunând că a fost compensată atenuarea canalului, se utilizează filtre trece-bandă (FTB) care selectează/separă canalele: la ieșirea FTB<sup>A</sup> se obține  $X^A(\omega)$ , iar FTB<sup>B</sup> și FTB<sup>C</sup> vor furniza  $X^B(\omega)$ , respectiv  $X^C(\omega)$ . Utilizând demodulatoare de tip produs, formate dintr-un circuit de înmulțire și un FTJ (fig. 4.14), se obțin în final semnalele  $\frac{1}{2}x^A(t)$ ,  $\frac{1}{2}x^B(t)$  și  $\frac{1}{2}x^C(t)$ .

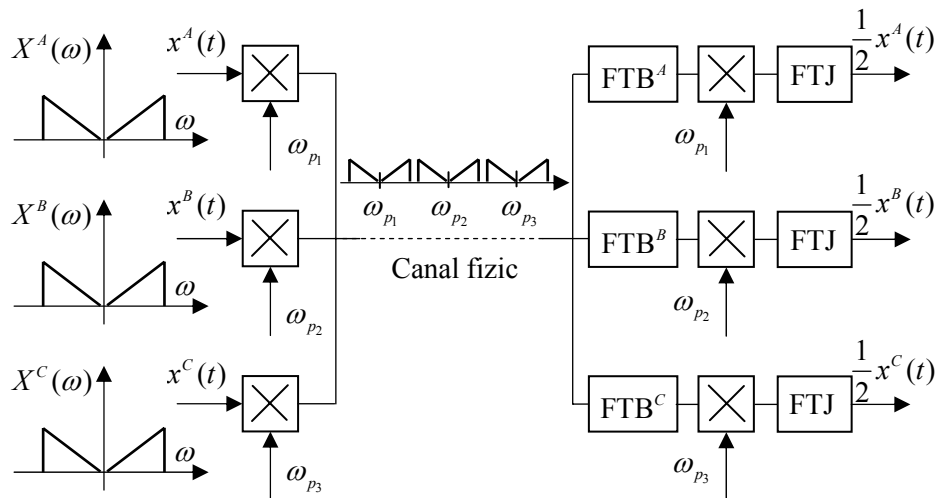


Fig. 4.22 Principiul multiplexării în frecvență

În schema dată în fig. 4.22 s-a utilizat modulația de tip produs, în care un semnal modulat ocupă o bandă dublă față de cea minim necesară. Astfel, în cazul unui semnal telefonic, unde banda este limitată în domeniul 0.3–3.4 kHz, banda semnalului modulat este de  $2 \times 3.4 = 6.8$  kHz, iar frecvențele purtătoare adiacente trebuie să fie „distanțate” la 8 kHz, pentru a se asigura și ecartul necesar separării căilor prin FTB. Dacă însă se utilizează *MA-BLU*, atunci banda semnalului se reduce la jumătate, frecvențele purtătoare adiacente sunt decalate cu 4 kHz, iar numărul de semnale multiplexate în frecvență, transmise pe canalul fizic, se dublează – vezi fig. 4.23.

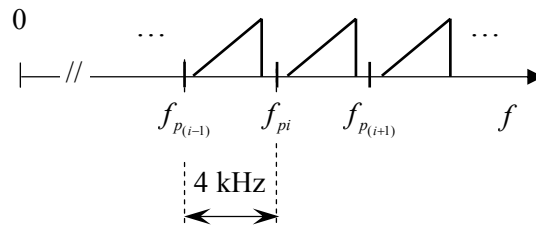


Fig. 4.23 Multiplexarea în frecvență utilizând *MA-BLU*



### 4.3. Semnale cu modulație unghiulară

#### 4.3.1. Noțiuni generale privind modulația unghiulară

Modulația unghiulară cuprinde **modulația în frecvență (MF)** și **modulația în fază (MP)**. Așa cum se va arăta în cele ce urmează, instrumentul matematic utilizat la modelare este același, iar spectrele semnalelor modulate sunt similare. Principalul avantaj al acestor modulații este marea robustețe la paraziți.

Fie un semnal purtător:

$$(4.23) \quad x_p(t) = A_p \cdot \cos[\Phi(t)],$$

în care relația dintre fază  $\Phi(t)$  și pulsația semnalului  $\omega(t)$  este de forma:

$$(4.24) \quad \Phi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \Phi_0$$

Modulația în fază este caracterizată de relația:

$$(4.25) \quad \Phi(t) = \Phi_p(t) + \Delta\Phi(t),$$

în care  $\Phi_p(t) = \omega_p t$ , iar **deviația de fază**  $\Delta\Phi(t)$  este proporțională cu semnalul modulator:

$$(4.26) \quad \Delta\Phi(t) = K_p \cdot x(t);$$

rezultă:

$$(4.27) \quad \Phi(t) = \omega_p t + K_p \cdot x(t)$$

Semnalul *MP* este:

$$(4.28) \quad x_{MP}(t) = A_p \cdot \cos[\omega_p t + K_p \cdot x(t)]$$

Modulația în frecvență este caracterizată de relația:

$$(4.29) \quad \omega(t) = \omega_p + \Delta\omega(t),$$

în care **deviația de frecvență**  $\Delta\omega(t)$  este proporțională cu semnalul modulator  $x(t)$ :

$$(4.30) \quad \omega(t) = \omega_p + K_\omega \cdot x(t)$$

Utilizând relația (4.24), în care se admite  $\Phi_0 = 0$ , expresia fazei devine:

$$(4.31) \quad \Phi(t) = \omega_p t + K_\omega \int_0^t x(\tau) d\tau,$$

iar semnalul *MF* este:

$$(4.32) \quad x_{MF}(t) = A_p \cdot \cos \left[ \omega_p t + K_\omega \cdot \int_0^t x(\tau) d\tau \right]$$

Se constată că semnalele *MP* și *MF*, având expresiile (4.28), respectiv (4.32), sunt asemănătoare: în primul caz deviația de fază este proporțională cu semnalul modulator, iar în cel de-al doilea caz – cu integrala semnalului modulator. În ambele situații, frecvența unghiulară a semnalului modulat depinde de  $x(t)$ , fapt care justifică denumirea generică de modulație unghiulară dată ansamblului *MP* și *MF*.

În fig. 4.24 s-au ilustrat cele două tipuri de modulație pe cazul celui mai simplu semnal modulator: semnalul binar (telegrafic).

S-au utilizat notațiile:  $x(t)$  – semnal de bază;  $x_{MF}(t)$  – semnal modulat *FSK* (Frequency Shift Keying);  $x_{MP}(t)$  – semnal modulat *PSK* (Phase Shift Keying). Utilizând termenul de „cheiere” (în sensul comutării valorii unui parametru), *FSK* și *PSK* înseamnă „cheierea deviației de frecvență”, respectiv „cheierea deviației de fază”.

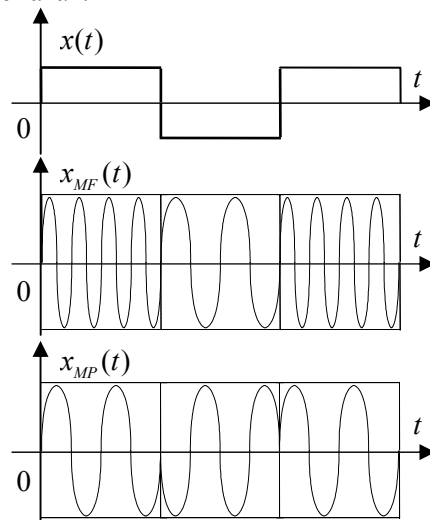


Fig. 4.24 Semnale *MF* și *MP*, de tip *FSK* și *PSK*

#### 4.3.2. Analiza spectrală a semnalului modulat în frecvență

Să considerăm cazul când semnalul de bază e cosinusoidal, de frecvență  $\omega_0$ . În acest caz, frecvența purtătoare este:

$$(4.33) \quad \omega(t) = \omega_p + \Delta\omega \cdot \cos(\omega_0 t),$$

iar faza are expresia:

$$\Phi(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau + \Phi_0 = \int_0^t \left[ \omega_p + \Delta\omega \cos(\omega_0 \tau) \right] d\tau + \Phi_0 = \omega_p t + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \Phi_0$$

Considerând pentru simplificare  $\Phi_0 = 0$ , rezultă:

$$(4.34) \quad \Phi(t) = \omega_p t + \beta \cdot \sin(\omega_0 t),$$

unde  $\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$  se numește **indice de modulație**.

Expresia semnalului modulat în frecvență devine:

$$(4.35) \quad \begin{aligned} x_{MF}(t) &= A_p \cdot \cos(\omega_p t + \beta \cdot \sin(\omega_0 t)) = \\ &= A_p \cdot \cos(\omega_p t) \cdot \cos[\beta \cdot \sin(\omega_0 t)] - \\ &\quad - A_p \cdot \sin(\omega_p t) \cdot \sin[\beta \cdot \sin(\omega_0 t)] \end{aligned}$$

Funcțiile trigonometrice care au ca argument alte funcții trigonometrice se pot exprima prin funcții Bessel de speța I:

$$(4.36) \quad \cos[\beta \cdot \sin(\omega_0 t)] = J_0(\beta) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} J_{2i}(\beta) \cdot \cos(2i\omega_0 t)$$

$$(4.37) \quad \sin[\beta \sin(\omega_0 t)] = 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} J_{2i-1}(\beta) \cdot \sin[(2i-1)\omega_0 t]$$

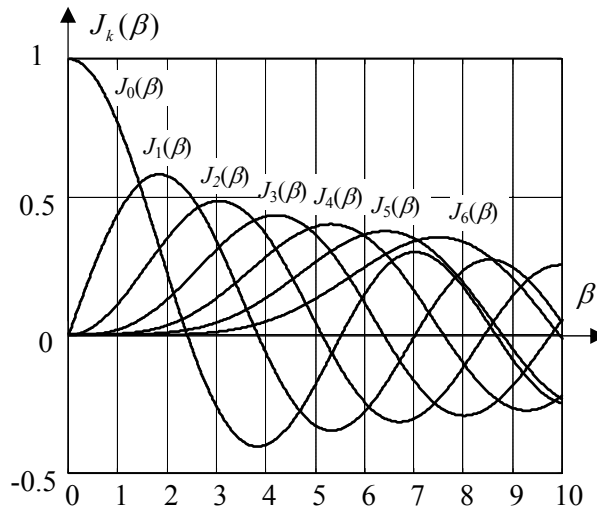


Fig. 4.25 Primele 7 funcții Bessel de speța I

Membrul drept al relației (4.35) va conține produse de forma:

$$2 \cos(\omega_p t) \cdot \cos(2i\omega_0 t) = \cos[(\omega_p + 2i\omega_0) \cdot t] + \cos[(\omega_p - 2i\omega_0) \cdot t]$$

$$2 \sin(\omega_p t) \cdot \sin(2i\omega_0 t) = \cos[(\omega_p + (2i+1)\omega_0) \cdot t] - \cos[(\omega_p - (2i+1)\omega_0) \cdot t]$$

Drept urmare, relația (4.35) se rescrie sub forma:

$$(4.38) \quad x_{MF}(t) = A_p \cdot J_0(\beta) \cdot \cos(\omega_p t) + A_p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\beta) \cdot \left\{ \cos[(\omega_p + k\omega_0) \cdot t] + (-1)^k \cos[(\omega_p - k\omega_0) \cdot t] \right\}$$

Funcțiile Bessel pot fi și de ordin negativ, în care caz este valabilă relația:

$$(4.39) \quad J_{-k}(\beta) = \begin{cases} J_k(\beta), & k \text{ par} \\ -J_k(\beta), & k \text{ impar} \end{cases}$$

Dacă în relația (4.38), indicele  $k$  din sumă se extinde de la  $-\infty$  la  $+\infty$ , atunci relația (4.39) permite scrierea expresiei (4.38) a semnalului  $MF$  într-o formă foarte compactă:

$$(4.40) \quad x_{MF}(t) = A_p \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cdot \cos[(\omega_p + k\omega_0) \cdot t]$$

Admițând, pentru simplificare,  $A_p = 1$ , rezultă că armonicile aferente pulsațiilor  $\omega_p \pm k\omega_0$  sunt date de funcțiile Bessel  $J_{\pm k}(\beta)$ . În fig. 4.25 sunt date graficele primelor 7 funcții Bessel de speța I:  $J_k(\beta)$ ,  $k = 0, 1, \dots, 6$ .

Aceste funcții au fost generate cu funcția Matlab `besselj`, utilizată în cadrul următorului program:

```
d=[0:0.01:10];
for i=1:7,
    p=besselj(i-1,0:0.01:10);
    plot(d,p);
    hold on;
    axis([0 10 -0.5 1]);
    grid;
end;
```

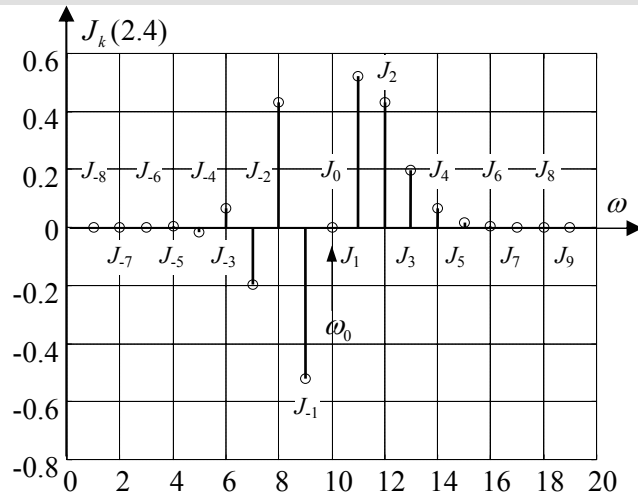


Fig. 4.26 Spectrul semnalului  $MF$  pentru  $\beta = 2.4$

Spectrul semnalului  $MF$  se obține folosind următorul program Matlab:

```

beta=[0.3 2.4 5.5];
for k=1:length(beta),
    for i=1:19,
        j=i-10;
        ind(i)=i;
        p(i)=besselj(j,beta(k));
    end;
    stem(ind,p);grid;pause;
end;
    
```

Din cele prezentate se desprind următoarele concluzii:

- Chiar pentru cazul cel mai simplu, al unui semnal modulator cosinusoidal, spectrul semnalului  $MF$  e larg și complex.
- Spectrul depinde foarte mult de **indicele de modulație**,  $\beta$ . Este posibil să se adopte un indice de modulație pentru care  $J_0(\beta) = 0$ , având în acest caz un semnal modulat cu purtătoare suprimată.
- Este necesar să se determine valoarea indicelui de modulație pentru care proprietățile semnalului  $MF$  sunt avantajoase din punct de vedere al comunicațiilor.

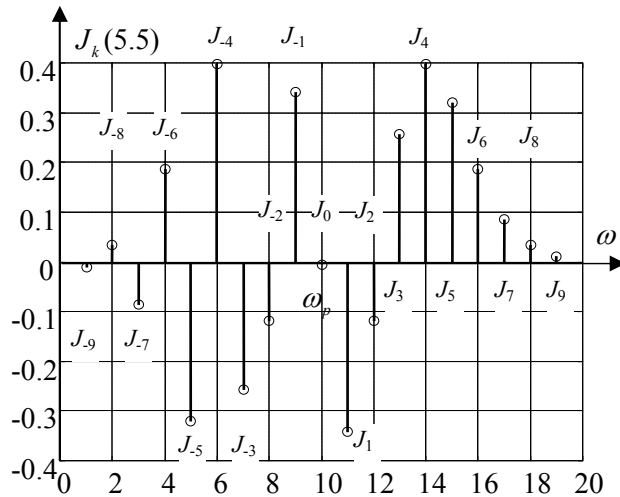


Fig. 4.27 Spectrul semnalului  $MF$  pentru  $\beta$  mare ( $\beta = 5.5$ )

Vom calcula *puterea medie a semnalului MF* pe baza modelului (4.40) al semnalului:

$$(4.41) \quad P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x_{MF}^2(t) dt = \frac{A_p}{T} \cdot \int_0^T \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\beta) \cdot \cos[(\omega_p + k\omega_0) \cdot t] \right\}^2 dt$$

Dezvoltând pătratul de sub integrală, rezultă 2 categorii de termeni:

- termeni care conțin pătratul componentelor cosinusoidale. Integrând acești termeni, rezultată  $T/2$ , adică pătratul normei funcției trigonometrice;

• termeni care conțin produse a două componente cosinusoidale distincte. Integrala acestor termeni este nulă, întrucât funcțiile cosinusoidale sunt ortogonale.

În consecință, expresia (4.41) devine:

$$(4.42) \quad P = \frac{A_p^2}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta) = \frac{A_p^2}{2},$$

deoarece:

$$(4.43) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = 1$$

Rezultă că puterea semnalului  $MF$  este independentă de indicele de modulație, indiferent dacă se aplică sau nu semnal modulator.

Vom analiza în continuare următoarea relație:

$$(4.44) \quad P = \frac{A_p^2}{2} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k^2(\beta)$$

Se pune problema determinării benzii din spectrul semnalului  $MF$ . Teoretic, spectrul este infinit, componentele spectrale având pulsația  $\omega_p \pm k\omega_0$ . În practică se consideră că banda este finită, ea limitându-se la ansamblul armonicilor care dau 99% din puterea semnalului  $MF$ . Deci, în (4.44) limitele de sumare se consideră finite, de la  $-N$  la  $+N$ . Se impune ca, în cazul limitelor finite, suma să scadă de la 1 (relația (4.43)), la 0.99:

$$(4.45) \quad \sum_{k=-N}^N J_k^2(\beta) = 0.99$$

În condițiile în care se cunoaște  $\beta$ , această relație se poate considera ca o ecuație cu necunoscuta  $N$ . Valoarea aproximativă a soluției este:

$$(4.46) \quad N = [\beta + 1],$$

unde  $[\cdot]$  reprezintă partea întreagă. Banda semnalului  $MF$  va fi egală cu domeniul de frecvențe:  $[\omega_p - N\omega_0; \omega_p + N\omega_0]$ . Lărgimea benzii este:

$$(4.47) \quad B = 2(\beta + 1) \cdot \omega_0$$

Vom analiza în continuare două cazuri: cazul semnalelor  $MF$  cu indice de modulație redus, respectiv cu indice modulație mare.

Pentru **indice de modulație redus**, se ține cont că funcția:

$$J_k(\beta) = \left(\frac{\beta}{2}\right)^k \cdot \left\{ \frac{1}{k!} - \frac{\beta^2}{2^2 \cdot 1!(k+1)!} + \frac{\beta^4}{2^4 \cdot 2!(k+2)!} - \frac{\beta^6}{2^6 \cdot 3!(k+3)!} + \dots \right\}$$

se poate exprima astfel:

$$(4.48) \quad J_k(\beta) \approx \frac{\beta^k}{k! \cdot 2^k}$$

Rezultă:  $J_0(\beta) \approx 1$ ;  $J_1(\beta) \approx \frac{\beta}{2}$ ;  $J_2(\beta) \approx \frac{\beta^2}{8}$ ; ....

Dacă se consideră  $\beta < 0.4$ ,  $J_2(\beta)$  devine neglijabil. Drept consecință, relația (4.40) devine:

$$(4.49) \quad x_{MF}(t) \approx A_p \cos(\omega_p t) + A_p \frac{\beta}{2} \left\{ \cos[(\omega_p + \omega_0)t] - \cos[(\omega_p - \omega_0)t] \right\}$$

Spectrul semnalului *MF* cu indice redus de modulație este prezentat în fig. 4.28. Se constată că, dacă  $\beta$  este mic, banda semnalului *MF* e aceeași ca la semnalul *MA*. Indicele de modulație redus se utilizează în transmisiuni de date.

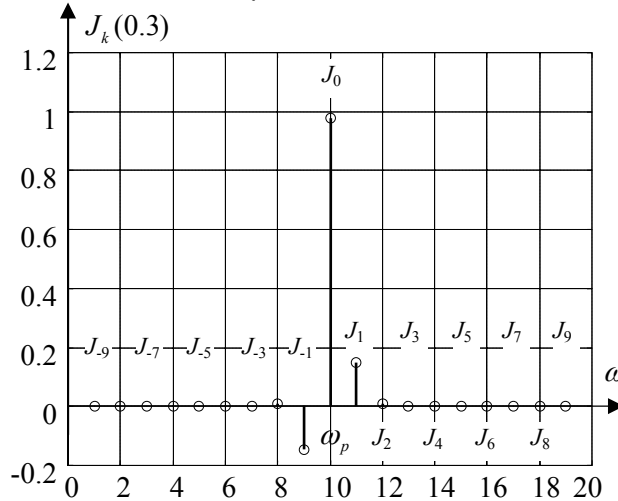


Fig. 4.28 Spectrul semnalului *MF* cu  $\beta$  redus ( $\beta = 0.3$ )

**Reprezentarea fazorială a semnalului *MF* cu indice redus de modulație** (fig. 4.29). Față de reprezentarea similară a semnalului *MA*, dată în fig. 4.4, există 2 diferențe: gradul de modulație  $m$  este înlocuit prin indicele de modulație  $\beta$  și componenta laterală de pulsație  $\omega_p - \omega_0$  are semnul minus. În consecință, fazorul corespunzător acestei componente este orientat invers, față de cazul din fig. 4.4. În această situație se constată din fig. 4.29 că însumarea la vectorul semnalului purtător a rezultantei componentelor laterale conduce la un fazor rotitor care pendulează cu pulsația  $\omega_0$  în jurul fazorului purtătoarei, aceasta rotindu-se, la rândul ei, cu pulsația  $\omega_p$ .

În radio-comunicații se utilizează **indice de modulație mare**, adică  $\beta \gg 1$ . Neglijând pe 1 în raport cu  $\beta$ , din relația (4.47) rezultă:

$$(4.50) \quad B = 2(\beta + 1) \cdot \omega_0 \approx 2\beta\omega_0$$

sau, ținând cont de faptul că  $\beta = \Delta\omega/\omega_0$ :

$$(4.51) \quad B = 2 \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \cdot \omega_0 = 2\Delta\omega$$

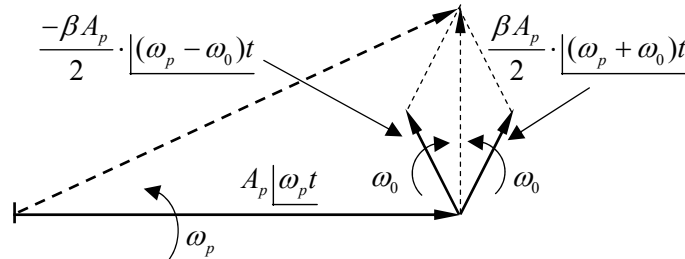


Fig. 4.29 Reprezentarea fazorială a semnalului MF cu indice redus de modulație

Deviația de frecvență este un parametru al modulației. Constatăm ca banda semnalului MF nu depinde de frecvența semnalului modulator,  $\omega_0$ . În radiocomunicații se adoptă  $\Delta f = 75$  kHz, de unde rezultă banda  $B = 150$  kHz.

Din punct de vedere practic, semnalul MF se întâlnește cel mai frecvent în două situații specifice:

- cu *indice redus de modulație* ( $\beta < 0.4$ ) pentru comunicații de date;
- cu *indice mare de modulație*, când banda semnalului MF este  $B = 2\Delta\omega$ , caz utilizat în radiodifuziune.

#### 4.3.3. Analiza spectrală a semnalului modulat în fază

Vom presupune că semnalul modulator este sinusoidal de pulsație  $\omega_0$ . Rezultă:

$$(4.52) \quad \Phi(t) = \varphi_p(t) + \Delta\varphi \cdot \sin(\omega_0 t),$$

unde  $\Delta\varphi$  este deviația maximă de fază,  $\varphi_p(t) = \varphi_p t$  este faza purtătoarei nemondate. Semnalul MP este:

$$(4.53) \quad \begin{aligned} x_{MP}(t) &= A_p \cdot \cos[\Phi(t)] = A_p \cdot \cos[\omega_p t + \Delta\varphi \cdot \sin(\omega_0 t)] = \\ &= A_p \cdot \cos[\omega_p t + \alpha \cdot \sin(\omega_0 t)] \end{aligned}$$

La modulația de fază *indicele de modulație* se notează cu  $\alpha$  și este deviația maximă de fază:

$$(4.54) \quad \alpha = \Delta\varphi$$

Pentru un  $\alpha$  oarecare, spectrul semnalului MP este similar spectrului semnalului MF:



$$(4.55) \quad x_{MP}(t) = A_p J_0(\alpha) \cdot \cos(\omega_p t) + A_p \sum_{k=1}^{\infty} J_k(\alpha) \left\{ \cos[(\omega_p + k\omega_0) \cdot t] + (-1)^k \cos[(\omega_p - k\omega_0) \cdot t] \right\}$$

Dacă indicele de modulație este mic, adică  $\alpha < 0.4$ , se obține un semnal cu banda  $B = 2\omega_0$ , de tip purtătoare cu două componente laterale, exact ca la modulația în frecvență. Acest caz se utilizează efectiv în comunicații de date.

Dacă indicele  $\alpha$  este mare, banda semnalului  $MP$  are expresia  $B = 2(\alpha + 1) \cdot \omega_0$ , care depinde de pulsația  $\omega_0$  a semnalului modulator. Deviația maximă de fază este cuprinsă în domeniul  $[-\pi, \pi]$ , deci  $\alpha = \Delta\varphi$  nu poate lua valori mai mici de  $\pi$ . Rezultă că, spre deosebire de  $MF$ , modulația  $MP$  nu se poate aplica la valori mari ale indicelui de modulație. În schimb, modulația de fază cu *indice redus de modulație* se utilizează frecvent în comunicațiile de date.

#### 4.3.4. Semnale modulate $MP$ și $MF$ cu indice redus de modulație

În cele ce urmează vom considera un semnal modulator oarecare,  $x(t)$ . Fie un semnal  $MP$ :

$$x_{MP}(t) = A_p \cdot \cos \Phi(t),$$

cu  $\Phi(t) = \omega_p t + k_x \cdot x(t)$ , în care  $k_x \equiv \alpha$  este foarte mic, iar  $|x(t)| \leq 1$ .

Expresia semnalului  $MP$  devine:

$$(4.56) \quad x_{MP}(t) = A_p \cdot \cos(\omega_p t) \cdot \cos[k_x \cdot x(t)] - A_p \cdot \sin(\omega_p t) \cdot \sin[k_x \cdot x(t)],$$

sau, ținând cont că  $|k_x \cdot x(t)|$  are valori foarte mici și  $\cos[k_x \cdot x(t)] \approx 1$ ,  $\sin[k_x \cdot x(t)] \approx k_x \cdot x(t)$ ,

$$(4.57) \quad x_{MP}(t) \approx A_p \cdot \cos(\omega_p t) - A_p k_x \cdot x(t) \cdot \sin(\omega_p t)$$

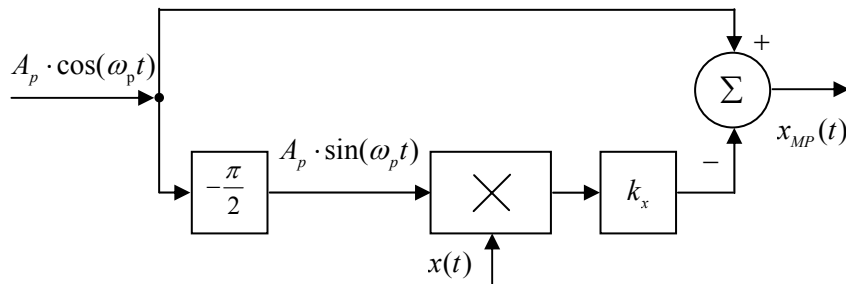


Fig. 4.30 Modulator  $MP$  cu indice redus de modulație

Pe baza acestei relații se obține schema modulatorului  $MP$  cu indice redus de modulație, reprezentată în fig. 4.30.

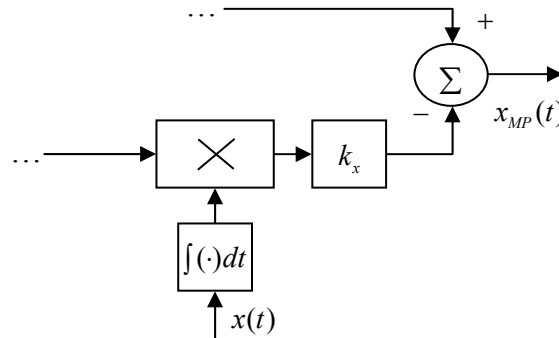
Pentru determinarea caracteristicii spectrale a semnalului  $MP$  se aplică transformata Fourier relației (4.57), pe baza utilizării distribuției  $\delta$ . Folosind relațiile (3.43) și (3.66), rezultă:

$$X_{MP}(\omega) = \pi A_p \cdot [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] - \frac{1}{2\pi} A_p k_x \cdot X(\omega) \otimes \left\{ \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_p) - \delta(\omega + \omega_p)] \right\}$$

sau:

$$(4.58) \quad X_{MP}(\omega) = \pi A_p \cdot [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] + j \frac{k_x}{2} A_p \cdot [X(\omega - \omega_p) - X(\omega + \omega_p)]$$

Se constată că semnalul  $MP$  are purtătoare și două benzi laterale. Față de modulația de amplitudine (vezi relația (4.14)) apar diferențe numai la fazele componentelor laterale, densitățile de amplitudini fiind practic identice (în relația (4.58) intervine  $k_x$ , în loc de gradul de modulație  $m$  din expresia (4.14)).



**Fig. 4.31** Modificarea schemei din fig. 4.30, pentru a se obține  $MF$  cu indice redus de modulație

Modulația de frecvență se obține substituind semnalul  $x(t)$  aplicat modulatorului prin  $\int_0^t x(\tau) d\tau$  (fig. 4.31). Caracteristica spectrală a semnalului

$MF$  cu indice mic de modulație este:

$$X_{MF}(\omega) = \pi A_p [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] + \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{j k_x}{2} \cdot A_p \cdot [X(\omega - \omega_p) - X(\omega + \omega_p)]'$$

sau:

$$(4.59) \quad X_{MF}(\omega) = \pi A_p [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] + \frac{k_x A_p}{2\omega} \cdot [X(\omega - \omega_p) - X(\omega + \omega_p)]$$

## 4.4. Modulația impulsurilor

### 4.4.1. Modulația impulsurilor în amplitudine (MIA)

Există două variante de modulații ale impulsurilor în amplitudine:

- **naturală** (*MIA-N*),
- **uniformă** (*MIA-U*).

Pentru fiecare variantă se vor prezenta, în cele ce urmează, principiile fizice (forma unui semnal *MIA-N*, respectiv *MIA-U*) și modelele matematice respective.

### Modulația impulsurilor în amplitudine naturală

În fig. 4.32 sunt reprezentate: semnalul modulator,  $x(t)$ , semnalul purtător,  $x_p(t)$ , sub forma unui tren de impulsuri de amplitudine unitară, de perioadă  $T$  și durată  $\tau$ , și semnalul modulat,  $x_{MIA-N}(t)$ . Se constată că în intervalul  $\tau$  corespunzător lățimii *amplitudinea impulsurilor urmărește semnalul modulator  $x(t)$ .*

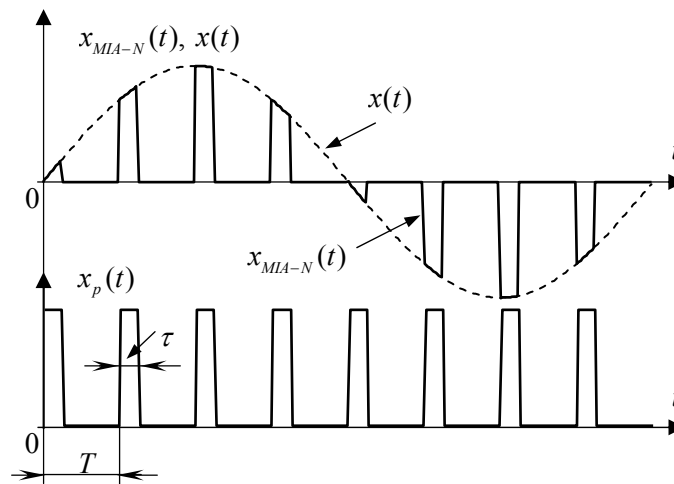


Fig. 4.32 Modulația impulsurilor în amplitudine naturală

Este evident că semnalul modulat natural este produsul semnalelor  $x(t)$  și  $x_p(t)$ :

$$(4.60) \quad x_{MIA-N}(t) = x(t) \cdot x_p(t)$$

Trenul de impulsuri  $x_p(t)$  poate fi modelat pornind de la un singur impuls,  $f(t)$ , de amplitudine unitară și durată  $\tau$  (fig. 4.33). Semnalul  $x_p(t)$  este, de fapt, o sumă de impulsuri similare, care apar la momentele de timp  $iT$ , pentru  $i \in (-\infty, +\infty)$ , adică:

$$(4.61) \quad x_p(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t - iT)$$

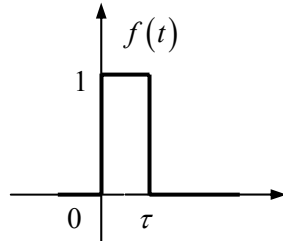
Vom calcula produsul de convoluție între funcția  $f(t)$  și distribuția  $\delta$  periodică, adică  $f(t) \otimes \delta_T(t)$ . Utilizând expresia (3.47) a distribuției delta periodice și proprietatea de sondare în timp a distribuției  $\delta$ , rezultă:

$$\begin{aligned} f(t) \otimes \delta_T(t) &= f(t) \otimes \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-iT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t) \otimes \delta(t-iT) \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(t-iT) = x_p(t) \end{aligned}$$

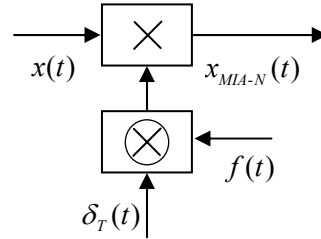
În consecință:

$$(4.62) \quad x_p(t) = f(t) \otimes \delta_T(t),$$

iar modelul matematic temporal al semnalului  $MIA-N$  este cel reprezentat în fig. 4.34.



**Fig. 4.33** Impuls de amplitudine unitară



**Fig. 4.34** Modelul matematic temporal al unui semnal  $MIA-N$

Vom deduce în continuare modelul frecvențial al acestui semnal. Mai întâi calculăm caracteristica spectrală a purtătoarei, pe baza relației (4.62):

$$(4.63) \quad X_p(\omega) = \mathcal{F}\{f(t) \otimes \delta(t)\} = F(\omega) \cdot \mathcal{F}\{\delta_T(t)\}$$

Pentru a deduce transformata Fourier a impulsului din fig. 4.33,  $F(\omega)$ , se pornește de la caracteristica spectrală a impulsului unitar,  $\Delta(t) = u(t)$  reprezentat în fig. 3.5:  $U(\omega) = \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$ . Semnalul  $f(t)$  diferă de  $u(t)$  prin faptul că are aria  $\tau$  în loc de 1, și prin faptul că este întârziat cu  $\tau/2$ . În consecință,

$$(4.64) \quad F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \tau \cdot e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \cdot \mathcal{F}\{u(t)\} = \tau \cdot e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

Caracteristica spectrală a distribuției  $\delta$  periodice are expresia (3.52) unde  $\omega_0$  este, în cazul de față, pulsația purtătoarei:

$$(4.65) \quad \omega_p = \frac{2\pi}{T}$$

Deci:

$$(4.66) \quad \mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \omega_p \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - i\omega_p)$$

Înlocuind (4.64) și (4.66) în (4.63), se obține:

$$(4.67) \quad X_p(\omega) = \tau\omega_p \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \delta(\omega - i\omega_p),$$

sau, ținând cont de proprietatea (3.35) a distribuției  $\delta$ :

$$(4.68) \quad X_p(\omega) = \tau\omega_p \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ji\omega_p\tau}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{i\omega_p\tau}{2}\right) \cdot \delta(\omega - i\omega_p)$$

În continuare se aplică transformata Fourier relației (4.60) și, pe baza proprietății (3.66), avem:

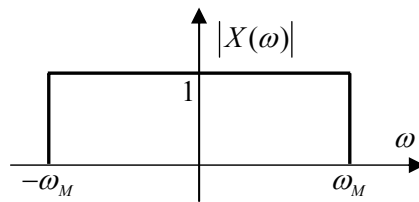
$$(4.69) \quad X_{MA-N}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot X(\omega) \otimes X_p(\omega),$$

sau, înlocuind  $X_p(\omega)$  cu relația (4.68) și  $\omega_p$  cu expresia (4.65), rezultă:

$$(4.70) \quad X_{MA-N}(\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ji\omega_p\tau}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{i\omega_p\tau}{2}\right) \cdot \delta(\omega - i\omega_p) \otimes X(\omega),$$

sau:

$$(4.71) \quad X_{MA-N}(\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ji\omega_p\tau}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{i\omega_p\tau}{2}\right) \cdot X(\omega - i\omega_p)$$



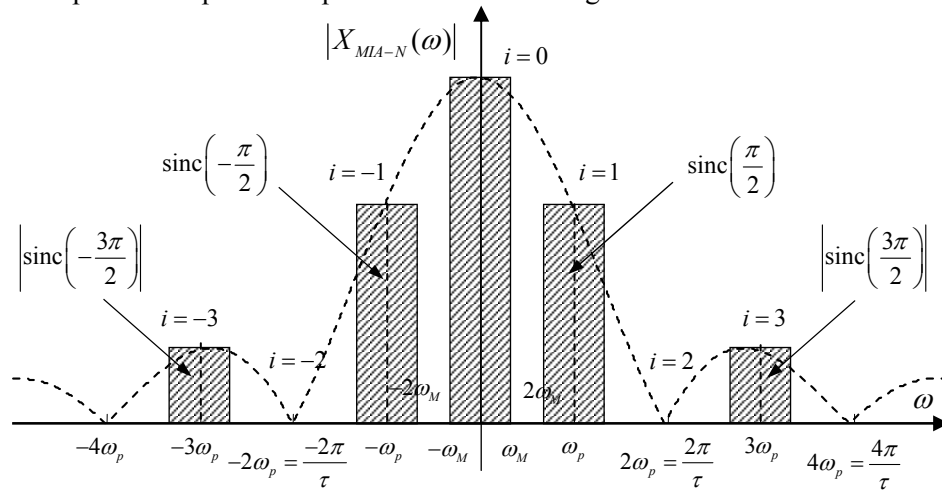
**Fig. 4.35** Distribuția spectrală a semnalului modulator

Fie distribuția spectrală a densității de amplitudine a semnalului modulator, reprezentată simbolic ca în fig. 4.35, unde  $\omega_M$  este pulsația maximă ce definește banda semnalului, iar  $f_M = \frac{\omega_M}{2\pi}$  este frecvența maximă din spectrul semnalului. Pentru a face o reprezentare grafică a densității spectrale de amplitudini,  $|X_{MA-N}(\omega)|$ , vom considera o situație concretă

privind pulsația  $\omega_p$  și raportul dintre perioada  $T$  și lățimea  $\tau$  a impulsurilor purtătoare:  $\omega_p = 3\omega_M$ ;  $\tau = \frac{T}{2}$ .

Sinusul cardinal din expresia (4.71) se anulează pentru  $\frac{i\omega_p\tau}{2} = k\pi$ ;  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ , adică la pulsațiile discrete  $i\omega_p = \frac{2\pi}{\tau}k$ ;  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Pentru  $i=0$  în suma din (4.71), avem  $|X_{MIA-N}(\omega)| = \frac{\tau}{T} \cdot |X(\omega)|$ , care corespunde componentei spectrale centrale din fig. 4.36.



**Fig. 4.36** Funcția spectrală  $|X_{MIA-N}(\omega)|$

Pentru  $i = \pm 1$ , componentele spectrale rezultate din (4.71) sunt  $|X_{MIA-N}(\omega)| = \frac{\tau}{T} \cdot \left| \text{sinc}\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) \right| \cdot |X(\omega \pm \omega_p)|$  (fig. 4.36), întrucât  $\frac{i\omega_p\tau}{2} = \pm \frac{\pi}{2}$ .

Pentru  $i = \pm 2$  avem  $\text{sinc}\left(\pm \frac{2\omega_p\tau}{2}\right) = \text{sinc}(\pm\pi) = 0$ , deci componenta spectrală din jurul pulsației  $2\omega_p$  lipsește, etc. Se observă că avem o deplasare a funcției spectrale  $|X(\omega)|$  în jurul pulsațiilor  $\pm i\omega_p$ , simultan cu înmulțirea acestor funcții spectrale cu coeficienții numerici  $\left| \text{sinc}\left(\frac{i\omega_p\tau}{2}\right) \right| = \left| \text{sinc}\left(\pm i \frac{\pi}{2}\right) \right|$ .

Teoretic, reconstituirea semnalului de bază din semnalul modulat se poate realiza prin două metode (fig. 4.37):

- fie cu un filtru trece jos (FTJ), care extrage din funcția spectrală a semnalului modulat componenta centrală, aferentă lui  $i=0$  (fig. 4.37, a)); această variantă este folosită întotdeauna, pentru că este foarte simplă. În

practică,  $\omega_p \gg \omega_M$  și  $\tau \ll T$ , astfel încât separarea cu FTJ a componentei centrale se face cu erori neglijabile;

- fie cu un filtru trece bandă (FTB), care extrage o componentă laterală, de exemplu componenta corespunzătoare lui  $i = \pm 1$ . La ieșirea filtrului se obține caracteristica spectrală fără purtătoare și cu două benzi laterale, aferentă unei modulații pe purtător armonic de tip produs; semnalul respectiv se demodulează cu un demodulator de tip produs (fig. 4.37, b)).

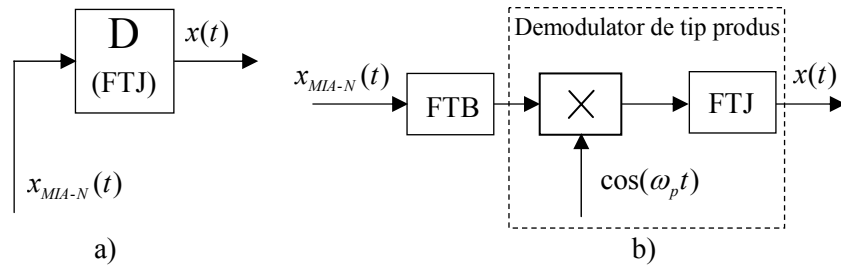


Fig. 4.37 Extragerea semnalului de bază din semnalul MIA-N

### Modulația impulsurilor în amplitudine uniformă

În fig. 4.38, c) este ilustrat un semnal MIA-U. Se constată că, în intervalul  $\tau$  corespunzător lățimii, amplitudinea impulsurilor *nu* urmărește semnalul  $x(t)$ , ci are o valoare constantă, egală cu  $x(iT)$ .

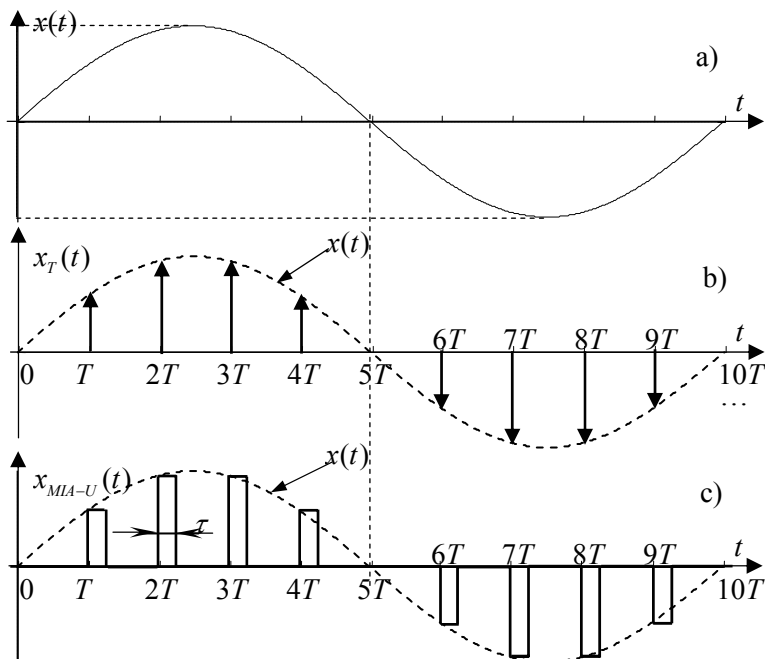


Fig. 4.38 Modulația impulsurilor în amplitudine

Pentru modelarea acestui semnal, se consideră mai întâi că semnalul  $x(t)$  modulează un tren de impulsuri  $\delta$ , adică o distribuție delta periodică. Rezultatul este semnalul  $x_T(t)$  (vezi fig. 4.38, b)), format dintr-o serie de impulsuri  $\delta$  având arii egale cu  $x(iT)$ . În continuare se realizează convoluția impulsului  $f(t)$  (vezi fig. 4.33) cu semnalul  $x_T(t)$ . Așa cum s-a arătat în secțiunea anterioară (și va rezulta și din relațiile care urmează), prin această convoluție se atribuie fiecărui impuls-distribuție din  $x_T(t)$  un impuls  $f(t)$  cu durată  $\tau$  și amplitudine egală cu aria impulsului-distribuție, adică  $x(iT)$ . Rezultă, deci, semnalul  $x_{MIA-U}(t)$ .

Modelul matematic temporal este format din relațiile:

$$(4.72) \quad x_T(t) = x(t) \cdot \delta_T(t)$$

$$(4.73) \quad x_{MIA-U}(t) = x_T(t) \otimes f(t)$$

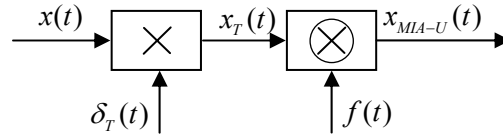


Fig. 4.39 Modelul matematic temporal al unui semnal MIA-U

Schema care ilustrează acest model matematic este dată în fig. 4.39.

Pentru deducerea modelului frecvențial al semnalului  $x_{MIA-U}(t)$  se determină mai întâi caracteristica spectrală a semnalului  $x_T(t)$ :

$$(4.74) \quad \begin{aligned} X_T(\omega) &= \mathcal{F}\{x(t) \cdot \delta_T(t)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot X(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\delta(t)\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot X(\omega) \otimes [\omega_p \delta_{\omega_p}(\omega)] = \frac{1}{T} X(\omega) \otimes \delta_{\omega_p}(\omega) = \\ &= \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(\omega) \otimes \delta(\omega - i\omega_p) \end{aligned}$$

sau:

$$(4.75) \quad X_T(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(\omega - i\omega_p)$$

Aplicând transformata Fourier relației (4.73) se obține:

$$X_{MIA-U}(\omega) = X_T(\omega) \cdot F(\omega),$$

sau, înlocuind  $F(\omega)$  și  $X_T(\omega)$  prin expresiile (4.64) și, respectiv, (4.75):

$$(4.76) \quad X_{MIA-U}(\omega) = \frac{\tau}{T} \cdot e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(\omega - i\omega_p)$$

Pentru ilustrarea grafică a funcției spectrale  $|X_{MIA-U}(\omega)|$  vom considera



aceiași parametri ai semnalelor  $x(t)$  și  $x_p(t)$ :  $\omega_p = 3\omega_M$ , unde  $\omega_M$  definește banda semnalului modulator (fig. 4.35) și  $\tau = T/2$ . Funcția spectrală  $|X_{MIA-U}(\omega)|$  este reprezentată în fig. 4.40.

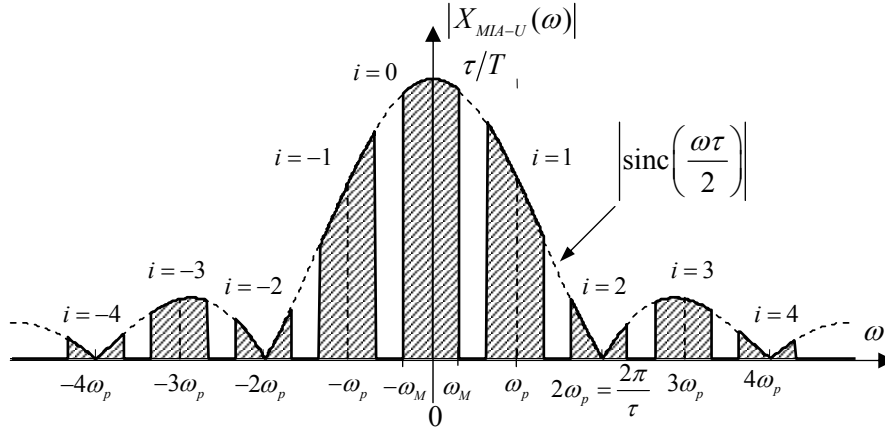


Fig. 4.40 Funcția spectrală  $|X_{MIA-U}(\omega)|$

Spre deosebire de cazul  $MIA-N$ , aici funcția spectrală  $|X(\omega)|$  este deplasată în jurul pulsațiilor  $\pm i\omega_p$  și, simultan, este înmulțită cu funcția  $|\text{sinc}(\omega\tau/2)|$ . Produsul celor două funcții face ca distribuția densității spectrale din componentele spectrale situate în jurul pulsațiilor  $\pm i\omega_p$  să nu mai corespundă cu cea a semnalului de bază. Distorsiunile produse acestor componente prin înmulțirea cu funcția  $\text{sinc}(\omega\tau/2)$  se numesc **distorsiuni de apertură**. Ele sunt mici doar la componenta centrală (la  $i=0$ ). Din acest motiv, singura soluție de extragere a semnalului de bază din semnalul  $MIA-U$  constă în utilizarea unui FTJ care extrage această componentă centrală. Pentru ca efectul de apertură să fie neglijabil, este necesar ca durata  $\tau$  a impulsurilor să fie mică. În acest caz pulsația  $2\pi/\tau$ , la care se anulează funcția  $\text{sinc}(\omega\tau/2)$ , este mare și panta acestei funcții este foarte mică în zona centrală a caracteristicii spectrale.

#### 4.4.2. Principiul multiplexării în timp a semnalelor

Principiul multiplexării în timp este ilustrat în fig. 4.41. Cele trei semnale,  $x^A(t)$ ,  $x^B(t)$  și  $x^C(t)$ , care se transmit pe același canal fizic prin multiplexare în timp, modulează în amplitudine trenuri de impulsuri. În cazul general, purtătoarele utilizate în cele trei procese de modulație sunt decalate în timp, astfel încât impulsurile modulate în amplitudine nu se suprapun.

În schema din fig. 4.41, realizarea  $MIA-N$  la emisie și selecția canalelor la recepție se realizează cu comutatoare electronice sinfazice. Perioada  $T$  se

împarte în  $n$  intervale egale,  $n$  fiind numărul de semnale care trebuie multiplexate. Fiecare semnal se transmite distinct într-un astfel de interval, sub forma unor impulsuri modulate în amplitudine. Lățimea impulsurilor  $\tau$  (intervalul de timp cât comutatorul stă pe o poziție) se alege sensibil mai mică decât  $T/n$ . În aceste condiții, pe linia fizică de comunicație, impulsurile aferente semnalelor care se transmit „simultan” se succed întrețesut, fără a se interfera. La recepție, după separarea semnalelor  $MIA-N$  aferente celor trei canale, extragerea semnalelor de bază se face cu ajutorul filtrelor trece jos.

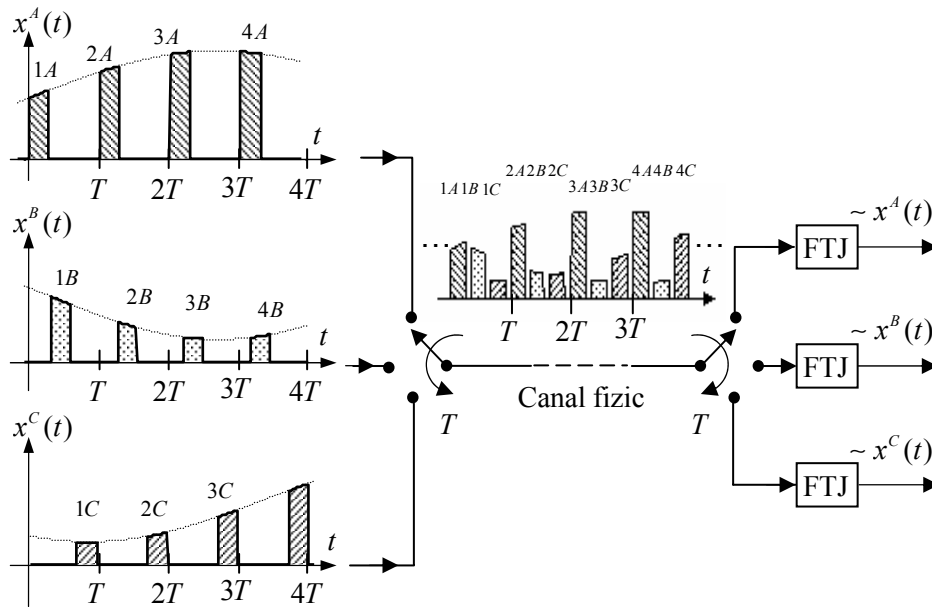


Fig. 4.41 Principiul multiplexării în timp

#### 4.4.3. Modulația impulsurilor în fază și în frecvență

Uzual, modulația impulsurilor în fază se numește modulație în poziție a impulsurilor. Ca și *MIA*, modulația impulsurilor în poziție (*MIP*) poate fi: **naturală** (*MIP-N*) și **uniformă** (*MIP-U*).

##### Modulația naturală a impulsurilor în poziție

Fie  $x_p(t)$  semnalul purtător, sub forma unui tren de impulsuri de amplitudine constantă ( $A_p=1$ ), perioadă  $T$  și durată  $\tau$  ( $\tau \ll T$ ). Notăm cu  $t_0$  faza impulsurilor, adică întârzierea/avansul față de momentul de timp care reprezintă începutul perioadei. În fig. 4.42 sunt ilustrate situațiile când:  $t_0 = 0$ ,  $t_0 > 0$  și  $t_0 < 0$ .

Un semnal *MIP* are faza variabilă, în funcție de semnalul modulator,  $x(t)$ :

$$(4.77) \quad x_{MIP}(t) = x_p[t + \Delta p(t)],$$

unde:

$$(4.78) \quad \Delta p(t) = \Delta p_M x(t); |x(t)| \leq 1$$

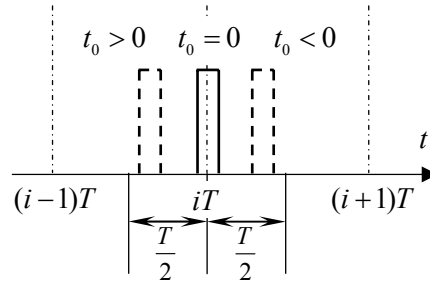


Fig. 4.42 Impulsuri cu diverse valori ale fazei

Variația maximă a fazei/poziției,  $\Delta p_M$ , trebuie să fie mai mică decât  $T/2$ , pentru ca o comutare bruscă de la o valoare extremă negativă la o valoare extremă pozitivă a semnalului modulator să nu conducă la interferența sau suprapunerea impulsurilor vecine.

La un semnal cu modulația impulsurilor în frecvență (*MIF*), se consideră relația cunoscută între fază și frecvență (faza se obține prin integrarea frecvenței):

$$\Delta p(t) = k_p \int_0^t x(\tau) d\tau,$$

iar relația generală a unui semnal *MIF* este:

$$(4.79) \quad x_{MIF}(t) = x_p \left[ t + k_p \int_0^t x(\tau) d\tau \right]$$

Vom considera acum un modulator pentru obținerea *MIP* (fig. 4.43, a), funcționând cu un semnal modulator sinusoidal de pulsație  $\omega_0$ . Relația (4.78) devine:

$$(4.80) \quad \Delta p(t) = \Delta p_M \cdot \sin(\omega_0 t)$$

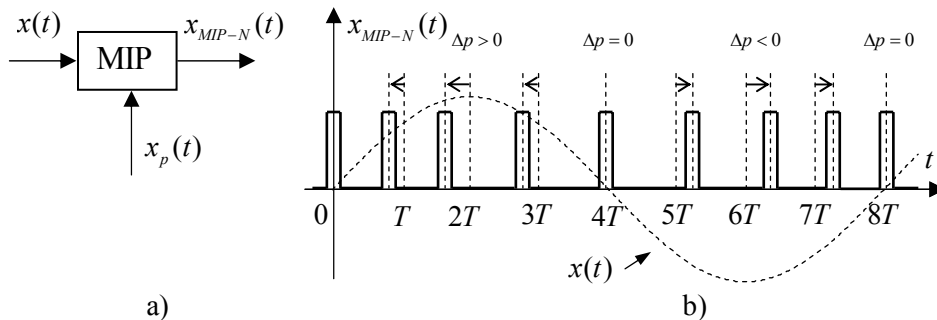


Fig. 4.43 Modulația naturală a impulsurilor în poziție

La modulația naturală a impulsurilor în poziție, deplasarea  $\Delta p(t)$  a impulsurilor este definită în raport cu verticala mediană a fiecărui impuls de lățime  $\tau$ . Ilustrarea unui semnal *MIP-N* este dată în fig. 4.43, b). Expresia semnalului  $x_{MIP-N}(t)$  este:

$$(4.81) \quad x_{MIP-N}(t) = x_p [t + \Delta p_M \sin(\omega_0 t)]$$

Pentru a examina relația dintre *MIP* și *MIF*, vom considera un semnal *MIF* cu semnal modulator cosinusoidal, de pulsație  $\omega_0$ . Semnalul purtător va avea o variație a pulsației proporțională cu semnalul modulator, adică:

$$(4.82) \quad \Delta \omega_p(t) = \Delta \omega_M \cdot \cos(\omega_0 t),$$

unde  $\Delta \omega_M$  determină variația maximă de frecvență a impulsurilor. Variația de fază a semnalului *MIF* este:

$$(4.83) \quad \Delta p(t) = \int_0^t \Delta \omega_p(\tau) d\tau + t_0 = \Delta \omega_M \int_0^t \cos(\omega_0 \tau) d\tau = \frac{\Delta \omega_M}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_0 t),$$

unde s-a considerat  $t_0=0$ . Notând:

$$(4.84) \quad \beta = \frac{\Delta \omega_M}{\omega_0}$$

**indicele de modulație**, rezultă:

$$(4.85) \quad \Delta p(t) = \beta \cdot \sin(\omega_0 t),$$

relație formal identică cu (4.34). Deci modelele semnalelor *MIP* și *MIF* sunt aparent identice. Există, totuși, o diferență importantă: la *MIP* deviația maximă de fază este o constantă, pe când la *MIF* indicele de modulație,  $\beta$ , care este deviația maximă de fază, depinde de frecvența semnalului modulator.

În cele ce urmează vom dezvolta modelul semnalului *MIP-N*, având ca obiectiv deducerea caracteristicii spectrale a acestui semnal.

Se consideră mai întâi semnalul purtător,  $x_p(t)$ , sub forma unui tren de impulsuri de arie  $\tau$  (amplitudine unitară și durată  $\tau$ ) și perioadă  $T$ . În §2.2.3 s-a dedus SFC pentru un tren de impulsuri unitare (amplitudine  $1/\tau$  și durată  $\tau$ ), având perioada  $T$  (vezi relația (2.38)). Adaptând relația (2.38), se obține SFC a semnalului purtător:

$$(4.86) \quad x_p(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i e^{ji\omega_p t},$$

$$(4.87) \quad \underline{A}_i = \frac{\tau}{T} \cdot \text{sinc}\left(\frac{i\omega_p \tau}{2}\right),$$

deci:

$$(4.88) \quad x_p(t) = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{i\omega_p \tau}{2}\right) \cdot e^{ji\omega_p t}$$

În §2.2.3 s-a arătat că, dacă într-un semnal periodic, având parametrii  $\underline{A}_i$  din SFC, se înlocuiește  $t$  cu  $t-\tau$ , atunci parametrii  $\tilde{\underline{A}}_i$  ai semnalului cu argument modificat sunt  $\tilde{\underline{A}}_i = \underline{A}_i e^{-ji\omega_0 \tau}$ . Vom aplica această proprietate în cazul semnalului  $MIP-N$ , care este dat de expresia (4.81). Putem considera că  $x_p(t + \Delta p_M \cdot \sin(\omega_0 t))$  este obținut din  $x_p(t)$  prin înlocuirea lui  $t$  cu  $t + \Delta p_M \cdot \sin(\omega_0 t)$ . În consecință, parametrii  $\tilde{\underline{A}}_i$  din SFC a semnalului  $MIP-N$  se obțin din parametrii  $\underline{A}_i$  ai semnalului  $x_p(t)$ , prin relația:

$$(4.89) \quad \tilde{\underline{A}}_i = \underline{A}_i \cdot e^{ji\omega_p \Delta p_M \sin(\omega_0 t)},$$

deci SFC a semnalului  $MIP-N$  este:

$$(4.90) \quad x_{MIP-N}(t) = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{i\omega_p \tau}{2}\right) \cdot e^{ji\omega_p (t + \Delta p_M \sin(\omega_0 t))}$$

Vom pune exponențiala din (4.90) sub forma:

$$(4.91) \quad e^{ji\omega_p (t + \Delta p_M \sin(\omega_0 t))} = e^{ji\omega_p t} \cdot e^{ji\omega_p \Delta p_M \sin(\omega_0 t)}$$

Constatăm că la exponentul celui de-al doilea factor din (4.91) intervine o funcție sinusoidală. Din proprietățile funcțiilor Bessel de speța I se știe că:

$$(4.92) \quad e^{ja \sin(\Omega t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(a) \cdot e^{jk\Omega t}$$

Adaptând această relație la cel de-al doilea factor din (4.91), rezultă:

$$(4.93) \quad e^{ji\omega_p \Delta p_M \sin(\omega_0 t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(i\omega_p \Delta p_M) \cdot e^{jk\omega_0 t}$$

Înlocuind consecutiv (4.93) în (4.91) și rezultatul obținut în (4.90), se obține modelul semnalului  $MIP-N$  sub forma:

$$(4.94) \quad x_{MIP-N}(t) = \frac{\tau}{T} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{i\omega_p \tau}{2}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(i\omega_p \Delta p_M) \cdot e^{j(i\omega_p + k\omega_0)t}$$

Se observă că semnalul  $MIP-N$  are un spectru discret, în sensul că există armonici numai la pulsațiile  $i\omega_p + k\omega_0$ , ( $i=\pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

Întrucât:

$$(4.95) \quad \mathcal{F}\left\{e^{j(i\omega_p + k\omega_0)t}\right\} = 2\pi\delta(\omega - i\omega_p - k\omega_0),$$

caracteristica spectrală a semnalului  $MIP-N$  rezultă de forma:

$$(4.96) \quad \begin{aligned} X_{MIP-N}(\omega) &= \mathcal{F}\{x_{MIP-N}(t)\} = \\ &= \frac{2\pi\tau}{T} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{i\omega_p\tau}{2}\right) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(i\omega_p\Delta p_M) \cdot \delta(\omega - i\omega_p - k\omega_0) \end{aligned}$$

### Modulația uniformă a impulsurilor în poziție

La acest tip de modulație deplasarea  $\Delta p(t)$  a impulsurilor este definită în raport cu frontul anterior al fiecărui impuls. Figura 4.40 prezintă atât un semnal  $MIP-U$ , cât și mecanismul de realizare a acestei modulații.

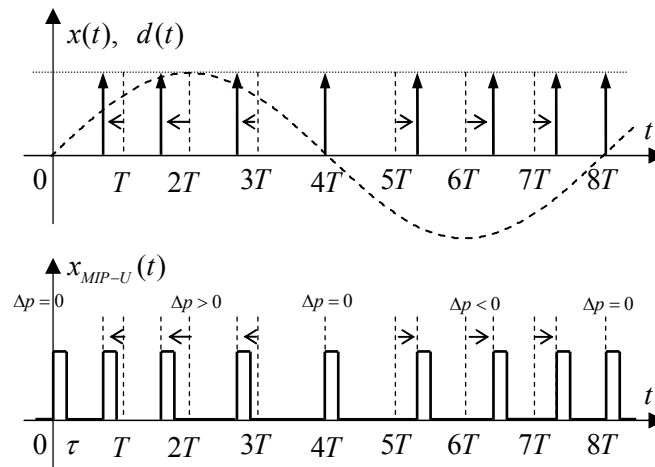


Fig. 4.44 Modulația uniformă a impulsurilor în poziție

S-a admis că semnalul de bază  $x(t)$  modulează în poziție o distribuție delta periodică, obținându-se un semnal  $MIP$ , în care impulsurile sunt de amplitudine infinită, durată zero și arie unitară, adică distribuții  $\delta$ . Acest semnal s-a notat cu  $d(t)$  în fig. 4.44 și în fig. 4.45. El se cuplează printr-un produs de convoluție cu impulsul  $f(t)$  de amplitudine unitară (vezi figura 4.29).

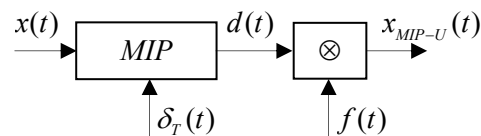


Fig. 4.45 Schema de realizare a unui semnal  $MIP-U$

Așa cum s-a arătat în §4.4.1, în urma acestei operații fiecare impuls-distribuție din semnalul  $d(t)$  se transformă într-un impuls de durată  $\tau$ , al cărui front anterior este declanșat de impulsul  $\delta$ . Rezultatul obținut este semnalul  $MIP-U$ , în care faza impulsurilor  $\Delta p(t)$ , proporțională cu semnalul modulator,  $x(t)$ , este definită prin decalarea frontului anterior al impulsurilor în raport cu momentele  $iT$ .

Fie  $\Delta p(t)$  variația fazei impulsurilor  $\delta$  din semnalul  $d(t)$ , proporțională cu semnalul modulator,  $x(t)$ . Având în vedere expresia (4.80) a variabilei  $p(t)$ , deducem valorile fazei/poziției care trebuie impuse impulsurilor  $\delta$  față de momentele discrete  $iT$ :

$$(4.97) \quad \Delta p(iT) = \Delta p_M \cdot \sin(\omega_0 iT)$$

Semnalul  $d(t)$  se deduce impunând ca impulsurile unei distribuții  $\delta$  periodice, la momentele discrete  $iT$ , să fie decalate cu  $\Delta p(iT)$ :

$$(4.98) \quad d(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[t - iT + \Delta p(iT)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta[t - iT + \Delta p_M \cdot \sin(\omega_0 iT)]$$

Vom calcula caracteristica spectrală a semnalului  $d(t)$ :

$$(4.99) \quad D(\omega) = \mathcal{F}\{d(t)\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{\delta[t - iT + \Delta p_M \cdot \sin(\omega_0 iT)]\}$$

Știind că  $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$  și aplicând teorema întârzierii (3.25), rezultă:

$$D(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega[iT - \Delta p_M \cdot \sin(\omega_0 iT)]},$$

sau:

$$(4.100) \quad D(\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega iT} \cdot e^{j\omega \Delta p_M \cdot \sin(\omega_0 iT)}$$

Pe baza relației (4.92), a doua exponențială din (4.100) se scrie sub forma  $e^{j\omega \Delta p_M \cdot \sin(\omega_0 iT)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\omega \Delta p_M) \cdot e^{j k \omega_0 T}$ , iar expresia (4.100) devine:

$$(4.101) \quad \begin{aligned} D(\omega) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega iT} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\omega \Delta p_M) \cdot e^{j k \omega_0 T} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\omega \Delta p_M) \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{j(k\omega_0 - \omega) iT} \end{aligned}$$

Întrucât:

$$(4.102) \quad x_{MIP-U}(t) = d(t) \otimes f(t),$$

caracteristica spectrală a semnalului  $MIP-U$  este:

$$(4.103) \quad X_{MIP-U}(\omega) = D(\omega) \cdot F(\omega),$$

sau, ținând cont de (4.64) și (4.101):

$$(4.104) \quad X_{MIP-U}(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega \tau}{2}\right) \cdot e^{-j\frac{\omega \tau}{2}} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(\omega \Delta p_M) \sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{j(k\omega_0 - \omega) iT}$$

Se constată că, spre deosebire de cazul  $MIP-N$ , când s-a obținut un spectru discret, aici a rezultat o caracteristică spectrală „continuu”, densitatea armonicilor fiind dată de o funcție continuă (netedă) în raport cu  $\omega$ .

#### 4.4.4. Modulația impulsurilor în durată

Modulația impulsurilor în durată ( $MID$ ) este utilizată cu predilecție în electronica de putere, fiind un procedeu fundamental de realizare a unor circuite larg răspândite în electronica industrială. Ea este numită frecvent „modulație PWM”, după abrevierea denumirii din limba engleză, “Pulse Width Modulation”.

Durata impulsurilor depinde liniar de semnalul modulator:

$$(4.105) \quad \tau(t) = \tau_p + \Delta\tau(t) = \tau_p + k \cdot x(t),$$

unde  $\tau_p$  este durata impulsurilor semnalului purtător, obținută atunci când  $x(t)=0$ .

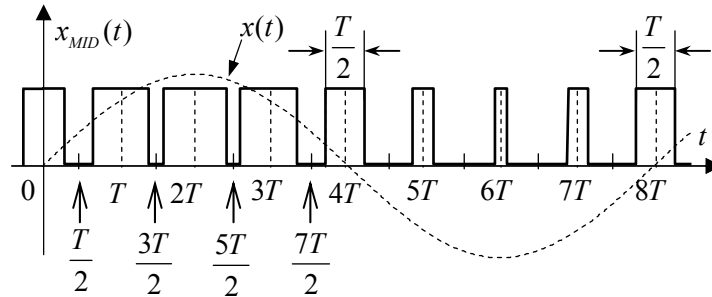


Fig. 4.46 Modulația impulsurilor în durată

Pentru a se obține o plajă de variație liniară cât mai mare a duratei  $\tau(t)$ , se adoptă:

$$(4.106) \quad \tau_p = \frac{T}{2},$$

iar termenul  $kx(t)$  trebuie să ducă la variații  $\Delta\tau(t)$  limitate între  $-T/2$  și  $T/2$ . Considerând  $-1 < x(t) < 1$ , relația (4.105) devine:

$$\tau(t) = \tau_p + \frac{T}{2} \cdot x(t),$$

sau, ținând cont de (4.106):

$$(4.107) \quad \tau(t) = \frac{T}{2} \cdot [1 + x(t)]$$

Semnalul purtător  $x_p(t)$  este un tren de impulsuri de forma celor din fig. 2.15, având însă amplitudinea unitară și durata  $\tau_p$ . Modelul semnalului, sub forma SFC, este:



$$(4.108) \quad x_p(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} A_i \cdot e^{ji\omega_p t} ; \quad A_i = \frac{\tau_p}{T} \cdot \text{sinc}\left(\frac{i\omega_p \tau_p}{2}\right),$$

sau:

$$(4.109) \quad x_p(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\tau_p}{T} \cdot \text{sinc}\left(\frac{i\omega_p \tau_p}{2}\right) \cdot e^{ji\omega_p t}$$

Seria Fourier armonică este:

$$(4.110) \quad \begin{aligned} x_p(t) &= \frac{\tau_p}{T} + \frac{2\tau_p}{T} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \text{sinc}\left(\frac{i\omega_p \tau_p}{2}\right) \cdot \cos(i\omega_p t) \right\} = \\ &= \frac{\tau_p}{T} + \frac{2\tau_p}{T} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{i\omega_p \tau_p} \cdot \sin\left(\frac{i\omega_p \tau_p}{2}\right) \cdot \cos(i\omega_p t) \right\} \end{aligned}$$

Întrucât  $\omega_p = 2\pi/T$ , expresia semnalului purtător devine:

$$(4.111) \quad x_p(t) = \frac{\tau}{T} + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} \cdot \sin\left(\frac{i\pi}{T} \tau_p\right) \cdot \cos(i\omega_p t) \right\}$$

Modelul semnalului *MID* se obține înlocuind în (4.111) durata constantă  $\tau_p$  prin durata dependentă de cea a semnalului modulator,  $x(t)$ , conform relației (4.107):

$$(4.112) \quad x_{MID}(t) = \frac{1}{2} \cdot [1 + x(t)] + \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{i} \cdot \sin\left[\frac{i\pi}{2}(1 + x(t))\right] \cdot \cos(i\omega_p t) \right\}$$

Dacă semnalul modulator,  $x(t)$ , este sinusoidal de pulsație  $\omega_0$  (vezi fig. 4.46), atunci în argumentul funcției sinus din (4.112) intervine termenul  $\sin(\omega_0 t)$ . Dezvoltarea expresiei care conține o funcție sinus având în argument o altă funcție sinus permite obținerea spectrului semnalului *MID* prin intermediul funcțiilor Bessel de speța I.

## Capitolul 5

### SEMNALE EȘANTIONATE

#### 5.1. Introducere

Achiziția unui semnal analogic, în vederea prelucrării lui într-un sistem numeric de calcul, se realizează printr-un convertor analogic/numeric (CAN). Operația de conversie presupune două etape, după cum urmează.

**1. Procesul de eșantionare.** Semnalul analogic,  $x(t)$ , este eșantionat discretizând timpul cu o perioadă de eșantionare  $T_e$ . Elementul care realizează această operație este reprezentat printr-un întrerupător cu funcționare ciclică, având perioada  $T_e$  (fig. 5.1). La ieșirea elementului E (de eșantionare) se obține semnalul eșantionat, adică șirul  $\{x(iT_e)\}$ ,  $i = 0, 1, 2, 3, \dots$  (fig. 5.1);

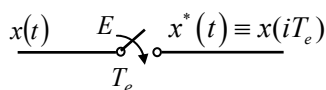


Fig. 5.1 Element de eșantionare

**2. Procesul de cuantificare.** Se discretizează amplitudinea eșantioanelor. Se alege un pas de cuantificare,  $\Delta$ , astfel încât rezultatul cuantificării să fie un număr întreg,  $q$ , iar produsul  $q \cdot \Delta$  să fie cel mai apropiat de amplitudinea cuantificată. La ieșirea CAN se obține un șir de valori numerice, care sunt prelucrate prin mijloace software.

#### 5.2. Modelarea semnalelor eșantionate

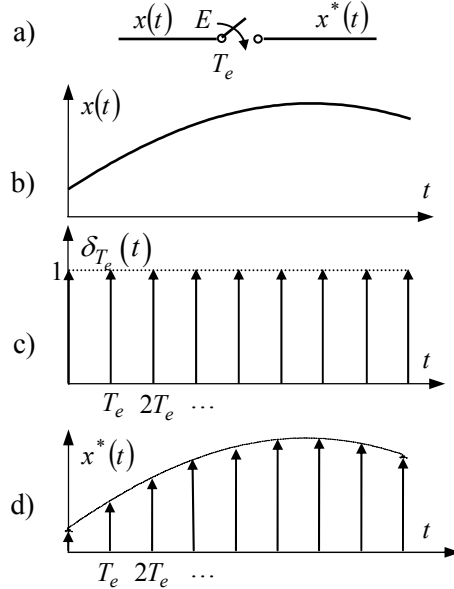
Semnalul eșantionat este definit numai la momentele discrete  $kT_e$ . În consecință, se pot adopta notațiile:

$$x(kT_e) = x_k = x(k)$$

##### A. Modelul temporal al semnalului eșantionat

Fie  $x(t)$  semnalul furnizat elementului de eșantionare (fig. 5.2, a) și b)). La ieșirea acestuia se obține un șir de impulsuri modulate în amplitudine. Dacă se consideră că eșantionarea s-ar face efectiv printr-un întrerupător, atunci el ar realiza modulația naturală a impulsurilor în amplitudine, *MIA-N*, lățimea  $\tau$  a impulsurilor fiind egală cu intervalul de timp când întrerupătorul este închis. În realitate, elementul de eșantionare trebuie să extragă valoarea semnalului la momentul discret  $kT_e$ , ceea ce ar impune condiția ca intervalul  $\tau$  când

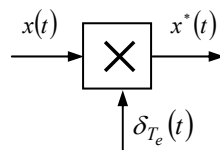
întrerupătorul este închis să tindă spre zero.



**Fig. 5.2** Procesul de eșantionare

Pentru analiza teoretică, se consideră că durata impulsurilor este nulă și că „mărimea” impulsului este evaluată prin suprafața sa. În acest caz, procesul de eșantionare poate fi tratat teoretic, ca o operație de modulație a unei distribuții delta periodice de către un semnal  $x(t)$  (vezi fig. 5.2, b), c) și d)).

Modulația impulsurilor este obținută prin multiplicare (fig. 5.3).



**Fig. 5.3** Modulația distribuției delta periodice

Deci:

$$(5.1) \quad x^*(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t),$$

unde:

$$(5.2) \quad \delta_{T_e}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e)$$

Într-adevăr:

$$(5.3) \quad x^*(t) = x(t) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_e),$$

sau:

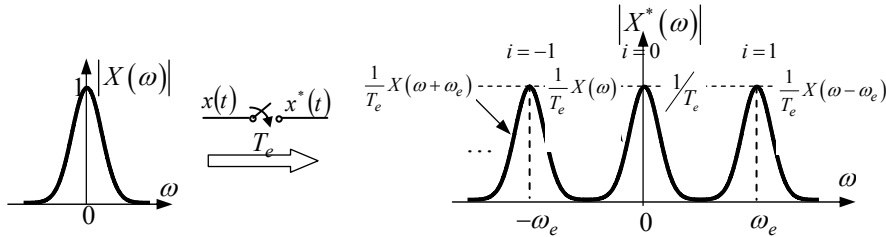
$$(5.4) \quad x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \cdot \delta(t - kT_e)$$

Relațiile (5.1), (5.3) și (5.4) reprezintă modelele temporale ale semnalului eșantionat.

### B. Modelul frecvențial al semnalului eșantionat. Teorema lui Shannon

Fie  $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$  caracteristica spectrală a semnalului  $x(t)$ , reprezentată schematic în fig.5.4. Se calculează transformata Fourier a semnalului eșantionat  $x^*(t)$ , al cărui model matematic este exprimat prin relația (5.1). Aplicând transformata Fourier în această relație și utilizând proprietatea (3.51), rezultă:

$$(5.5) \quad \mathcal{F}\{x^*(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) \cdot \delta_{T_e}(t)\} = \frac{1}{2\pi} \cdot [X(\omega) \otimes \mathcal{F}\{\delta_{T_e}(t)\}]$$



**Fig. 5.4** Caracteristica spectrală a semnalului  $x(t)$

**Fig. 5.5** Caracteristica spectrală a semnalului eșantionat  $x^*(t)$

Notăm prin:

$$(5.6) \quad X^*(\omega) = \mathcal{F}\{x^*(t)\}$$

caracteristica spectrală a semnalului eșantionat. Conform relațiilor (5.5), (5.6) și (3.52) se obține:

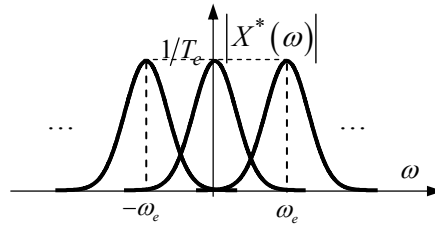
$$(5.7) \quad \begin{aligned} X^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} X(\omega) \otimes [\omega_e \cdot \delta_{\omega_e}(\omega)] \\ &= \frac{\omega_e}{2\pi} \left[ X(\omega) \otimes \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - i\omega_e) \right] \end{aligned}$$

Întrucât frecvența de eșantionare este dată de relația  $\omega_e = 2\pi/T_e$ , rezultă:

$$(5.8) \quad X^*(\omega) = \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(\omega) \otimes \delta(\omega - i\omega_e),$$

sau, considerând proprietățile (3.61) ale distribuției delta:

$$(5.9) \quad X^*(\omega) = \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(\omega - i\omega_e)$$



**Fig. 5.6** Suprapunerea spectrală

*Concluzie:*

Caracteristica spectrală a semnalului eșantionat,  $X^*(\omega)$ , este periodică, de perioadă  $\omega_e = 2\pi/T_e$  (vezi fig. 5.5).

*Observații:*

1. Același rezultat se poate obține dacă semnalul eșantionat se consideră obținut dintr-un semnal *MIA-N*, făcând ca durata  $\tau$  a impulsurilor să tindă spre zero, aria acestora rămânând finită (unitară). În expresia caracteristicii spectrale  $X_{MIA-N}(\omega)$ , dată de relația (4.71), factorul  $\tau/T_e$  care înmulțește suma reprezintă raportul dintre aria impulsului din semnalul purtător (în cazul *MIA-N* aria este  $\tau$ , iar în cazul eșantionării *aria se consideră unitară*) și perioada impulsurilor. În cazul eșantionării acest raport devine  $1/T_e$ . În cadrul termenilor sumei din (4.71) se înlocuiește  $\omega_p$  și  $\omega_e$  și se calculează limita:

$$\lim \left( e^{-j\omega_p \tau/2} \cdot \text{sinc}(i\omega_p \tau/2) \right) = 1$$

Se observă că expresia (4.71) a semnalului *MIA-N* devine, în condițiile menționate, identică cu expresia (5.9) a semnalului eșantionat.

2. Dacă frecvența de eșantionare,  $\omega_e$ , nu este corect aleasă, în sensul că are o valoare prea mică, se constată un fenomen de suprapunere în frecvență ('aliasing' în limba engleză, « repliement en fréquence » în limba franceză – vezi fig. 5.6). În acest caz, reconstrucția semnalului  $x(t)$  din eșantioanele sale,  $x^*(t)$ , nu este posibilă.

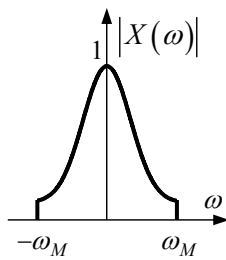
**Teorema lui Shannon.** Fie semnalul  $x(t)$  având *frecvența maximă a caracteristicii spectrale*,  $\omega_M$ , *finită* (fig. 5.7), și  $x^*(t)$  semnalul eșantionat cu

perioada de eșantionare  $T_e$ . Pentru ca semnalul  $x(t)$  să fie reconstruit, pornind de la  $x^*(t)$ , este necesar ca frecvența de eșantionare să fie cel puțin dublul frecvenței maxime  $\omega_M$  a caracteristicii spectrale (vezi fig. 5.8):

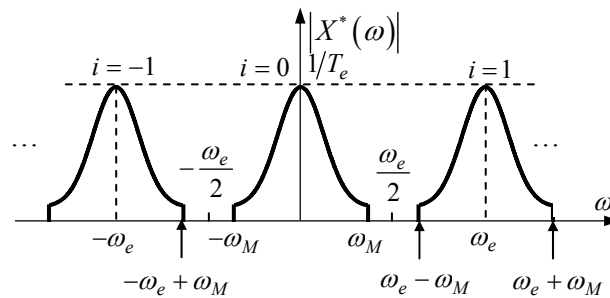
$$(5.10) \quad \omega_e \geq 2\omega_M$$

sau:

$$(5.11) \quad f_e = \frac{1}{T_e} \geq 2f_M \Leftrightarrow T_e \leq \frac{1}{2f_M}$$

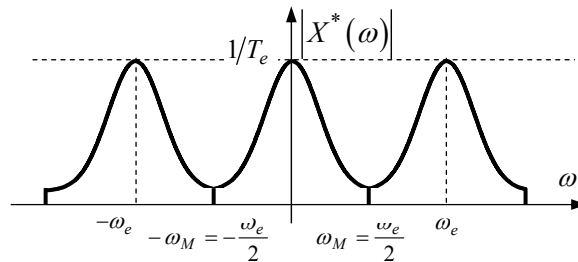


**Fig. 5.7** Caracteristică spectrală cu frecvența maximă finită



**Fig. 5.8** Ilustrarea teoremei lui Shannon

Se constată că, dacă  $\omega_e \geq 2\omega_M$ , fenomenul de suprapunere în frecvență nu are loc, deci reconstrucția semnalului  $x(t)$  este posibilă. În cazul limită în care  $\omega_e = 2\omega_M$ , componentele spectrale  $X(\omega - i\omega_e)$  sunt alipite (fig. 5.9).



**Fig. 5.9** Situația limită când  $\omega_e = 2\omega_M$

Teorema lui Shannon se poate enunța într-o manieră echivalentă:

*Un semnal  $x(t)$  al cărui spectru este limitat superior de către frecvența  $\omega_M = 2\pi f_M$  este complet determinat de către seria de valori  $x(kT_e)$ , dacă  $T_e \leq \frac{1}{2f_M}$ . În acest caz, procesul de eșantionare nu induce nici o pierdere de informație.*

Semnalele reale nu au caracteristici spectrale limitate în frecvență. În scopul evitării distorsionării semnalului reconstituit datorită suprapunerii în frecvență, susceptibilă să apară din cauza componentelor spectrale ne semnificative de frecvențe ridicate ( $\omega > \omega_e/2$ ), se folosește deseori un „filtru trece jos” anti-aliasing. Acest filtru, plasat la intrarea eșantionatorului, (fig. 5.10), elimină componentele nedorite de frecvență  $\omega > \omega_e/2$ . El nu este necesar dacă frecvența maximă conținută în caracteristica spectrală este net inferioară lui  $\omega_e/2$ .

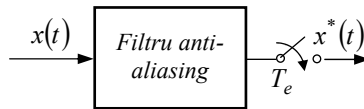


Fig. 5.10 Filtru anti-aliasing

### C. Transformata Laplace a semnalului eșantionat

Fie  $x(t)$  un semnal nul pentru  $t < 0$  și care admite transformata Laplace:

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t) \cdot e^{-st} dt,$$

unde  $s = \sigma + j\omega$ . Să considerăm că funcția  $x(t)$  admite, de asemeni, o transformată Fourier, deci:

$$(5.12) \quad \int_0^{\infty} |x(t)| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$$

Se poate înlocui variabila  $s$  cu  $j\omega$  în  $X(s)$  (deci, pentru  $s = \sigma + j\omega$  se consideră  $\sigma = 0$ ). Se obține caracteristica spectrală  $X(j\omega)$ , notată uzual  $X(\omega)$ .

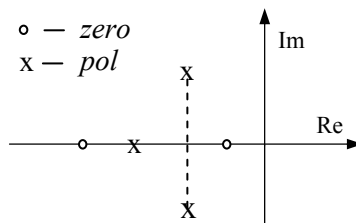


Fig. 5.11 Distribuția poli-zerouri a funcției  $X(s)$

Este posibilă utilizarea acestui procedeu în sens invers: dacă în caracteristica spectrală  $X(j\omega)$  se înlocuiește  $j\omega$  prin  $s$ , atunci se obține transformata Laplace  $X(s)$ .

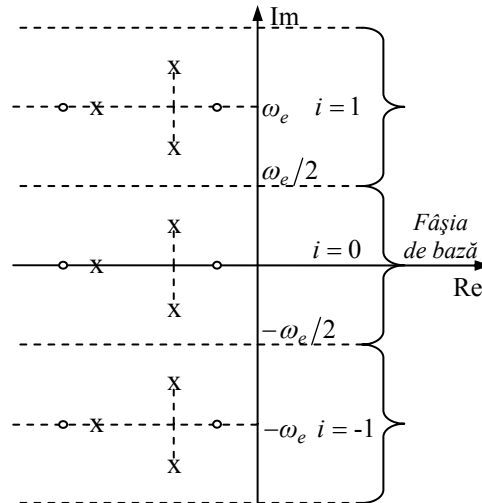
Considerăm acum  $X(s)$  transformata Laplace a semnalului  $x(t)$

(amintim că  $x(t)=0$  pentru  $t < 0$ ). Fie  $X(s)$  o funcție rațională definită printr-o distribuție poli-zerouri (vezi fig. 5.11).

Transformata Fourier a semnalului eșantionat, este dată prin relația (5.9) în care se va considera argumentul  $j\omega$  în loc de  $\omega$ . Pentru a obține transformata Laplace, se înlocuiește  $j\omega$  prin  $s$ :

$$(5.13) \quad X^*(s) = \frac{1}{T_e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - i\omega_e)] \Big|_{j\omega=s} = \frac{1}{T_e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(s - ji\omega_e)$$

Ansamblul poli-zerouri se obține prin reproducerea distribuției din fig. 5.11, în cadrul unei serii de fâșii orizontale de lățime  $\omega_e$ .



**Fig. 5.12** Distribuția polilor și zerourilor funcției  $X^*(s)$

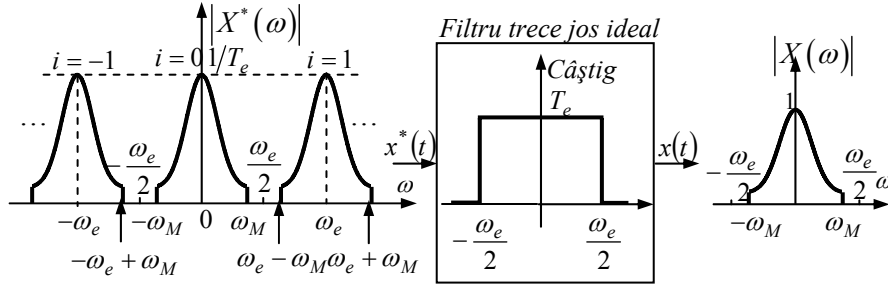
Pentru  $i=0$ , funcția  $\frac{1}{T_e} X(s)$  generează aceiași poli și zerouri, care sunt reprezentați în fig. 5.11, și care sunt cuprinși în banda orizontală de lățime egală cu  $\omega_e$ , centrată pe frecvența  $\omega=0$  (fig. 5.12). Polii și zerourile celorlalte funcții, pentru  $i \neq 0$ , se obțin în benzile orizontale, de aceeași lățime și centrate pe frecvențele  $\pm i\omega_e$  (vezi fig. 5.12). Banda centrală, caracterizată de  $-\frac{\omega_e}{2} \leq \omega \leq \frac{\omega_e}{2}$ , este denumită *fâșie de bază* și corespunde componentei centrale din caracteristica spectrală  $X^*(\omega)$  (pentru  $i=0$ , vezi fig. 5.8).

#### **D. Reconstrucția semnalului $x(t)$ pornind de la semnalul eșantionat, $x^*(t)$**

Dacă pentru  $|\omega| > \omega_M$  caracteristica spectrală  $X(\omega)$  este nulă, și dacă  $\omega_e > 2\omega_M$ , atunci este posibilă reconstrucția semnalului  $x(t)$  pornind de la



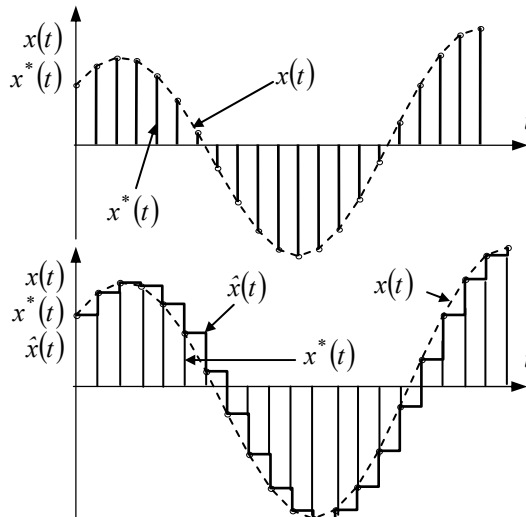
$x^*(t)$ , prin eliminarea benzilor laterale ale caracteristicii spectrale  $X^*(\omega)$  a semnalului eșantionat, folosind un *filtru trece jos ideal*, de bandă  $[-\omega_e/2, \omega_e/2]$  (vezi fig. 5.13).



**Fig. 5.13** Reconstrucția semnalului  $x(t)$  cu un filtru trece jos ideal

Pentru  $|\omega| > \frac{\omega_e}{2}$ , amplificarea filtrului este nulă, deci benzile laterale ale caracteristicii  $X^*(\omega)$  sunt eliminate. Banda centrală (pentru  $i=0$ ) este multiplicată cu  $T_e$ , de unde rezultă – la ieșirea filtrului – caracteristica spectrală  $X(\omega)$ , deci semnalul  $x(t)$ . În planul „s” (fig. 5.12), efectul filtrului este obținerea *fâșiei de bază*, pornindu-se de la distribuția poli-zero-uri a lui  $X^*(s)$ , care conține un număr infinit de benzi orizontale.

Filtrul trece jos *ideal* nu este fizic realizabil. Practic se utilizează elemente de reconstrucție a semnalului  $x(t)$ , care *realizează o aproximare a caracteristicii filtrului trece jos ideal*. Aceste elemente de reconstrucție se numesc **extrapolatoare**.



**Fig. 5.14** Reconstrucția semnalului cu un extrapolator de ordinul zero

a. **Extrapolatorul de ordin zero** (numit și **extrapolator cardinal**). Acest extrapolator menține ultima valoare primită (blochează această valoare) în timpul perioadei de eșantionare care urmează,  $T_e$ .

Fie un ansamblu eșantionator-extrapolator de ordinul zero (fig. 5.15). Formele semnalelor  $x(t)$ ,  $x^*(t)$  și  $\hat{x}(t) \approx x(t)$  (la ieșirea extrapolatorului) sunt prezentate în fig. 5.14.

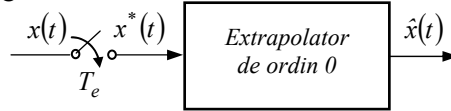


Fig. 5.15 Ansamblul eșantionator-extrapolator

b. **Extrapolatorul de ordinul 1**. Acesta realizează o extrapolare liniară a evoluției semnalului, utilizându-se ultimele două eșantioane. Funcționarea extrapolatorului de ordin 1 este ilustrată în fig. 5.16.

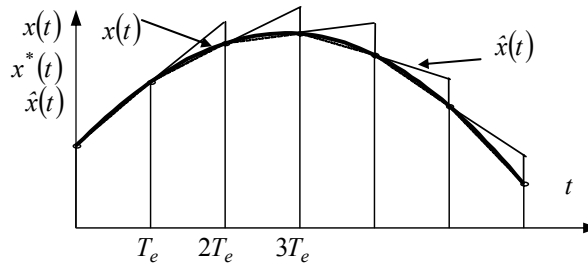


Fig. 5.16 Reconstrucția semnalului folosind un extrapolator de ordinul 1

### 5.3. Transformata $\mathcal{Z}$

#### 5.3.1. Transformata $\mathcal{Z}$ directă

Fie  $x(t)$  un semnal nul pentru  $t < 0$  (semnal cauzal). Semnalul eșantionat,  $x^*(t)$ , definit prin relația (5.4), se poate exprima ca mai jos:

$$(5.14) \quad x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_e) \delta(t - kT_e)$$

Se calculează transformata Laplace  $X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\}$ :

$$(5.15) \quad X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_e) \mathcal{L}\{\delta(t - kT_e)\},$$

sau:

$$(5.16) \quad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_e) \cdot e^{-skT_e},$$

întrucât:

$$(5.17) \quad \mathcal{L}\{\delta(t - kT_e)\} = 1 \cdot e^{-skT_e}$$

Dacă înlocuim:

$$(5.18) \quad e^{sT_e} = z$$

în (5.16), atunci:

$$(5.19) \quad X(z) = X^*(s) \Big|_{e^{sT_e}=z},$$

adică:

$$(5.20) \quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_e) \cdot z^{-k},$$

care reprezintă **transformata  $\mathcal{Z}$  a semnalului eșantionat**:

$$(5.21) \quad X(z) = \mathcal{Z}\{x^*(t)\} = \mathcal{Z}\{x(kT_e)\}$$

*Observații:*

1. Fie o verticală de abscisă  $\alpha$  trasată în planul „s”. Traectoria corespunzătoare în planul „z” este un cerc de rază  $\rho = e^{\alpha T_e}$  (fig. 5.17).

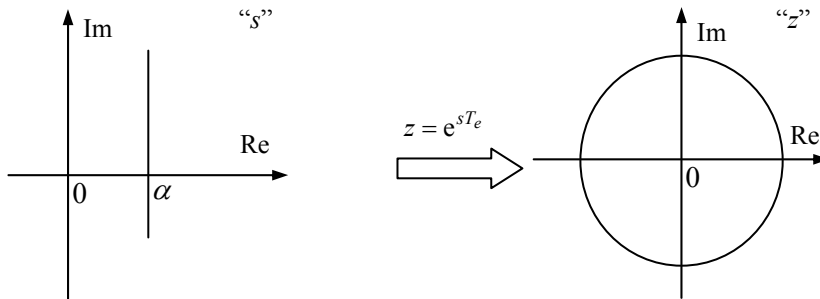


Fig. 5.17 Traiectorii corespundente în planele „s” și „z”

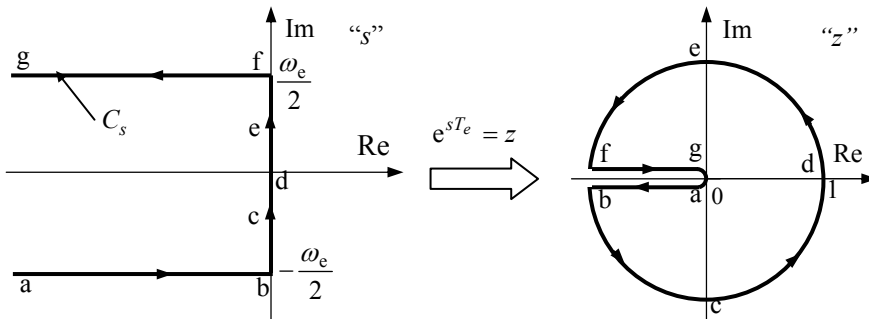


Fig. 5.18 Traiectorii corespundente în planele „s” și „z”

2. Fie conturul  $C_s$  care corespunde fâșiei de bază în semiplanul stâng al planului complex „ $s$ ” (fig. 5.18). Traectoria corespunzătoare în planul „ $z$ ” este prezentată în fig. 5.18, unde raza cercului este unitară.

### 5.3.2. Transformata $\mathcal{Z}$ inversă

Pornind de la transformata Laplace,  $X(s)$ , se poate calcula semnalul  $x(t)$ , cu ajutorul transformatei Laplace inverse:

$$(5.22) \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) e^{st} ds,$$

unde constanta  $c$  este superioară indicelui de creștere  $\alpha$  al funcției  $x(t)$ :

$$|x(t)| \leq M \cdot e^{\alpha t}.$$

Dacă se pune  $t = kT_e$ , se obține:

$$(5.23) \quad x(kT_e) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) \cdot e^{s \cdot kT_e} ds$$

Folosind substituția  $e^{sT_e} = z$  în (5.23) și  $ds = \frac{1}{T_e} \cdot \frac{dz}{z}$ , rezultă:

$$(5.24) \quad x(kT_e) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C \left( \frac{1}{T_e} X(s) \right) \Big|_{e^{sT_e}=z} \cdot z^{k-1} dz$$

Dar:

$$\frac{1}{T_e} \cdot X(s) \Big|_{e^{sT_e}=z} = \frac{1}{T_e} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(s - ji\omega_e) \Big|_{i=0, e^{sT_e}=z} = X^*(s) \Big|_{i=0, e^{sT_e}=z} = X(z),$$

unde s-a considerat fâșia de bază din planul „ $s$ ”, prin adoptarea indicelui  $i=0$ . Înlocuind ultima relație în (5.24) rezultă:

$$(5.25) \quad x(kT_e) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) \cdot z^{k-1} dz$$

Conturul de integrare  $C$  în planul complex „ $z$ ” este cercul de rază  $\rho = e^{cT_e}$ . Expresia (5.25) definește **transformata  $\mathcal{Z}$  inversă**.

### 5.4. Proprietățile transformatei $\mathcal{Z}$

Fie  $x(k) \equiv x_k \equiv x(kT_e)$  semnalul eșantionat cu perioada de eșantionare  $T_e$ . Se vor prezenta în cele ce urmează câteva din cele mai importante proprietăți ale transformatei  $\mathcal{Z}$ .

### 1. Liniaritatea

Fie  $\mathcal{Z}\{x_i(k)\} = X_i(z)$ . Avem:

$$(5.26) \quad \mathcal{Z}\left\{\sum_{i=1}^N c_i x_i(k)\right\} = \sum_{i=1}^N c_i X_i(z)$$

### 2. Teorema întârzierii

Fie  $x_i(k) = x(k-d)$  semnalul  $x(k)$  întârziat cu  $d$  perioade de eșantionare. Avem:

$$(5.27) \quad \mathcal{Z}\{x_i(k)\} = \mathcal{Z}\{x(k-d)\} = z^{-d} X(z)$$

*Demonstrație:*

$$\mathcal{Z}\{x(i-d)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_e - dT_e) z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} x[(i-d)T_e] z^{-i}$$

Notând  $i-d=k$ , rezultă:

$$\mathcal{Z}\{x(i-d)\} = z^{-d} \cdot \sum_{k=-d}^{\infty} x(k) z^{-k} = z^{-d} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} = z^{-d} \cdot X(z),$$

întrucât  $x(k)=0$  pentru  $k<0$ .

*Observație:*

**Se poate interpreta  $z^{-1}$  ca fiind operator de întârziere cu o perioadă  $T_e$ .**

### 3. Teorema anticipării

$$(5.28) \quad \mathcal{Z}\{x(k+1)\} = z \cdot X(z) - z \cdot x(0),$$

sau, în cazul general:

$$(5.29) \quad \mathcal{Z}\{x(k+d)\} = z^d X(z) - [z^d x(0) + z^{d-1} x(1) + \dots + z x(d-1)]$$

*Demonstrație:*

Urmând același mers de calcul ca în cazul precedent, rezultă:

$$\mathcal{Z}\{x(i+d)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x[(i+d)T_e] \cdot z^{-i} = z^d \cdot \sum_{i=d}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k}$$

Întrucât limita inferioară din sumă este  $d$ , vom aduna și scădea termenii pentru  $k=0,1,\dots,d-1$ . Rezultă:

$$\mathcal{Z}\{x(i+d)\} = z^d \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} - [z^d x(0) + z^{d-1} x(1) + \dots + z x(d-1)],$$

adică relația (5.29).

### 4. Teorema valorii inițiale

$$(5.30) \quad x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Examinând relația (5.20), se observă că pentru  $z$  tinzând la infinit se anulează toți termenii cu exponent negativ din sumă, rămânând numai termenul  $x(0)$ .

### 5. Teorema valorii finale

$$(5.31) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)X(z)]$$

*Demonstrație:*

Fie  $d(i)$  un semnal reprezentând diferența eşantioanelor consecutive din semnalul eşantionat (proporțional cu derivata discretă a semnalului):

$$d(i) = x(i+1) - x(i)$$

Vom calcula transformata  $\mathcal{Z}$  a acestui semnal pe două căi:

$$1) \quad D(z) = \mathcal{Z}\{x(i+1) - x(i)\} = \sum_{i=0}^{\infty} [x(i+1) - x(i)] \cdot z^{-i}$$

Din această relație rezultă că:

$$(5.32) \quad \lim_{z \rightarrow 1} D(z) = x(1) - x(0) + x(2) - x(1) + \dots = \lim_{i \rightarrow \infty} x(i) - x(0)$$

2) De la  $D(z) = \mathcal{Z}\{x(i+1)\} - \mathcal{Z}\{x(i)\} = z \cdot [X(z) - x(0)] - X(z)$ , unde s-a utilizat teorema anticipării, se obține:

$$(5.33) \quad D(z) = (z-1) \cdot X(z) - x(0),$$

din care se deduce:

$$(5.34) \quad \lim_{z \rightarrow 1} D(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1) \cdot X(z)\} - x(0)$$

Din (5.32) și (5.34) rezultă:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x(i) - x(0) = \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1) \cdot X(z)\} - x(0)$$

și se obține relația (5.31).

*Observație:*

Transformata  $\mathcal{Z}$  a semnalului  $d(i)$ , prezentată sub forma (5.33), se consideră a fi imaginea în  $z$  a derivatei discrete a semnalului.

### 6. Teorema însumării (integrării)

Fie:

$$(5.35) \quad y(i) = \sum_{k=0}^i x(k)$$

funcția proporțională cu integrala discretă a semnalului. Atunci:

$$(5.36) \quad \mathcal{Z}\{y(i)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} X(z)$$

*Demonstrație:*

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{y(i)\} &= \sum_{i=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^i x(k) \right] z^{-i} = x(0) + [x(0) + x(1)]z^{-1} + [x(0) + x(1) + x(2)]z^{-2} \dots \\ &= x(0) \cdot (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) + x(1) \cdot z^{-1} \cdot (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) + \dots \\ &= (1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) \cdot [x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + x(2) \cdot z^{-2} + \dots] = \frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)\end{aligned}$$

7. Teorema sumei

$$(5.37) \quad \sum_{k=0}^{\infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} X(z)$$

Acest rezultat se obține din (5.20), înlocuind  $z$  prin 1.

8. Teorema înmulțirii cu o exponențială

Fie:

$$\mathcal{Z}\{x(iT_e)\} = X(z),$$

atunci:

$$(5.38) \quad \mathcal{Z}\{e^{\pm aiT_e} \cdot x(iT_e)\} = X(z \cdot e^{\mp aT_e})$$

*Demonstrație:*

$$\mathcal{Z}\{e^{\pm aiT_e} x(iT_e)\} = \sum_{i=0}^{\infty} e^{\pm aiT_e} x(iT_e) z^{-i} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_e) (ze^{\mp aT_e})^{-i} = X(ze^{\mp aT_e})$$

9. Teorema înmulțirii cu timpul

Fie  $x(iT_e)$  un semnal provenit prin eșantionare din  $x(t)$  și  $X(z)$  transformata sa în  $z$ . Atunci semnalul  $iT_e x(iT_e)$ , provenit prin eșantionare din  $t x(t)$ , are transformata  $\mathcal{Z}$ :

$$(5.39) \quad \mathcal{Z}\{iT_e \cdot x(iT_e)\} = -T_e \cdot z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$$

*Demonstrație:*

Întrucât  $X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT_e) \cdot z^{-i}$ , se calculează derivata:

$$\frac{dX(z)}{dz} = - \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot x(iT_e) \cdot z^{-i-1} = -z^{-1} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot x(iT_e) \cdot z^{-i}$$

sau:

$$(5.40) \quad \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot x(iT_e) \cdot z^{-i} = -z \cdot \frac{dX(z)}{dz}$$

Pe de altă parte:

$$(5.41) \quad \mathcal{Z}\{iT_e \cdot x(iT_e)\} = \sum_{i=0}^{\infty} iT_e \cdot x(iT_e) \cdot z^{-i}$$

Substituind (5.40) în partea dreaptă a relației (5.41), se obține relația (5.39).

### 5.5. Convoluția semnalelor eșantionate

Fie  $x_1(k)$  și  $x_2(k)$  două semnale eșantionate. Convoluția lor este:

$$(5.42) \quad \begin{aligned} x_1(k) \otimes x_2(k) &\equiv x_1(k) * x_2(k) = \\ &= \sum_{i=0}^k x_1(i) \cdot x_2(k-i) = \sum_{i=0}^k x_1(k-i) \cdot x_2(i) \end{aligned}$$

Vom demonstra că:

$$(5.43) \quad \mathcal{Z}\{x_1(k) \otimes x_2(k)\} = X_1(z) \cdot X_2(z),$$

adică prin transformata  $\mathcal{Z}$ , produsul de convoluție  $x_1(k) \otimes x_2(k)$  devine produs algebric al funcțiilor  $X_1(z)$  și  $X_2(z)$ .

Demonstrația pornește de la explicitarea produsului  $X_1(z) \cdot X_2(z)$  și are ca obiectiv transformarea expresiei respective, astfel încât produsul să fie exprimat ca o transformată  $\mathcal{Z}$  a produsului de convoluție al semnalelor  $x_1(k)$  și  $x_2(k)$ :

$$(5.44) \quad \begin{aligned} X_1(z) \cdot X_2(z) &= \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k) \cdot z^{-k} \right] \cdot \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x_2(k) \cdot z^{-k} \right] = \\ &= \left[ x_1(0) + x_1(1)z^{-1} + x_1(2)z^{-2} + \dots \right] \cdot \\ &\cdot \left[ x_2(0) + x_2(1)z^{-1} + x_2(2)z^{-2} + \dots \right] = \\ &= x_1(0) \cdot x_2(0) + [x_1(0) \cdot x_2(1) + x_1(1) \cdot x_2(0)] \cdot z^{-1} + \\ &+ [x_1(0) \cdot x_2(2) + x_1(1) \cdot x_2(1) + x_1(2) \cdot x_2(0)] \cdot z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

Se observă că, în termenul general, coeficientul care înmulțește pe  $z^{-k}$  este:

$$(5.45) \quad x_1(0)x_2(k) + x_1(1)x_2(k-1) + \dots + x_1(k)x_2(0) = \sum_{i=0}^k x_1(i)x_2(k-i),$$

deci relația (5.44) se scrie sub forma:

$$X_1(z) \cdot X_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^k x_1(i) \cdot x_2(k-i) \right] \cdot z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} [x_1(k) \otimes x_2(k)] \cdot z^{-k},$$

adică:



$$(5.46) \quad X_1(z) \cdot X_2(z) = \mathcal{Z}\{x_1(k) \otimes x_2(k)\}$$

Fie  $X_1(z) = \mathcal{Z}\{x_1(i)\}$  și  $X_2(z) = \mathcal{Z}\{x_2(i)\}$ . Convoluția funcțiilor  $X_1(z)$  și  $X_2(z)$  este definită prin relația:

$$(5.47) \quad \begin{aligned} X_1(z) \otimes X_2(z) &\equiv X_1(z) * X_2(z) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X_1\left(\frac{z}{u}\right) \cdot X_2(u) \frac{du}{u} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X_1(u) \cdot X_2\left(\frac{z}{u}\right) \frac{du}{u} \end{aligned}$$

Vom demonstra că:

$$(5.48) \quad \mathcal{Z}^{-1}\{X_1(z) \otimes X_2(z)\} = x_1(k) \cdot x_2(k),$$

adică prin transformata  $\mathcal{Z}$  inversă produsul de convoluție al imaginilor în  $z$  se transformă în produs algebric al semnalelor discrete  $x_1(k)$  și  $x_2(k)$ . Relația (5.48) este echivalentă cu:

$$\mathcal{Z}\{x_1(k) \cdot x_2(k)\} = X_1(z) \otimes X_2(z),$$

pentru a cărei demonstrație calculăm transformata  $\mathcal{Z}$  a produsului semnalelor:

$$\mathcal{Z}\{x_1(k) \cdot x_2(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} [x_1(k) \cdot x_2(k)] \cdot z^{-k}$$

și înlocuim  $x_2(k)$  prin transformata  $\mathcal{Z}$  inversă (vezi relația (5.25)):

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{x_1(k) \cdot x_2(k)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k) \cdot \left[ \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X_2(u) u^{k-1} du \right] \cdot z^{-k} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C \left[ \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k) \cdot \left(\frac{z}{u}\right)^{-k} \right] \cdot X_2(u) \frac{du}{u} = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \cdot \oint_C X_1\left(\frac{z}{u}\right) \cdot X_2(u) \frac{du}{u} \end{aligned}$$

## 5.6. Metode de calcul pentru transformata $\mathcal{Z}$ directă

Se pot utiliza două metode:

- calculul *direct*, utilizând relația de definiție (5.20);
- calculul *indirect*, pornind de la transformata Laplace.

**1. Calculul direct.** Se folosește relația:

$$(5.49) \quad X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) \cdot z^{-k}$$

pentru determinarea transformatelor  $\mathcal{Z}$  ale celor mai utilizate semnale.

a – Treapta unitară (fig. 5.19)

$$(5.50) \quad U(z) = \mathcal{Z}\{u(k)\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

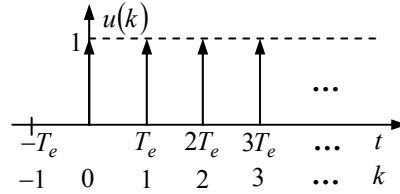


Fig. 5.19 Treapta unitară

b – Rampa unitară (fig. 5.20)

$$(5.51) \quad R(z) = \mathcal{Z}\{r(k)\} = 0 + T_e \cdot z^{-1} + 2T_e \cdot z^{-2} + \dots = \frac{T_e \cdot z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

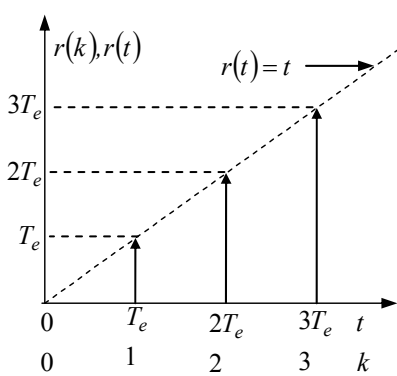


Fig. 5.20 Rampa unitară

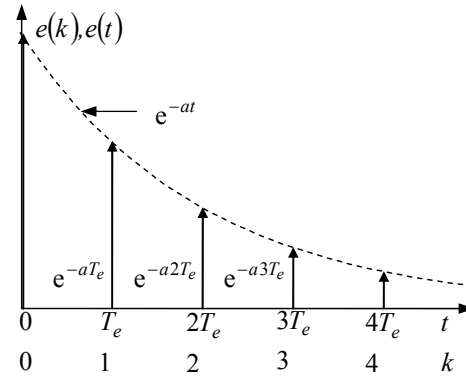


Fig. 5.21 Funcția exponențială

c – Exponențiala (fig. 5.21)

$$(5.52) \quad E(z) = \mathcal{Z}\{e(k)\} = 1 + e^{-aT_e} z^{-1} + e^{-2aT_e} z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-aT_e} z^{-1}}$$

*Observație:*

Transformatele  $\mathcal{Z}$  ale funcțiilor uzuale sunt date în tabelele de transformate.

## 2. Calculul bazat pe transformata Laplace

Fie  $x(t)$  un semnal având transformata Laplace  $X(s)$ . Pentru a calcula transformata  $\mathcal{Z}$  a semnalului eșantionat  $x(k)$ , se caută o relație directă  $X(s) \rightarrow X(z)$ , folosind schema dată în fig. 5.22. Se utilizează definițiile introduse anterior:

$$(5.53) \quad x^*(t) = x(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = x(t) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_e),$$

căci  $x(t) = 0$  pentru  $t < 0$ .

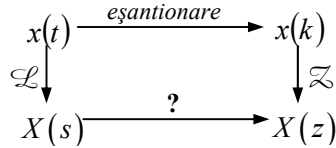


Fig. 5.22 Schema de calcul al transformatei  $\mathcal{Z}$

Prin aplicarea transformatei Laplace ecuației (5.53), rezultă:

$$(5.54) \quad \mathcal{L}\{x^*(t)\} \equiv X^*(s) = X(s) * \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_e)\right\}$$

Dar:

$$(5.55) \quad \mathcal{L}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT_e)\right\} = 1 + 1 \cdot e^{-sT_e} + 1 \cdot e^{-s \cdot 2T_e} + \dots = \frac{1}{1 - e^{-sT_e}},$$

atunci convoluția imaginilor din (5.54) devine:

$$(5.56) \quad X^*(s) = X(s) * \left(\frac{1}{1 - e^{-sT_e}}\right) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(u) \cdot \frac{1}{1 - e^{-T_e(s-u)}} du$$

Folosind relația (5.19), se calculează transformata  $\mathcal{Z}$ :

$$(5.57) \quad X(z) = X^*(s) \Big|_{e^{sT_e}=z} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(u) \cdot \frac{1}{1 - e^{uT_e} z^{-1}} du$$

În ultima integrală se poate înlocui variabila  $u$  cu variabila  $s$ . Dacă  $X(s)$  este o funcție rațională, rezultă:

$$(5.58) \quad \begin{aligned} X(z) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(s) \frac{1}{1 - e^{sT_e} z^{-1}} ds = \\ &= \sum_{\substack{\text{polii} \\ \text{lui } X(s)}} \text{Re } z \left[ X(s) \cdot \frac{1}{1 - e^{sT_e} z^{-1}} \right] \end{aligned}$$

*Exemplul 5.1:*

Fie semnalul  $x(t)$  reprezentat în fig. 5.23 și definit prin:

$$(5.59) \quad x(t) = \begin{cases} 1 - e^{-at} & \text{pentru } t \geq 0 \\ 0 & \text{pentru } t < 0 \end{cases}$$

Transformata Laplace a acestei funcții este:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} = \frac{a}{s(s+a)}$$

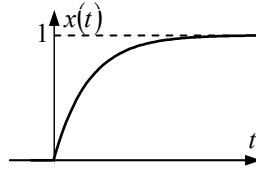


Fig. 5.23 Reprezentarea funcției (5.59)

Să calculăm  $X(z)$ , când perioada de eșantionare este  $T_e$ . Polii funcției  $X(s)$  sunt  $s_1 = 0$  și  $s_2 = -a$ . Deci:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{\substack{s_1=0 \\ s_2=-a}} \operatorname{Rez} \left[ \frac{a}{s(s+a)} \cdot \frac{1}{1 - e^{sT_e} z^{-1}} \right] = \\ &= \frac{a}{a} \cdot \frac{1}{1 - 1 \cdot z^{-1}} + \frac{a}{-a} \cdot \frac{1}{1 - e^{-aT_e} \cdot z^{-1}} = \frac{z^{-1} \cdot (1 - e^{-aT_e})}{(1 - z^{-1}) \cdot (1 - e^{-aT_e} z^{-1})} \end{aligned}$$

## 5.7. Calculul transformatei $\mathcal{Z}$ inverse

Se pot utiliza trei metode:

- calculul *direct*, folosind relația de definiție (5.25);
- *metoda seriei de puteri*;
- *descompunerea funcției  $X(z)$  în elemente simple*.

### 1. Calculul direct

$$(5.60) \quad x(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\} = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{k-1} dz = \sum_{\substack{\text{polii lui} \\ X(z)z^{-1}}} \operatorname{Rez}[X(z)z^{k-1}]$$

*Exemplul 5.2:*

Fie:

$$(5.61) \quad X(z) = \frac{0.25z}{(z-0.5)(z-0.3)}$$

Polii funcției  $X(z)$  sunt  $z_1 = 0.5$  și  $z_2 = 0.3$ . Deci:

$$x(k) = \sum_{\substack{z_1=0,5 \\ z_2=0,4}} \operatorname{Rez} \left[ \frac{0.25 z}{(z-0.5)(z-0.3)} \cdot z^{k-1} \right]$$

sau  $x(k) = \frac{0.25}{0.5-0.3} \cdot 0.5^k + \frac{0.25}{0.3-0.5} \cdot 0.3^k = 1.25(0.5^k - 0.3^k)$ . Se obține șirul  $\{x(k)\}_{k=0,1,2,\dots} = 0; 0.25; 0.2; 0.1225; \dots$

*Exemplul 5.3: aplicație în Matlab*

Fie:

$$(5.62) \quad X(z) = \frac{2z^3 - 2.3z^2 + 0.5z}{z^3 - 2.3z^2 + 1.7z - 0.4}$$

Dacă se notează cu  $p_i, i = \overline{1, n}$ , polii funcției  $X(z) \cdot z^{-1}$ , atunci:

$$x(k) = \sum_{\text{poli } p_i} \text{Rez} [X(z) \cdot z^{k-1}] = \sum_{\text{poli } p_i} \text{Rez} [X(z) \cdot z^{-1}] \cdot p_i^k$$

Fie  $B(s)/A(s)$  o funcție rațională, unde gradul numărătorului nu depășește gradul numitorului. Această funcție poate fi dezvoltată după cum urmează:

$$(5.63) \quad \frac{B(s)}{A(s)} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{s - p_i} + k,$$

unde  $p_i$  și  $r_i, i = \overline{1, n}$ , sunt polii și, respectiv, reziduurile. Notăm  $a_i$  și  $b_i, i = \overline{1, n}$ , coeficienții polinoamelor  $A(s)$  și respectiv  $B(s)$ . Atunci un program Matlab de forma:

```
num=[b_n b_{n-1} ... b_1];
den=[a_n a_{n-1} ... a_1];
[r, p, k]=residue(num, den)
```

permite determinarea vectorilor  $r$  și  $p$ , ce conțin reziduurile și polii, precum și a coeficientului  $k$  din expresia (5.63).

Pentru exemplul considerat, funcția  $B(s)/A(s)$  este:

$$X(z) \cdot z^{-1} = \frac{2z^2 - 2.3z + 0.5}{z^3 - 2.3z^2 + 1.7z - 0.4},$$

deci comenzile Matlab sunt:

```
num=[2 -2.3 0.5]
den = [1 -2.3 1.7 -0.4]
[r, p, k]=residue(num, den)
```

Vectorii  $r$  și  $p$  obținuți sunt:

$$r = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.8 \\ 0.5 \end{bmatrix};$$

prin urmare, rezultă:

$$(5.64) \quad x(k) = r_1 p_1^k + r_2 p_2^k + r_3 p_3^k = 2 \cdot (1)^k + 1 \cdot (0.8)^k + (-1) \cdot (0.5)^k,$$

de unde:  $\{x(k)\}_{k=0,1,2,\dots} = 2; 2.3; 2.39; 2.387; 2.3471; \dots$

## 2. Metoda seriei de puteri

Fie  $X(z)$  o funcție rațională, de forma:

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

Se realizează dezvoltarea în serie de puteri a acestei funcții, împărțind numărătorul la numitor. Rezultă:

$$X(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_2 z^{-2} + \dots$$

și, în consecință:  $\{x(k)\}_{k=0,1,2,\dots} = \alpha_0; \alpha_1; \alpha_2; \dots$

*Exemplul 5.4:*

Se consideră funcția  $X(z)$  dată prin (5.61). Ea se poate scrie sub forma:

$$X(z) = \frac{0.25z}{z^2 - 0.8z + 0.15} = \frac{0.25z^{-1}}{1 - 0.8z^{-1} + 0.15z^{-2}}$$

Împărțind numărătorul la numitor se obține seria de puteri:

$$X(z) = 0.25z^{-1} + 0.2z^{-2} + 0.1225z^{-3} + \dots$$

Deci  $\{x(k)\}_{k=0,1,2,3,\dots} = 0; 0.25; 0.2; 0.1225; \dots$

*Exemplul 5.5:* aplicație în Matlab

Pentru funcția  $X(z)$  de forma (5.62) se folosește programul Matlab următor, care realizează operația iterativă de împărțire a polinoamelor.

```
clear all;
num=[2 -2.3 0.5 0];
den=[1 -2.3 1.7 -0.4];
for k=1:5,
    [q,r]=deconv(num,den);
    num=conv(r,[1 0]);
    v(k)=q(k);
end;
```

Programul calculează în vectorul  $v$  primele 5 valori ale variabilei  $x(k)$  și generează rezultatele următoare:  $\{x\} = 2 \ 2.3 \ 2.39 \ 2.387 \ 2.3471$ .

### 3. Descompunerea funcției $X(z)$ în elemente simple

*Exemplul 5.6:*

Se consideră funcția  $X(z)$  dată prin (5.61). Se pune această funcție sub forma:

$$X(z) = \frac{0.25z^{-1}}{(1-0.5z^{-1}) \cdot (1-0.3z^{-1})}$$

și apoi se realizează descompunerea ei în elemente simple:

$$\frac{0.25z^{-1}}{(1-0.5z^{-1}) \cdot (1-0.3z^{-1})} = \frac{C_1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{C_2}{1-0.3z^{-1}}$$

Se calculează coeficienții  $C_1$  și  $C_2$ :

$$C_1 = \left. \frac{0.25z^{-1}}{1-0.3z^{-1}} \right|_{z=0.5} = 1.25; \quad C_2 = \left. \frac{0.25z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \right|_{z=0.3} = -1.25$$

Deci  $X(z) = \frac{1.25}{1-0.5z^{-1}} - \frac{1.25}{1-0.3z^{-1}}$ . Transformata  $\mathcal{Z}$  inversă a funcției simple

$F(z) = \frac{C}{1-r \cdot z^{-1}}$  este  $f(k) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(z)\} = C \cdot r^k$ . Rezultă:

$$x(k) = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{1.25}{1-0.5z^{-1}} - \frac{1.25}{1-0.3z^{-1}} \right\} = 1.25 \cdot (0.5^k - 0.3^k)$$

și  $\{x(k)\}_{k=0,1,2,\dots} = 0; 0.25; 0.2; 0.1225; \dots$

*Exemplul 5.7:* aplicație în Matlab

Fie  $X(z)$  de forma (5.62). Dacă se folosește variabila  $z^{-1}$ , atunci această funcție devine:

$$X(z^{-1}) = \frac{2 - 2.3z^{-1} + 0.52z^{-2}}{1 - 2.3z^{-1} + 1.7z^{-2} - 0.4z^{-3}}$$

Să considerăm  $z^{-1} = u$  și să dezvoltăm  $X(u)$  în elemente simple, cu ajutorul funcției Matlab `residue`. Comenzile Matlab sunt:

```
num=[0.5 -2.3 2];
den=[-0.4 1.7 -2.3 1];
[r, p, k]=residue(num, den)
```

Vectorii  $r$  și  $p$  obținuți sunt:

$$r = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.25 \\ -2 \end{bmatrix}; \quad p = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.25 \\ 1 \end{bmatrix}$$

și funcția  $X(z^{-1}) = X(u)$  devine  $X(z^{-1}) = \frac{2}{z^{-1}-2} + \frac{-1.25}{z^{-1}-1.25} + \frac{-2}{1-z^{-1}}$  sau:

$$X(z^{-1}) = -\frac{1}{1-0.5z^{-1}} + \frac{1}{1-0.8z^{-1}} + \frac{-2}{1-z^{-1}}$$

Transformata  $\mathcal{Z}$  inversă este:

$$x(k) = (-1) \cdot 0.5^k + 1 \cdot (0.8)^k + 2 \cdot (1)^k,$$

care generează rezultatul (5.64).

### 5.8. Transformata Fourier discretă

Fie  $x(t)$  un semnal de durată finită  $\tau$  (fig. 5.24, a)). Este posibilă construcția unui *semnal periodic*,  $x_\tau(t)$ , repetând  $x(t)$  la fiecare interval de timp  $\tau$  (fig. 5.24, b)). Deci:

$$(5.65) \quad x_\tau(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(t - m\tau)$$

Semnalul periodic  $x_\tau(t)$  se descompune în serie Fourier complexă astfel:

$$(5.66) \quad x_\tau(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \underline{A}_i e^{ji\omega_0 t},$$

unde:

$$(5.67) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{\tau},$$

$$(5.68) \quad \underline{A}_i = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x_\tau(t) \cdot e^{-ji\omega_0 t} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(t) e^{-ji\omega_0 t} dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-ji\omega_0 t} dt,$$

căci  $x(t) = 0$  pentru  $t < 0$  și  $t > \tau$ . Din (5.68) rezultă:

$$(5.69) \quad \underline{A}_i = \frac{1}{\tau} X(i\omega_0)$$

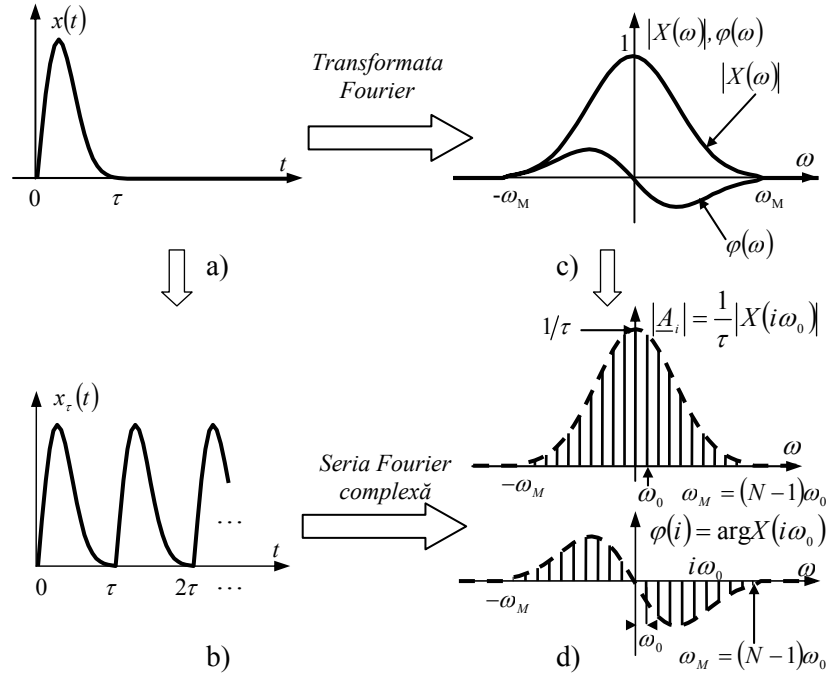
și expresia (5.66) devine:

$$(5.70) \quad x_\tau(t) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(i\omega_0) \cdot e^{ji\omega_0 t}$$

Se observă că spectrul SFC al semnalului  $x_\tau(t)$  este obținut prin eșantionarea caracteristicii spectrale  $X(\omega)$  a semnalului  $x(t)$ , cu perioada de eșantionare  $\omega_0 = 2\pi/\tau$ , efectuând o modificare de scară cu  $1/\tau$  (fig. 5.24, c) și d)). Expresia analitică a semnalului neperiodic  $x(t)$  este:



$$(5.71) \quad x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(i\omega_0) \cdot e^{ji\omega_0 t}, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$



**Fig. 5.24** Caracterizarea spectrală a semnalelor neperiodice și periodice

Să presupunem că  $x(t)$  are caracteristica spectrală limitată la frecvența  $\omega_M$  (vezi fig. 5.24, c)). Fie  $x^*(t)$  semnalul eșantionat, cu perioada de eșantionare  $T_e = 1/2f_M$ , unde  $f_M = \omega_M/2\pi$ .

Caracteristica spectrală a semnalului eșantionat în banda de bază este:

$$(5.72) \quad X^*(\omega) = \frac{1}{T_e} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(\omega - i\omega_e) \Big|_{i=0} = \frac{1}{T_e} \cdot X(\omega),$$

unde:

$$(5.73) \quad X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\tau} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

În această integrală se discretizează timpul  $t$  cu pasul de eșantionare  $T_e$ , rezultând:

$$(5.74) \quad N = \tau/T_e$$

intervale de discretizare.

Se obține:

$$(5.75) \quad X(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(kT) \cdot e^{-j\omega kT_e} \cdot T_e = T_e \cdot \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-j\omega kT_e}$$

și relația (5.72) devine:

$$(5.76) \quad X^*(\omega) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-j\omega kT_e}$$

Să discretizăm axa frecvențelor  $\omega$  cu pasul  $\omega_0$  (perioada de eșantionare a caracteristicii spectrale  $X(\omega)$ , vezi fig. 5.24, d)), unde:

$$(5.77) \quad 2\omega_M = N \cdot \omega_0$$

Folosind (5.67), (5.74) și (5.77), relația (5.76) devine:

$$\begin{aligned} X^*(i\omega_0) &\equiv X^*(i) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-ji\omega_0 kT_e} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-ji\frac{2\pi}{\tau} kT_e} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-ji\frac{2\pi}{NT_e} kT_e} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-jik\frac{2\pi}{N}}, \quad i = \overline{0, N-1} \end{aligned}$$

Deci:

$$(5.78) \quad X^*(i) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-jik\frac{2\pi}{N}}, \quad i = \overline{0, 1, 2, \dots, N-1}$$

Să înlocuim  $X(\omega)$  din (5.72) în (5.71). Cum  $X(\omega)$  este limitată la frecvența  $\omega_M$ , se obține:

$$(5.79) \quad x(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau} \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} X(i\omega_0) e^{ji\omega_0 t} = \frac{T_e}{\tau} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X^*(i\omega_0) e^{ji\omega_0 t}, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

În relația (5.79) se discretizează timpul  $t$  cu pasul  $T_e$ , punând  $t = k \cdot T_e$ , unde valorile lui  $k$  corespund intervalului  $[0, \tau]$ :  $k = \overline{0, 1, 2, \dots, N-1}$ . Rezultă:

$$\begin{aligned} x(kT_e) &\equiv x(k) = \frac{T_e}{NT_e} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X^*(i\omega_0) e^{ji\frac{2\pi}{\tau} kT_e} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X^*(i) \cdot e^{ji\frac{2\pi}{NT_e} kT_e}, \\ & \quad k = \overline{0, 1, \dots, N-1} \end{aligned}$$

sau:

$$(5.80) \quad x(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X^*(i) \cdot e^{jki\frac{2\pi}{N}}, \quad k = \overline{0, 1, \dots, N-1}$$

Fie:

$$(5.81) \quad \underline{u} = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

numărul complex de modul unitar și de argument  $\frac{2\pi}{N}$ , reprezentat ca vector, și  $\underline{u}^i$ ,  $k=0,1,\dots,N-1$ , steaua simetrică a vectorilor de modul unitar (fig. 5.25). Relațiile (5.78) și (5.80) devin respectiv:

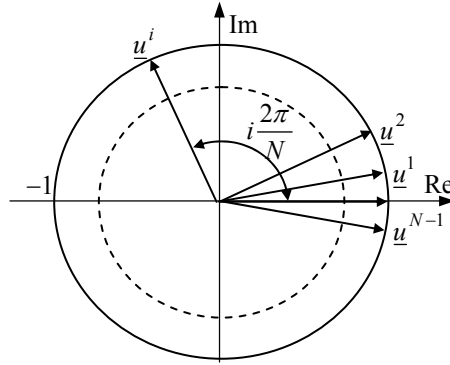


Fig. 5.25 Steaua vectorilor unitari  $\underline{u}^i$ ,  $i = \overline{0, N-1}$

$$(5.82) \quad X^*(i) = \mathcal{F}_d \{x(i)\} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot e^{-jik\frac{2\pi}{N}}, \quad i = \overline{0, N-1}$$

$$(5.83) \quad x(k) = \mathcal{F}_d^{-1} \{X^*(k)\} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X^*(i) \underline{u}^{ik}, \quad k = \overline{0, N-1}$$

*Transformata Fourier discretă directă* este definită de relația (5.78) sau prin relația (5.82). *Transformata Fourier discretă inversă* este definită prin relația (5.80) sau prin relația (5.83).

### Calculul transformatei Fourier discrete

Dacă se dezvoltă relația (5.82), pentru  $i=0,1,2,\dots,N-1$ , se obțin  $N$  relații algebrice, care pot fi scrise sub forma matricială (5.84).

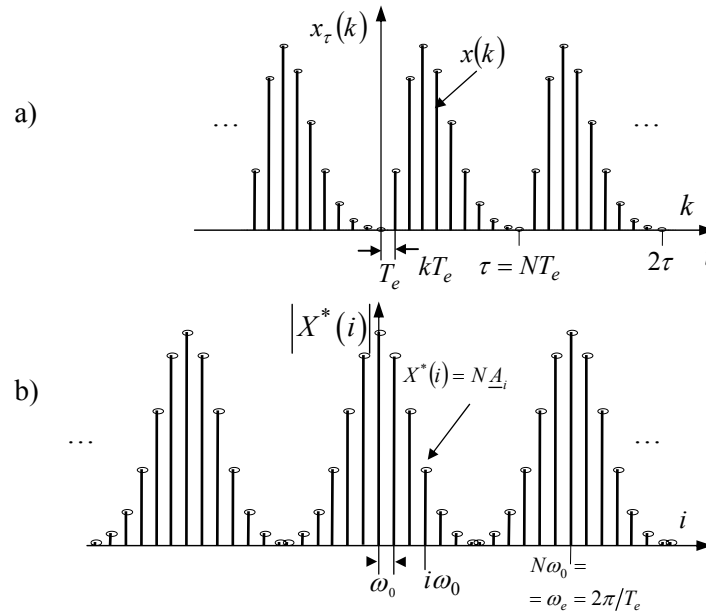
$$(5.84) \quad \begin{bmatrix} X^*(0) \\ X^*(1) \\ X^*(2) \\ \dots \\ X^*(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \underline{u} & \underline{u}^2 & \dots & \underline{u}^{N-1} \\ 1 & \underline{u}^2 & \underline{u}^4 & \dots & \underline{u}^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \underline{u}^{N-1} & \underline{u}^{2(N-1)} & \dots & \underline{u}^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ \dots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

Pornind de la particularitățile matricii din relația (5.84) (identitatea liniilor și coloanelor având același indice;  $\underline{u}^N = 1$ , etc.) a fost dezvoltat un algoritm de calcul rapid al valorilor  $X^*(k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ . Transformata Fourier discretă astfel calculată se numește **transformata Fourier rapidă** (TFR), sau FFT (**Fast Fourier Transform** – în limba engleză).

### Semnificația transformatei Fourier discrete

Valorile  $x(k)$  sunt eșantioanele  $x(kT_e)$  ale semnalului  $x(t)$ . Valorile  $X^*(i)$  sunt proporționale cu coeficienții  $\underline{A}_i$  ai dezvoltării în SFC a semnalului  $x_\tau(t)$ , având perioada  $\tau$ :

$$(5.85) \quad X^*(i) = N \cdot \underline{A}_i$$



**Fig. 5.26** Eșantionarea unei caracteristici spectrale introduce o periodicitate a semnalului

Transformata Fourier discretă stabilește o corespondență între valorile eșantioanelor lui  $x(k)$  și  $X^*(i)$  ale unui același semnal, în domeniul temporal și respectiv frecvențial:

a – eșantionarea caracteristicii spectrale cu un pas  $\omega_0 = 2\pi/\tau$  (vezi fig. 5.26, b)) introduce o periodicitate a semnalului, deci  $x(t)$  este transformat în  $x_\tau(t)$  (vezi fig. 5.26, a));

b – eșantionarea semnalului  $x(t)$  introduce o periodicitate a caracteristicii

spectrale, deci  $X(\omega)$  este transformată în  $X^*(\omega)$ ;

c – șirul eșantioanelor  $x(k)$ ,  $k=0,1,\dots,N-1$  (care este o parte a semnalului eșantionat  $x_\tau(k)$ ) are ca model spectral șirul de valori eșantionate  $X^*(i)$ ,  $i=0,1,\dots,N-1$  (care este o parte a caracteristicii spectrale  $X^*(\omega) = \frac{1}{T_e} \cdot X(\omega)$ , eșantionate cu pasul  $\omega_0 = 2\pi/\tau$ ).

### Legătura între transformata Fourier discretă și transformata $\mathcal{Z}$

Transformata  $\mathcal{Z}$  a semnalului eșantionat  $x(k)$  este:

$$(5.86) \quad X(z) = \mathcal{Z}\{x(k)\} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot z^{-k}$$

Se plasează variabila  $z$  pe cercul unitar și se impune eșantionarea variabilei  $z$  pe acest cerc, cu pasul egal cu  $2\pi/N$ . Se obțin eșantioanele variabilei  $z$  corespunzătoare seriei  $\{\underline{u}^0 = 1; \underline{u}^1 = \underline{u}; \underline{u}^2; \dots \underline{u}^{N-1}\}$  (vezi fig. 5.25). În acest caz, transformata  $\mathcal{Z}$  devine transformata Fourier discretă:

$$(5.87) \quad X^*(i) = X(z) \Big|_{z=\underline{u}^i} = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \underline{u}^{-ik}, \quad i=0,1,\dots,N-1$$

*Observație:*

Legătura dintre transformata  $\mathcal{Z}$  și transformata Fourier discretă permite transferarea înspre transformata Fourier discretă a celor mai multe dintre proprietățile transformatei  $\mathcal{Z}$ . Astfel, definind **produsul de convoluție ciclic** al semnalelor discrete  $x_1(k)$  și  $x_2(k)$ ,  $k=0, N-1$ :

$$(5.88) \quad x(k) = x_1(k) \otimes x_2(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x_1(i) \cdot x_2(k-i), \quad k = \overline{0, N-1},$$

se obține:

$$(5.89) \quad \mathcal{F}_d\{x(k)\} = \mathcal{F}_d\{x_1(k) \otimes x_2(k)\} = X_1^*(k) \cdot X_2^*(k)$$

De asemenea, definind convoluția ciclică a imaginilor  $X_1^*(k)$  și  $X_2^*(k)$ :

$$(5.90) \quad X^*(k) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} X_1^*(i) \cdot X_2^*(k-i),$$

rezultă:

$$(5.91) \quad \mathcal{F}_d^{-1}\{X^*(k)\} = x_1(k) \cdot x_2(k)$$

### Calculul numeric al transformatei Fourier discrete folosind Matlab

De obicei, calculul numeric este realizat folosind un algoritm de viteză de calcul maximă, care este *algoritmul transformatei Fourier rapide* (algoritmul FFT). Numărul de eșantioane ale semnalului trebuie să fie de forma  $2^m$ , cu  $m$  întreg (de exemplu: 32, 64, 128, 256, 512, 1024...).

Comanda Matlab pentru calculul transformatei Fourier discrete este:

```
spc=fft(x,N),
```

unde  $x$  este vectorul care conține eșantioanele  $x(i)$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , și  $\text{spc}$  este vectorul ale cărui componente sunt numerele complexe  $X^*(i)$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , reprezentând transformata Fourier discretă, definită de expresia (5.82). Dacă  $N$  nu este de forma  $2^m$ , funcția `fft` generează același rezultat, dar timpul de calcul crește sensibil.

Legătura dintre transformata Fourier discretă și seria Fourier care descrie semnalul periodic eșantionat,  $x_T(nT_e)$ , de perioadă  $T = NT_e$ , este:

$$(5.92) \quad x_T(nT_e) = C_0 + \sum_{i=1}^{N/2} [C_i \cos(i\omega_0 \cdot nT_e) + S_i \sin(i\omega_0 \cdot nT_e)],$$

unde:

$$(5.93) \quad \begin{cases} C_0 = \frac{X^*(0)}{N}; & C_i = \frac{2\operatorname{Re}\{X^*(i)\}}{N} = \frac{2\operatorname{Re}\{\text{spc}(i+1)\}}{N} \\ S_i = \frac{2\operatorname{Imag}\{X^*(i)\}}{N} = \frac{2\operatorname{Imag}\{\text{spc}(i+1)\}}{N}; & i = \overline{1, N/2} \end{cases}$$

Cum  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/NT_e$ , rezultă:

$$(5.94) \quad x_T(nT_e) = C_0 + \sum_{i=1}^{N/2} [C_i \cos(2\pi i n / N) + S_i \sin(2\pi i n / N)]$$

*Observații:*

1) În fig. 5.26, b) componentele  $X^*(1), X^*(2), \dots, X^*(N-1)$ , corespunzătoare, respectiv, valorilor  $\text{spc}(2), \text{spc}(3), \dots, \text{spc}(N)$ , sunt simetrice – excepție făcând  $X^*(0) \equiv \text{spc}(1)$ , care este valoarea medie a semnalului – adică:  $X^*(1) = X^*(N-1)$ ;  $X^*(2) = X^*(N-2)$ ;... Deci sunt necesare numai componentele  $X^*(i)$ ,  $i = \overline{0, N/2}$ , pentru a cunoaște modelul spectral al semnalului.

2) Conform relației (5.85), avem  $\underline{A}_i = X^*(i)/N$ , de unde se obține

spectrul seriei Fourier armonice:

$$(5.95) \quad \begin{cases} A_0 = X^*(0); & A_i = 2 \cdot |A_i| = |X^*(i)| / (N/2) \\ \varphi_i = \arg\{X^*(i)\} \end{cases} \quad i = \overline{1, N/2}$$

*Exemplul 5.8:*

Fie semnalul:

$$(5.96) \quad x(t) = -\cos\Omega t + 0.5 \cdot \sin 2\Omega t + 0.2; \quad t \in [0, T], \quad \Omega = 2\pi/T_0,$$

cu  $T_0 = 3.2s$  și  $T = 2T_0$ . Pentru perioada de eșantionare  $T_e = 0.1s$ ,  $N = 32$ , programul Matlab utilizat pentru analiza spectrală a semnalului este:

```
clear all;
T0=3.2;T=2*T0;Te=0.1;N=T/Te;om=2*pi/T0;
for i=1:N      %calculul eșantioanelor semnalului
    ind(i)=i;
    x(i)=-cos(om*(i-1)*Te)+1.5*sin(2*om*(i-1)*Te)+0.2;
end;
figure(1);stem(ind,x);grid;pause;
spc=fft(x,N); %calculul transformatei Fourier directe
N1=N/2;
spc1=abs(spc)/N1; %calculul spectrului de amplitudini
spc1(1)=spc(1)/N;
figure(2);stem(ind(1:N1),spc1(1:N1));
grid;axis([0 32 0 1.5]);pause;
for i=1:N1, %calculul spectrului de faze
    if abs(spc(i))<1e-7 spc2(i)=0;
    else spc2(i)=angle(spc(i));
    end;
end;
figure(3);stem(ind(1:N1),spc2(1:N1));
grid;axis([0 32 -3.5 0]);pause;
xi=ifft(spc,N); %calculul transformatei Fourier inverse
figure(4);stem(ind,xi);grid;
C0=spc1(1); %calculul seriei Fourier trigonometrice
for i=1:N1,
    C(i)=2*real(spc(i+1))/N;
    S(i)=-2*imag(spc(i+1))/N;
end;
for n=1:N, %calculul semnalului pe baza seriei Fourier trigonometrice
    xc(n)=C0;
    for k=1:N1
        xc(n)=xc(n)+C(k)*cos(2*pi*k*(n-1)/N)+S(k)*sin(2*pi*k*(n-1)/N);
    end;
end;
figure(5);stem(ind,xc);grid;pause;
```

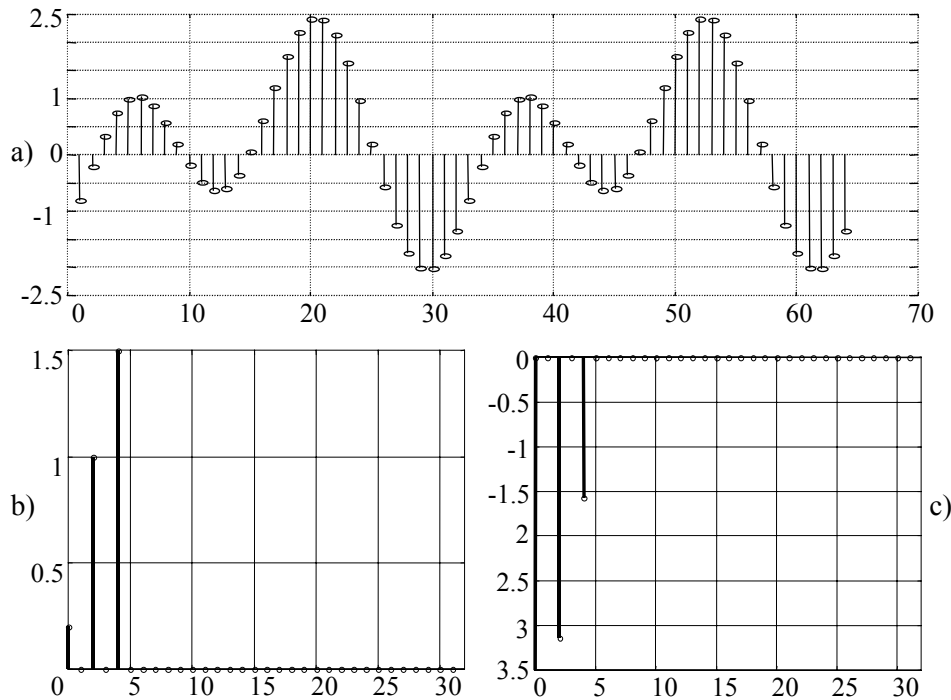


Fig. 5.27 Analiza spectrală a unui semnal (exemplul 5.8)

Programul realizează operațiile următoare:

- reprezentarea grafică a semnalului (fig. 5.27, a));
- calculul transformatei Fourier discrete,  $\text{spc}(i)$ ,  $i = \overline{1, N}$ , și calculul spectrelor de amplitudini și de faze,  $\text{spc1}(i)$  și  $\text{spc2}(i)$ ,  $i = \overline{1, N/2}$ .

Eșantionarea caracteristicii spectrale este realizată cu un pas de eșantionare  $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/(2T_0) = \Omega/2$ . Expresia semnalului se scrie:

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.2 + 1 \cdot \cos(\Omega t - \pi) + 0.5 \cos\left(2\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= A_0 + A_1 \cos(\Omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\Omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

unde  $A_0 = 0.2$  și armonicile de frecvențe  $\Omega = 2\omega_0$  și  $2\Omega = 4\omega_0$  au amplitudinile  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.5$  și fazele  $\varphi_1 = -\pi$ ,  $\varphi_2 = -\pi/2$  (fig. 5.26, b) și c));

- calculul transformatei Fourier inverse, folosind funcția *ifft*; se obține semnalul  $x_i$ , care este practic identic cu semnalul inițial,  $x$ ;
- calculul parametrilor  $C_i$  și  $S_i$  ai seriei Fourier trigonometrice. Pornind de la expresia analitică a acestei serii, se calculează semnalul  $x_c$ , care este practic identic cu semnalul inițial,  $x$ .

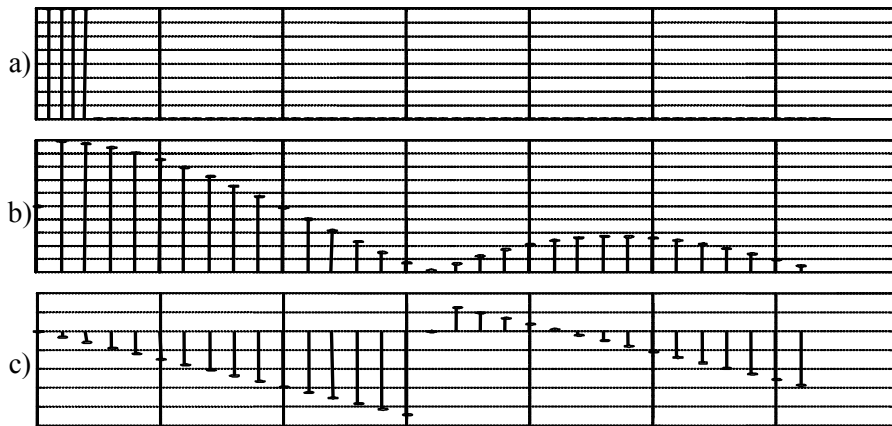


*Exemplul 5.9:*

Fie:

$$(5.97) \quad x(t) = \begin{cases} T/(2T_1), & 0 \leq t \leq T_1 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Pentru  $T = 32s$ ;  $T_1 = 2s$  și  $T_e = 0.5s$ , un alt program Matlab, cu aceeași structură, generează rezultatele corespunzătoare spectrului reprezentat în fig. 5.28, b) și c). Aceste rezultate corespund spectrului dat în fig. 2.16, b).



**Fig. 5.28** Analiza spectrală a unui semnal (exemplul 5.9)

Diferențele întâlnite se explică după cum urmează:

- suprafața impulsului corespunzător fig. 5.28 este unitară și pentru exemplul considerat are valoarea  $T/2 = 16$ ;
- semnalul dat este întârziat cu  $T_1/2 = 1s$ , față de seria reprezentată în fig. 2.15. Defazajul produs de această întârziere depinde liniar de frecvență:  $i\omega_0 T_1/2$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ , cu  $\omega_0 = 2\pi/T$ . Spectrul de faze are discontinuități atunci când sinusul cardinal își schimbă semnul (vezi fig. 5.28, c)).

### 5.9. Transformata Hilbert discretă

Fie  $x(k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ , eșantioanele unui semnal și  $X^*(k)$ ,  $k = \overline{0, N-1}$ , transformata Fourier discretă a semnalului cu timp discret. Notând cu  $X(z)$  transformata în  $z$  a semnalului  $x(k)$ , s-a arătat că  $X^*(k)$  se obține din  $X(z)$  impunând ca variabila  $z$  să parcurgă cercul unitar,  $z = e^{j\theta}$ , cu pasul de discretizare  $\delta = 2\pi/N$  al unghiului  $\theta$ .

$$(5.98) \quad X^*(k) = X\left(e^{jk\delta}\right), \quad k = \overline{0, N-1}$$

Transformata Hilbert a semnalului discret  $x(k)$  se poate defini ca fiind

semnalul  $\hat{x}(k)$ , astfel încât **semnalul analitic discret**, definit prin:

$$(5.99) \quad z(k) = x(k) + j\hat{x}(k),$$

să aibă transformata în  $z$  pe cercul unitar de forma:

$$(5.100) \quad Z(e^{j\theta}) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq \theta \leq 0 \\ X(1), & \theta = 0 \\ 2X(e^{j\theta}), & 0 < \theta \leq \pi \end{cases}$$

Aplicăm în (5.99) transformata în  $z$  pentru  $z = e^{j\theta}$ . Rezultă:

$$(5.101) \quad Z(e^{j\theta}) = X(e^{j\theta}) + j\hat{X}(e^{j\theta})$$

Pentru ca relația (5.100) să fie îndeplinită,  $\hat{X}(e^{j\theta})$  trebuie să aibă forma:

$$(5.102) \quad \hat{X}(e^{j\theta}) = \begin{cases} jX(e^{j\theta}), & -\pi \leq \theta \leq 0 \\ 0, & \theta = 0 \\ -jX(e^{j\theta}), & 0 < \theta \leq \pi \end{cases} = T(e^{j\theta}) \cdot X(e^{j\theta}),$$

unde:

$$(5.103) \quad T(e^{j\theta}) = -j\text{sign}(\theta)$$

Vom calcula semnalul discret  $t(k)$ , a cărui transformată  $\mathcal{Z}$ , pentru  $z = e^{j\theta}$ , are forma (5.103). Pentru aceasta, în formula de definiție a transformatei în  $z$  inverse, (5.25), punem  $z = e^{j\theta}$ . Vom avea  $dz = je^{j\theta} d\theta$ , iar integrala pe cercul  $C$  se va transforma într-o integrală în raport cu  $\theta$ , cu limitele 0 și  $2\pi$ . Deci:

$$\begin{aligned} t(k) &= \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_0^{2\pi} T(e^{j\theta}) \cdot e^{(k-1)j\theta} \cdot je^{j\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_0^{2\pi} (-j\text{sign}(\theta)) \cdot je^{jk\theta} d\theta = \\ &= \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_0^{2\pi} (\cos(k\theta) \cdot \text{sign}(\theta) + j \sin(k\theta) \cdot \text{sign}(\theta)) d\theta \end{aligned}$$

sau, având în vedere că primul termen de sub integrală este funcție impară, iar al doilea este funcție pară, rezultă:

$$(5.104) \quad t(k) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) d\theta = \frac{1}{k\pi} \cdot (1 - \cos(k\pi)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Se observă că funcția  $t(k)$  este nulă pentru  $k$  par și egală cu  $2/(k\pi)$  pentru  $k$  impar. Punând  $\theta = k\delta$  în relația (5.102), se obține relația care leagă transformatele Fourier discrete respective:

$$\widehat{X}^*(k) = T^*(k) \cdot X^*(k)$$

Aplicând aici transformata Fourier discretă inversă și ținând cont de relația (5.89), se obține expresia transformatei Hilbert discrete a semnalului  $x(k)$ :

$$\widehat{x}(k) = t(k) \otimes x(k)$$

Se observă că, la fel ca în cazul semnalelor cu timp continuu (vezi relația (3.91)), transformata Hilbert a semnalului  $x(k)$  se exprimă prin convoluția lui  $x(k)$  cu semnalul dependent de inversul timpului discret, adică  $t(k) = 2/(k\pi)$ .

### Calculul transformatei Hilbert în Matlab

Funcția `hilbert` calculează semnalul analitic aferent unui semnal dat. Apelarea ei se face astfel:

```
z=hilbert(x),
```

în care  $x$  este vectorul care conține valorile semnalului eșantionat, iar  $z$  este un vector de mărimi complexe, la care partea reală este semnalul  $x$  și partea imaginară este transformata Hilbert,  $\widehat{x}$ .

În programul Matlab, prezentat în cele ce urmează, se generează semnalul  $x$  cu relația (5.96), fiind reprezentat grafic (vezi fig. 5.27, a)), apoi se apelează funcția `hilbert`. Semnalul  $\widehat{x}$  este reprezentat în fig. 5.29. În continuare se apelează din nou funcția `hilbert` (cu semn inversat), argumentul funcției fiind  $\widehat{x}$ . Rezultatul afișat este practic identic cu semnalul inițial,  $x$ , reprezentat în fig. 5.27, a). Se verifică astfel faptul că prin aplicarea de două ori a transformatei Hilbert se obține semnalul inițial cu semn schimbat.

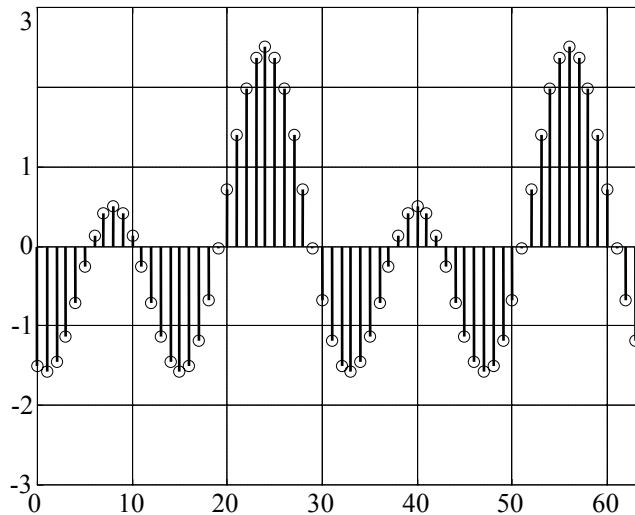


Fig. 5.29 Transformata Hilbert a semnalului din fig. 5.27

```
clear all;
T0=3.2;T=2*T0;Te=0.1;N=T/Te;om=2*pi/T0;

for i=1:N, %calculul semnalului
    ind(i)=i-1;
    x(i)=-cos(om*(i-1)*Te)+1.5*sin(2*om*(i-1)*Te);
end;

figure(1);stem(ind,x);grid;axis([0 64 -3 3]);pause;
hil=hilbert(x);
hil=imag(hil);

figure(2);stem(ind(1:N),hil(1:N));
grid;axis([0 64 -3 3]);pause;
x1=-hilbert(hil);
x1=imag(x1);

figure(3);stem(ind(1:N),x1(1:N));
grid;axis([0 64 -3 3]);pause;
```



## Capitolul 6

### SEMNALE ALEATOARE

#### 6.1. Noțiunea de semnal aleator

Un semnal aleator este un proces a cărui evoluție în timp este supusă legilor probabilistice. Pentru a caracteriza proprietățile statistice ale semnalelor aleatoare trebuie să introducem noțiunile de funcție de repartiție și densitate de probabilitate.

Fie  $N$  realizări ale unui semnal aleator (fig. 6.1). Presupunem că printre acestea, sunt un număr de  $n_1$  realizări care au la momentul  $t_1$  valori inferioare sau egale cu  $x_1$ . **Funcția repartiție** de ordinul întâi se definește ca:

$$(6.1) \quad F_1(x_1, t_1) = \text{prob} \{x(t_1) \leq x_1\} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_1}{N}$$

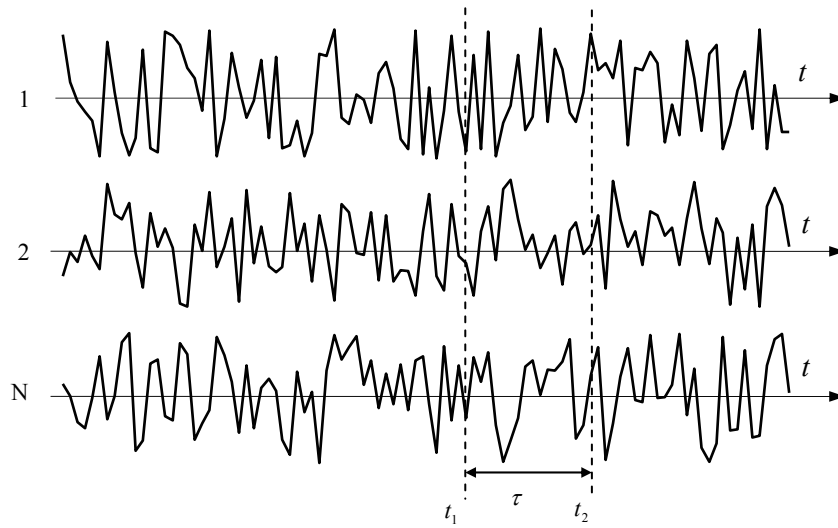


Fig. 6.1 Realizarea unui semnal aleator

Cu ajutorul acestei funcții se definește **densitatea de probabilitate** de ordinul întâi:

$$(6.2) \quad \rho_1(x_1, t_1) = \frac{\partial F_1(x_1, t_1)}{\partial x_1}$$

Funcția de repartiție de ordinul doi, considerată la momentele  $t_1$  și  $t_2$ , este:

$$(6.3) \quad F_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \text{prob} \{x(t_1) \leq x_1; x(t_2) \leq x_2\}$$

Densitatea de probabilitate de ordinul doi este:

$$(6.4) \quad \rho_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \frac{\partial^2 F_2(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

În același mod se definesc funcția repartiție de ordinul  $n$  și funcția densitate de probabilitate de ordinul  $n$ :

$$(6.5) \quad F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \text{prob}\{x(t_1) \leq x_1; \dots; x(t_n) \leq x_n\}$$

$$(6.6) \quad \rho_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

## 6.2. Clasificarea semnalelor aleatoare

Putem clasifica semnalele aleatoare considerând trei criterii, enumerate în continuare.

### 1. Ordinul densității de probabilitate, care descrie semnalul.

A. *Semnal aleator pur*, caracterizat de relația:

$$(6.7) \quad \rho_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \rho_1(x_n, t_n), \text{ unde: } t_1 < t_2 < \dots < t_n,$$

adică realizarea  $x_n$  la  $t_n$  este independentă de realizările anterioare. Deoarece fiecare realizare este independentă, rezultă:

$$(6.8) \quad \rho_n(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = \prod_{i=1}^n \rho_1(x_i, t_i),$$

ceea ce înseamnă că densitatea de probabilitate de ordinul  $n$  poate fi calculată plecând de la densitatea de probabilitate de ordinul întâi.

B. *Proces Markov simplu*, care este descris complet de densitatea de probabilitate de ordinul doi. În acest caz:

$$(6.9) \quad \rho_n(x_n, t_n | x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = \rho_2(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1})$$

*Observații:*

Procesele aleatoare pure nu se întâlnesc niciodată în realitate. Semnalele aleatoare reale pot fi considerate ca fiind procese Markov simple.

Parametrii unui proces aleator pur se calculează plecând de la densitatea de probabilitate de ordinul întâi. Aceștia sunt:

**Valoarea medie** (moment de ordinul întâi)

$$(6.10) \quad \tilde{x}(t_1) = E\{x(t_1)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 p_1(x_1, t_1) dx_1$$

**Varianța** (momentul centrat de ordinul doi)

$$(6.11) \quad \sigma_x^2(t_1) = E\left\{ [x(t_1) - \tilde{x}(t_1)]^2 \right\} = E\{x^2(t_1)\} - \tilde{x}^2(t_1)$$

Procesele Markov simple sunt definite, de asemenea, de **funcția de autocorelație** (momentul de ordin doi):

$$(6.12) \quad R_{xx}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \rho_2(x_1, t_1; x_2, t_2) dx_1 dx_2$$

Pentru două procese aleatoare,  $x(t)$  și  $y(t)$ , considerate ca fiind procese Markov simple, putem defini **funcția de intercorelație**:

$$(6.13) \quad R_{xy}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 y_2 \rho_2(x_1, t_1; y_2, t_2) dx_1 dy_2$$

## 2. Dependența de timp a caracteristicilor statistice

A. *Procese aleatoare netaționare*, ale căror caracteristici statistice depind de timp:  $\rho_1(x_1, t_1)$ ;  $\rho_2(x_1, t_1; x_2, t_2)$ , etc.

B. *Procese aleatoare staționare*, ale căror caracteristici nu depind de timp:

$$(6.14) \quad \rho_1(x_1, t_1) = \rho_1(x_1)$$

iar densitatea de probabilitate de ordinul doi nu depinde decât de diferența ( $t_2 - t_1$ ):

$$(6.15) \quad \rho_2(x_1, t_1; x_2, t_2) = \rho_2(x_1, x_2, \tau),$$

$$(6.16) \quad \tau = t_2 - t_1$$

În acest caz, relațiile (6.10)..(6.13) devin:

$$(6.17) \quad \tilde{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_1(x) dx$$

$$(6.18) \quad \sigma_x^2 = \tilde{x}^2 - \tilde{x}^2$$

$$(6.19) \quad R_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 \rho_2(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2$$

$$(6.20) \quad R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \rho_2(x, y, \tau) dx dy$$

**Observație:**

Semnalele ale căror proprietăți sunt complet descrise de momentele de



ordinul unu și doi se numesc „staționare în sens larg”, sau „staționare până la ordinul doi”. Relațiile (6.14) și (6.15) definesc procesele aleatoare „staționare în sens strict”. Procesele staționare în sens strict sunt și staționare în sens larg. Reciproca nu este întotdeauna valabilă.

### 3. Modalitatea de calcul a valorii medii

După acest criteriu de clasificare putem considera:

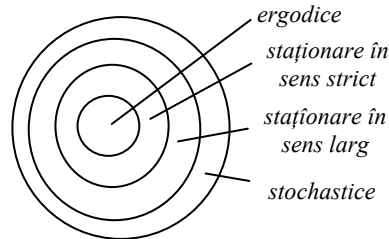
A. *Procese aleatoare generale*, pentru care valorile medii sunt determinate **pe întregul set de date**, utilizând relațiile (6.10), (6.12) și (6.13), sau, pentru procese staționare, relațiile (6.17), (6.19) și (6.20).

B. *Procese ergodice*, atunci când valorile medii statistice sunt egale cu valorile medii temporale.

În cazul proceselor ergodice sunt valabile relațiile:

$$(6.21) \quad \tilde{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x \rho_1(x) dx = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \right\}$$

$$(6.22) \quad \sigma_x^2 = \widetilde{x^2} - \tilde{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$



**Fig. 6.2** Clasificarea proceselor aleatoare

$$(6.23) \quad \begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \overline{x(t) \cdot x(t+\tau)} = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \right\} \end{aligned}$$

$$(6.24) \quad \begin{aligned} R_{xy}(\tau) &= \overline{x(t) \cdot y(t+\tau)} = \overline{x(t)y(t+\tau)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt \right\} \end{aligned}$$

Clasificarea proceselor aleatoare este reprezentată în fig. 6.2.

### 6.3. Caracterizarea statistică a semnalelor

Considerăm în continuare cazul semnalelor ergodice. Caracteristicile statistice pot fi descrise fie în domeniul timp, fie în domeniul frecvență.

A. Caracteristica temporală a unui semnal aleator este **funcția de autocorelație** (numită mai simplu **funcția de corelație**):

$$(6.25) \quad R_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \right\}$$

Proprietățile acestei funcții (fig. 6.3) sunt următoarele:

1) Funcția de autocorelație este pară:  $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$ ;

2) Este valabilă relația:

$$(6.26) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} R_{xx}(\tau) = 0$$

3) Funcția de corelație are un maxim în origine, unde:

$$(6.27) \quad R_{xx}(0) = \overline{x^2} = \sigma_x^2 + \bar{x}^2$$

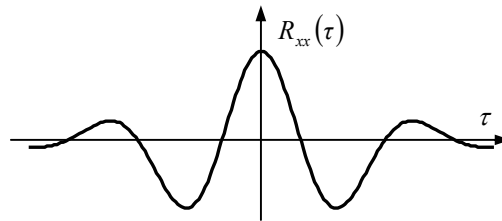


Fig. 6.3 Funcția de corelație

*Observație:*

Dacă  $\bar{x} = 0$ , atunci  $R_{xx}(\tau)$  este numită *funcție de autocovarianță*, sau *funcție de covarianță*.

B. Caracteristica în domeniul frecvență a unui semnal aleator este **funcția de densitate spectrală a puterii**,  $S_{xx}(\omega)$ , definită prin relația:

$$(6.28) \quad S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} |X_T(\omega)|^2 \right\},$$

unde  $X_T(\omega)$  este transformata Fourier a semnalului  $x_T(t)$ . Acesta este o „parte” din procesul aleator, văzut prin fereastra de timp  $[-T, T]$  (fig. 6.4).

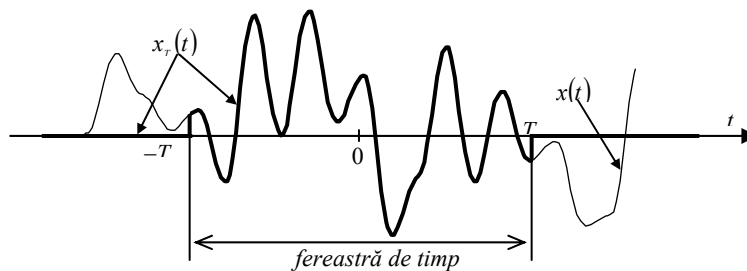


Fig. 6.4 Definiția semnalului  $x_T(t)$

Funcția  $S_{xx}(\omega)$  este o funcție reală, pară și, în plus:

$$(6.29) \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} S_{xx}(\omega) = 0,$$

Ea desemnează densitatea de putere a semnalului pe axa frecvențelor,  $(\omega)$ .

*Observație:*

Pentru două procese aleatoare,  $x(t)$  și  $y(t)$ , se poate defini *densitatea spectrală mutuală (densitatea interspectrală)*, prin relația:

$$(6.30) \quad S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2T} X_T(-\omega) \cdot Y_T(\omega) \right\},$$

unde  $X_T(\omega)$  și  $Y_T(\omega)$  sunt transformatele Fourier ale semnalelor  $x_T(t)$  și  $y_T(t)$ . Densitatea interspectrală este o funcție complexă.

#### 6.4. Teorema Wiener – Hincin

Această teoremă stabilește legătura între caracteristica temporală,  $R_{xx}(\tau)$ , și caracteristica frecvențială,  $S_{xx}(\omega)$ , a unui semnal aleator:

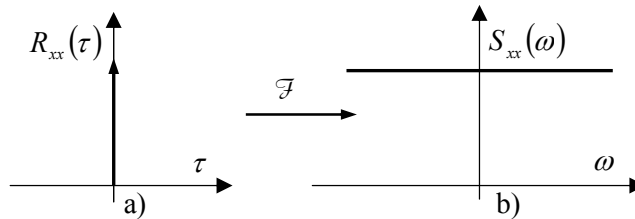
$$(6.31) \quad S_{xx}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{xx}(\tau)\}$$

$$(6.32) \quad R_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{xx}(\omega)\}$$

Ținând cont că funcțiile  $R_{xx}(\tau)$  și  $S_{xx}(\omega)$  sunt funcții pare, rezultă:

$$(6.33) \quad \begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) (\cos\omega\tau - j\sin\omega\tau) d\tau = \\ &= 2 \int_0^{\infty} R_{xx}(\tau) \cos\omega\tau d\tau \end{aligned}$$

$$(6.34) \quad \begin{aligned} R_{xx}(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) (\cos\omega\tau + j\sin\omega\tau) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{xx}(\omega) \cos\omega\tau d\omega \end{aligned}$$



**Fig. 6.5** Caracteristicile unui zgomot alb

Fie  $x(t)$  un semnal aleator pur. Funcția de corelație are forma unui impuls delta (fig. 6.5, a)) și densitatea spectrală de putere este constantă, deci ea

conține componente pentru toate frecvențele (fig. 6.5, b)). Acest semnal, care nu este întâlnit în natură (este de putere infinită), se numește „zgomot alb”.

Semnalele reale se numesc „colorate” și au forme diferite pentru funcțiile de corelație și cea de densitate spectrală de putere (fig. 6.6 și 6.7). Când timp un semnal are o funcție de corelație îngustă, banda de densitate spectrală a puterii este largă (fig. 6.6) și în acest caz semnalul este mai apropiat de zgomotul alb. Dacă funcția de corelație este largă, banda spectrală a semnalului este îngustă (fig. 6.7) și semnalul este mai apropiat de un semnal periodic (determinist).

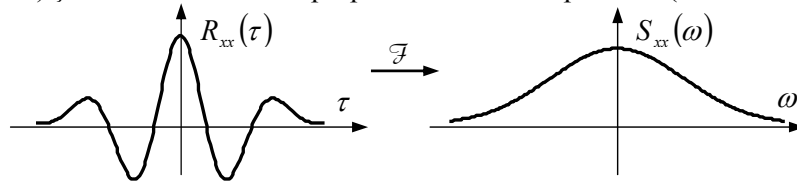


Fig. 6.6 Caracteristicile unui zgomot de bandă largă

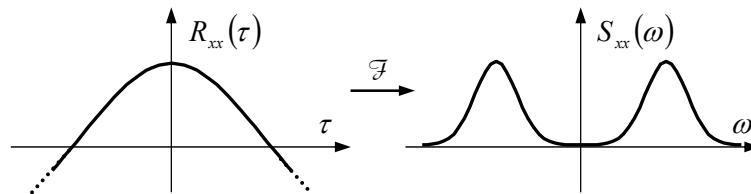


Fig. 6.7 Caracteristicile unui zgomot de bandă îngustă

#### Exemplul 6.1: aplicație în Matlab

Este ilustrat calculul numeric al caracteristicilor statistice ale unui proces aleator. Acesta este conținut într-un fișier de date, achiziționate cu perioada de eșantionare  $T_e$ , pe o durată  $D$ . Numărul datelor din fișier este  $N = D/T_e$ .

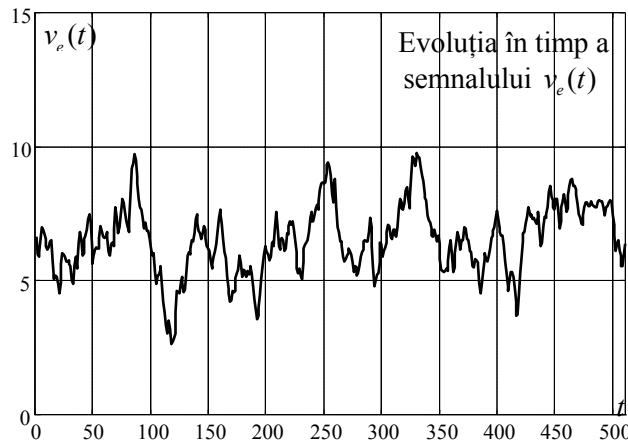


Fig. 6.8 Variabila aleatoare  $v_e$  (exemplul 6.1)

Pentru formarea fișierului de date s-a apelat funcția Matlab `randn`, cu care s-a creat un fișier inițial, notat prin `w`, care conține un zgomot alb normal

distribuit, de medie nulă și dispersie unitară. Acest zgomot s-a aplicat la intrarea unui sistem dinamic, obținându-se la ieșire un zgomot colorat, notat în program cu  $v_e$  și reprezentat în fig. 6.8. Prelucrările efectuate sunt prezentate explicit în programul care urmează. Pentru calculul funcției de corelație s-a apelat funcția Matlab `xcorr`. Funcția densității spectrale de putere este calculată prin două metode: pe baza transformatei Fourier discrete a semnalului și pe baza teoremei Wiener-Hincin (aplicând transformata Fourier discretă funcției de autocorelație). Diferențele dintre rezultatele obținute prin cele două metode sunt extrem de mici: de ordinul a  $10^{-13}$ .

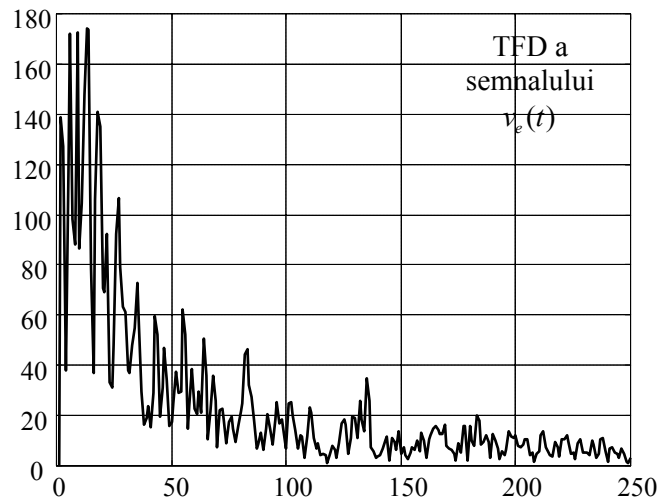


Fig. 6.9 Modul TFD (exemplul 6.1)

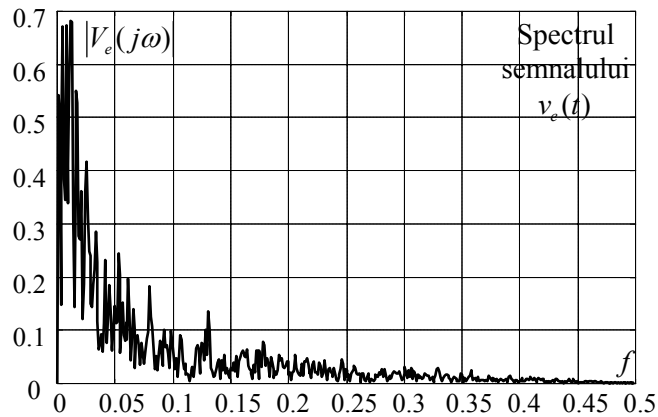


Fig. 6.10 Spectrul semnalului (exemplul 6.1)

```
clear all;clc;clg;
% durata înregistrării și parametri de eșantionare
D=512;Te=1;N=D/Te;fe=1/Te;
df=fe/(2*N);
f=0:df:df*(N-1);
```

```

%generarea unui zgomot colorat și reprezentarea acestuia
sys=tf([10],[20 1]);
s=c2d(sys,1,'tustin');w=randn(1,512);
t=[0:1:N-1];
[y,t]=lsim(s,w,t);ve=y+7;
for i=1:N,
    t(i)=i;
end;
figure(1);plot(t,ve);grid;axis([0 511 0 15]);

%se calculează variabila aleatoare centrată (ve_t)
%prin extragerea valorii medii
ve_t=ve-mean(ve);

%se calculează funcția de corelație a variabilei aleatoare centrate și se
%reprezintă grafic funcția de corelație
crl=xcorr(ve_t,'biased');
figure(2);
for i=1:2*N-1,
    ind(i)=-N+i;
end;
plot(ind,crl);title('Funcția de autocorelație');
axis([-100 100 -0.4 2.5]);
grid;

%se calculează funcția densității spectrale de putere
%cu teorema Wiener-Hincin
ssp=fft(crl,2*N);
ssp=abs(ssp);
ssp=ssp(1:N);

%se "filtrează" caracteristica spectrală, pentru
%reducerea "zgomotului de calcul"
ssp(1)=ssp(1);
for i=2:512,
    ssp(i)=0.5*ssp(i-1)+0.5*ssp(i-1);
end;

%se reprezintă grafic funcția densității spectrale de putere
figure(3);
frq=0:df:df*(N-1);
omg=2*pi*frq;
loglog(frq,ssp);
title('DSPP a semnalului - WH - ssp');
axis([0.005 0.3 10^(-3) 100]);grid;

%calculul transformatei Fourier discrete și reprezentarea grafică
%a modulului transformatei Fourier discrete
tfd=fft(ve_t,2*N);
tfd=abs(tfd);

```

```

figure(4);
plot(tfd);
title('TFD a semnalului');axis([0 256 0 150]);grid;
%calculul spectrului de amplitudini și reprezentarea lui grafică
spc=tfd(1:N)/(N/2);
figure(5);
plot(f,spc);title('Spectrul semnalului');grid;

%calculul densității spectrale de putere,
%pe baza transformatei Fourier
for i=1:2*N,dsp(i)=(tfd(i)^2)/(N);end;
dsp=dsp(1:512);

%se "filtrează" densitatea spectrală de putere,
%pentru reducerea "zgomotului de calcul"
dspf(1)=dsp(1);
for i=2:512,
    dspf(i)=0.5*dspf(i-1)+0.5*dsp(i-1);
end;

%reprezentarea grafică a densității spectrale de putere
figure(6);
loglog(frq,dspf);
title('DSPP a semnalului - DR + WH');
axis([0.005 0.3 10^(-3) 100]);grid;

%se compară densitățile spectrale de putere, calculate prin cele 2 metode,
%și se reprezintă grafic diferența
for i=1:512,
    y(i)=dsp(i)-ssp(i);
end;
figure(8);
plot(y);title('Diferența');
axis([0 512 -8e-14 4e-14]);grid;

```

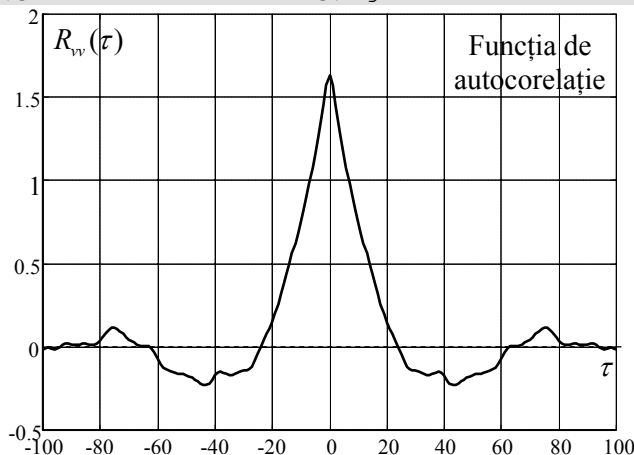
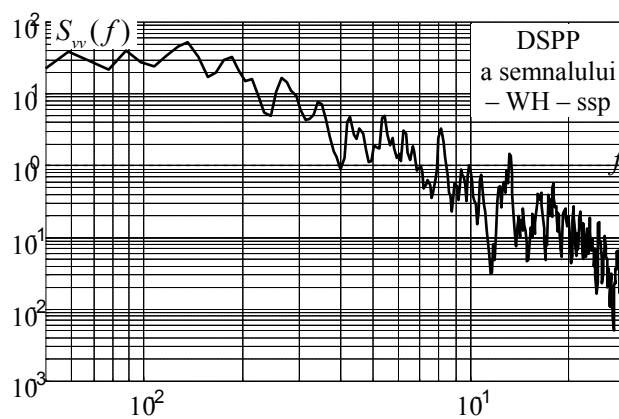
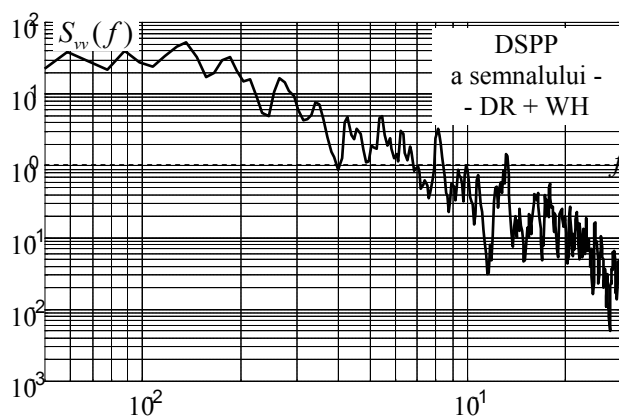


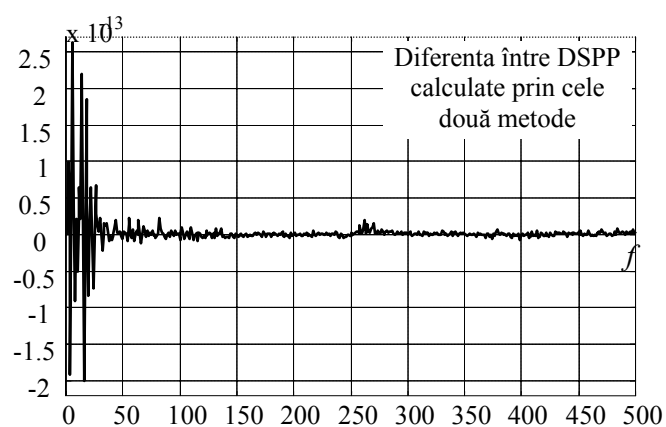
Fig. 6.11 Funcția de autocorelație a variabilei aleatoare  $v_e$  (exemplul 6.1)



**Fig. 6.12** Densitatea spectrală de putere calculată pe baza teoremei Wiener -Hincin (exemplul 6.1)



**Fig. 6.13** Densitatea spectrală de putere calculată pe baza TFD a semnalului aleator (exemplul 6.1)



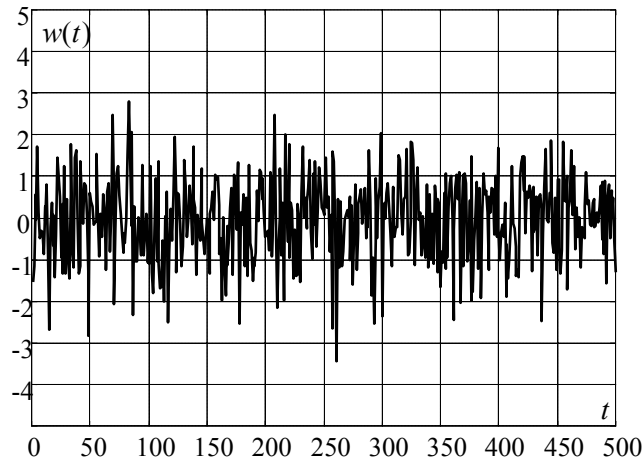
**Fig. 6.14** Diferența dintre densitățile spectrale calculate pe baza celor 2 metode (exemplul 6.1)



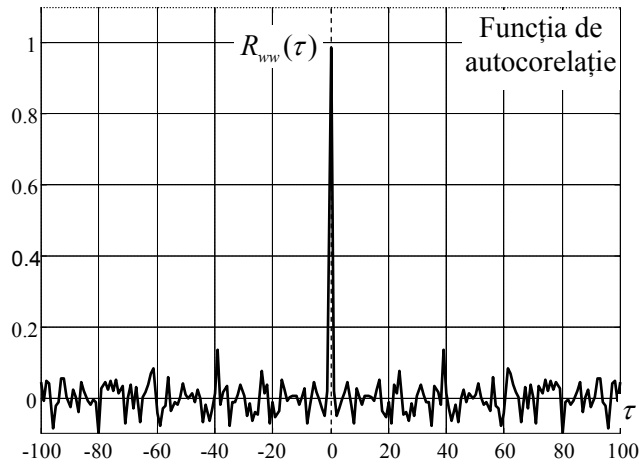
*Exemplul 6.2:*

Se consideră variabila  $w$  din programul Matlab prezentat în exemplul anterior. Ea este generată prin funcția Matlab `randn` ca fiind un zgomot pseudo-aleator „alb”, cu distribuție normală, de medie nulă și dispersie unitară. Se consideră că fisierul  $w$  ar reprezenta un semnal aleator, achiziționat cu perioada de eșantionare  $T_e$ . Pe baza unui program similar celui anterior, se vor determina caracteristicile statistice ale acestui semnal.

Evoluția variabilei  $w$  este prezentată în fig. 6.15. Se constată că, în comparație cu zgomotul colorat din fig. 6.8, evoluția acestei variabile este mult mai „agitată”.



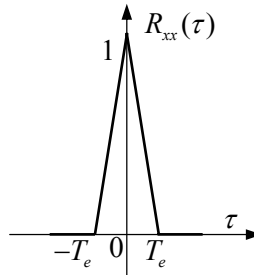
**Fig. 6.15** Zgomotul pseudo-aleator  $w$  (exemplul 6.2)



**Fig. 6.16** Funcția de autocorelație a variabilei  $w$  (exemplul 6.2)

Funcția de autocorelație a variabilei  $w$ ,  $R_{ww}(t)$ , este reprezentată în fig. 6.16. Se pot face următoarele constatări:

- această funcție nu este nulă pentru  $t \neq 0$ , după cum nu este infinită la  $t = 0$ . Prin urmare, semnalul  $w$  nu este un zgomot alb, ci o secvență de valori – numită *zgomot pseudo-aleator* – care aproximează zgomotul alb. Este important de știut măsura în care erorile de aproximare sunt admisibile;
- făcând abstracție de „zgomotul” numeric (de calcul) care afectează funcția de corelație pentru  $t \neq 0$ , această funcție se poate considera ca fiind apropiată de un impuls real, de forma celui din fig. 6.17;



**Fig. 6.17** Funcția de autocorelație prezentată ca un impuls real (exemplul 6.2)

- constatăm că „deschiderea” funcției de autocorelație este foarte mică, doar în domeniul  $[-T_e, T_e]$ , pe când, în cazul zgomotului colorat (vezi fig. 6.11), „deschiderea” se extinde pe zeci de perioade de eșantionare;
- aria impulsului real este egală cu  $\sigma^2 \cdot T_e = T_e$  (s-a considerat – în cazul nostru – că dispersia este unitară), pe când aria impulsului  $R_{ww}(\tau) = \delta(\tau)$ , aferent unui zgomot alb teoretic de medie nulă și dispersie unitară este, firește, unitară;
- densitatea spectrală de putere a zgomotului alb teoretic este  $S_{ww}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{ww}(\tau)\} = \mathcal{F}\{\delta(\tau)\} = 1$ . Evident, puterea acestui zgomot este proporțională cu integrala funcției  $S_{ww}(\omega)$  pe tot domeniul frecvențelor, deci este infinită. Ne propunem să calculăm densitatea spectrală de putere a zgomotului pseudo-aleator, pe cale numerică și pe cale analitică, pentru a examina diferențele față de zgomotul alb teoretic;
- aplicând TFD (cu funcția Matlab `fft`) funcției de autocorelație din fig. 6.16, se obține – pe cale numerică – funcția densității spectrale de putere, dată în fig. 6.18. Observăm că, spre deosebire de cazul zgomotului colorat, când caracteristica spectrală este descrescătoare (vezi fig. 6.12), aici – făcând abstracție de „zgomotul” de calcul numeric – caracteristica spectrală este constantă, în banda de frecvențe în care aceasta s-a calculat;
- după cum se cunoaște, conform teoremei lui Shannon, banda semnalului eșantionat nu poate depăși jumătate din frecvența de eșantionare. Constatăm însă că în prelucrarea digitală a datelor din fișierul  $w$  nicăieri nu a intervenit perioada de eșantionare. Deci, dacă fișierul  $w$  ar reprezenta date achiziționate cu o rată de o secundă sau o milisecundă, rezultatul numeric ar fi

aceiași, iar stabilirea benzii de frecvență în care densitatea spectrală de putere este practic constantă, adică a domeniului  $[-f_e/2, +f_e/2]$ , trebuie făcută separat, pe baza cunoașterii perioadei de eșantionare;

• vom calcula analitic densitatea spectrală de putere, considerând forma din fig. 6.17 a funcției de autocorelație. Având în vedere rezultatul aplicației 3.1 și ținând cont că, în cazul general, aria impulsului triunghiular este  $\sigma^2 \cdot T_e$ , rezultă:

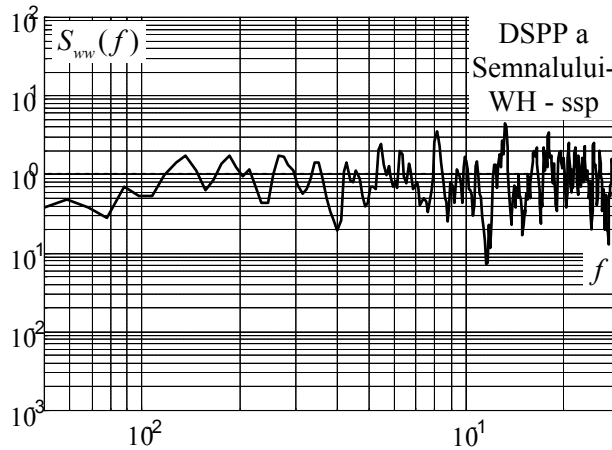
$$(6.35) \quad S_{ww}(\omega) = \mathcal{F}\{R_{ww}(\tau)\} = \sigma^2 \cdot T_e \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)$$

• pentru domeniul  $\left[-\frac{\omega_e}{2}, +\frac{\omega_e}{2}\right]$  se poate considera  $\text{sinc}^2\left(\frac{\omega T_e}{2}\right) \cong 1$ , deci:

$$(6.36) \quad S_{ww}(\omega) \cong \sigma^2 \cdot T_e$$

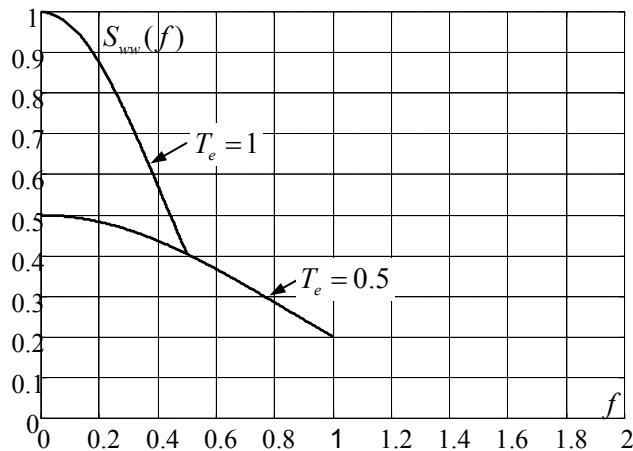
• puterea semnalului în banda  $\left[-\frac{\omega_e}{2}, +\frac{\omega_e}{2}\right]$ , unde densitatea spectrală de putere are valoarea  $S_{ww}(\omega) \cong \sigma^2 \cdot T_e$ , este:

$$(6.37) \quad P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{ww}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\omega_e}{2}}^{\frac{\omega_e}{2}} \sigma^2 T_e d\omega = \frac{1}{2\pi} \omega_e \sigma^2 T_e = \sigma^2$$



**Fig. 6.18** Caracteristica densității spectrale de putere, dedusă prin prelucrarea numerică a datelor (exemplul 6.2)

Programul Matlab, dat în cele ce urmează, calculează și reprezintă grafic densitatea spectrală de putere a zgomotului pseudo-aleator, pe baza relației analitice (6.35).



**Fig. 6.19** Densitatea spectrală de putere, calculată cu relația (6.35), reprezentată în scări liniare (exemplul 6.2)

Reprezentările s-au dat în scări liniare (fig. 6.19) și în scări logaritmice (fig. 6.20), pentru domeniul de frecvență  $\left(0, \frac{f_e}{2}\right)$ , în condițiile când perioadele de eșantionare sunt  $T_e = 1$ , respectiv  $T_e = 2$ . Se constată că pe măsură ce scade perioada de eșantionare, crește banda de frecvențe în care semnalul pseudoaleator se comportă ca un zgomot alb (are funcția spectrală de putere constantă).

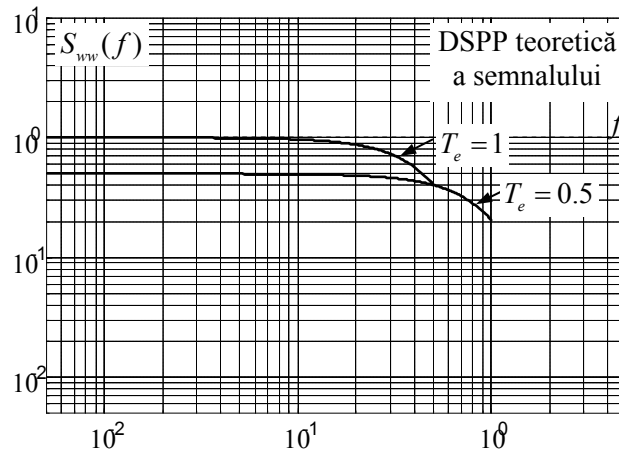
```
clear all; clg; clf;
D=512;

%se inițiază 2 cicluri, aferente perioadelor de eșantionare Te=1 și Te=0.5
for ik=1:2,
    Te=1/ik;
end;
N=D/Te; fe=1/Te;
df=fe/(2*N);
f=0:df:fe/2;
frq=0:df:fe/2;
lf=length(f);

%se calculează densitatea spectrală de putere teoretică
for i=1:lf;
    x(i)=f(i)*Te;
    Sv(i)=Te*(sinc(x(i)))^2;
end;

%se reprezintă grafic densitatea spectrală de putere teoretică,
%în scară liniară și în scară logaritmică
figure(30);
plot(f, Sv); grid; hold on;
```

```
axis([0 2 0 1]);
figure(31);
loglog(f,Svv);title('DSPP teoretica a semnalului ');
grid;hold on;
axis([0.005 5 5*10^(-3) 10]);
end
```



**Fig. 6.20** Densitatea spectrală de putere, calculată cu relația (6.35), reprezentată în scări logaritmice (exemplul 6.2)

## Capitolul 7

### ANALIZA TIMP – FRECVENȚĂ

#### 7.1. Introducere

Analiza spectrală a semnalelor, bazată pe rezultatele clasice ale lui Joseph Fourier, care a demonstrat în 1807 că orice funcție  $2\pi$ -periodică poate fi reprezentată ca o serie de funcții sinus și cosinus, a fost o continuă sursă de probleme și interpretări, sub aspectul formulărilor ingineresti și al fundamentelor matematice. Acestea sunt cauzate în special de faptul că nu pot fi descrise proprietățile „locale” ale unei funcții, sub aspect temporal, utilizând proprietățile ei spectrale.

J. Ville, în articolul său „Cables et Transmissions” din 1947, a prezentat astfel această problemă, pentru cazul semnalului acustic:

„Dacă considerăm o melodie conținând mai multe acorduri, în care presupunem că nota *la* apare o singură dată, analiza armonică va furniza frecvența corespunzătoare acesteia cu o anumită amplitudine și fază, fără a o localiza în timp. Este însă evident că, pe parcursul melodiei, există momente când nu auzim nota *la*. Reprezentarea [Fourier] este totuși corectă din punct de vedere matematic, pentru că fazele notelor vecine lui *la* sunt astfel ajustate încât să estompeze această notă prin interferență atunci când nu se aude și să o sublinieze, tot prin interferență, atunci când se aude; dacă această abordare are o îndemânare care face cinste analizei matematice, nu trebuie să disimulăm faptul că avem de-a face cu o alterare a realității: de fapt, nu auzim nota *la* pentru că ea nu este emisă.”

Alte limitări ale analizei armonice apar în cazul prelucrării analogice sau digitale a semnalelor, în special atunci când acestea reprezintă fenomene nestaționare, cum este cazul mării majorități a semnalelor reale. La acestea, spectrul de armonici, calculat cu ajutorul transformatei Fourier (TF), este variabil în timp, însă, pentru intervale de timp de lungime convenabilă (depinzând de frecvențele care intră în componența semnalului și de viteza de variație a spectrului), acesta poate fi considerat invariant.

Modelarea acestor semnale se poate face însă considerând simultan atât proprietățile acestora în domeniul temporal, cât și cele din domeniul frecvențial.

#### 7.2. Planul timp – frecvență

Planul timp – frecvență reprezintă pentru acustică ceea ce reprezintă portativul pentru muzician. Folosind această metaforă, analiza semnalelor poate fi comparată cu dictarea muzicală, care constă în scrierea notelor ascultând o melodie. Cel care scrie în acest mod o piesă muzicală notează nu

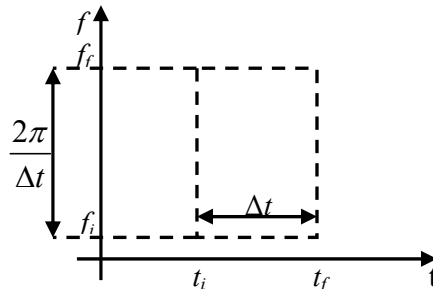
numai informația frecvențială (nota emisă), ci și momentul apariției acesteia, raportat la începutul melodiei.



**Fig. 7.1** Planul timp – frecvență și echivalentul său muzical

O realizare similară în domeniul prelucrării semnalelor constă în identificarea caracteristicilor frecvențiale ale unui semnal la un moment dat.

Pentru aceasta se consideră o „fereastră” care se deplasează pe semnal, pornind din origine și, pentru orice poziție a ferestrei pe axa temporală, conținutul acesteia este analizat, obținându-se astfel informația frecvențială dorită: un spectru de frecvențe localizat.



**Fig. 7.2** Atom timp – frecvență

Această informație este discretă și finită, astfel încât, în planul timp – frecvență ea definește, împreună cu fereastra temporală, o suprafață dreptunghiulară, care se numește **atom timp – frecvență**.

Acest atom timp – frecvență este echivalentul unei note în prelucrarea semnalelor, iar operația de prelucrare a semnalelor constă în descompunerea acestora în atomi timp – frecvență.

Suprafața unui astfel de atom este  $2\pi$ , iar acest lucru pune anumite probleme.

De exemplu, nu putem preciza spectrul de frecvențe al unui semnal la un moment de timp  $t_0$ . Putem în schimb să determinăm acest spectru pentru un interval  $\left[ t_0 - \frac{\Delta t}{2}, t_0 + \frac{\Delta t}{2} \right]$ . Dacă  $\Delta t$  este mic, banda de frecvență pe care o vom obține va fi mare, scăzând astfel precizia analizei în domeniul frecvențial. Pentru mărirea acesteia este necesară mărirea dimensiunii intervalului  $\Delta t$ , fapt care conduce la scăderea preciziei analizei în domeniul timp. La limită,

efectuând analiza pentru un intervalul de timp  $[0, \infty)$ , vom obține informații precise despre spectrul de frecvențe, însă informațiile din domeniul temporal nu vor mai fi precise.

Aceeași problemă apare și în cazul prelucrării digitale a semnalelor, după cum se arată în paragraful următor.

### 7.3. Principiul incertitudinii

Pentru început considerăm transformata Fourier a unui semnal pe care dorim să o aproximăm numeric:

$$\mathcal{F}\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Trebuie să notăm că funcția  $f$  este fie finită în timp, fie trebuie să fie considerată nulă în afara unui interval finit  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , astfel încât relația de mai sus să poată fi scrisă:

$$\mathcal{F}\{x\} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Pentru a aproxima funcția considerăm intervalul de integrare divizat în  $N$  subintervale de lungime  $\Delta t = T/N$ , delimitate de punctele  $t_n = n \cdot \Delta t$ ,  $n = -\frac{N}{2} : \frac{N}{2}$ . Considerând integrandul:

$$g(t) = x(t) \cdot e^{-j2\pi ft}$$

aplicăm regula trapezului, care conduce la o aproximare de forma:

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(t) dt \approx \frac{\Delta t}{2} \left[ g\left(-\frac{T}{2}\right) + 2 \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} g(t_n) + g\left(\frac{T}{2}\right) \right]$$

Presupunând că  $g\left(-\frac{T}{2}\right) = g\left(\frac{T}{2}\right)$ , se obține următoarea aproximare pentru transformata Fourier:

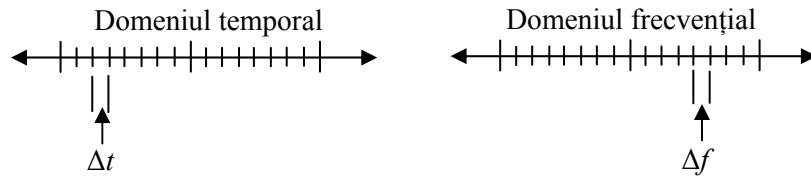
$$(7.1) \quad F(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \frac{T}{N} \sum_{n=-\frac{N}{2}}^{\frac{N}{2}} x(t_n) e^{-j2\pi ft_n}$$

În acest caz,  $\mathcal{F}\{x(t)\}$  poate fi evaluată pentru orice valori ale lui  $f$ , însă este dorită aproximarea ei la anumite valori discrete ale lui  $f$ . Trebuie stabilite



câte și care sunt aceste valori. Deoarece  $N$  valori ale funcției  $x(t_n)$  sunt utilizate pentru a aproxima  $F(j\omega) = F(j2\pi f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ , alegem tot  $N$  valori discrete ale lui  $f$  pentru aproximarea caracteristicii spectrale.

Pentru determinarea frecvențelor care vor fi utilizate, vom reaminti mai întâi faptul că domeniul temporal în care lucrăm  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  este împărțit în intervale de lungime  $\Delta t$ , determinate de punctele  $t_n = n \cdot \Delta t$ . Asociat domeniului temporal, domeniul frecvențial  $\left[-\frac{\Phi}{2}, \frac{\Phi}{2}\right]$  este împărțit în  $N$  intervale egale de dimensiune  $\Delta f$  determinate de punctele  $f_k = k \cdot \Delta f$ . Problema care se pune este determinarea unor relații de legătură între  $\Delta t$ ,  $\Delta f$ ,  $T$  și  $\Phi$ .



**Fig. 7.3** Corespondența dintre domeniile temporal și frecvențial

Considerând toate componentele de tip sinus și cosinus care au un număr întreg de perioade în intervalul  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , vom numi componenta cu perioada cea mai mare (o singură perioadă în interval) *componenta fundamentală*. Frecvența acesteia,  $1/T$ , este cea mai mică frecvență asociată intervalului  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ , deci, notând-o  $\Delta f = 1/T$ , aceasta va fi dimensiunea unui interval al domeniului  $\left[-\frac{\Phi}{2}, \frac{\Phi}{2}\right]$ . Toate celelalte frecvențe recunoscute de DFT vor fi multipli întregi ai lui  $\Delta f$ , iar dimensiunea domeniului frecvențial este:

$$(7.2) \quad \Phi = N\Delta f = \frac{N}{T} \Rightarrow T \cdot \Phi = N$$

O a doua relație poate fi evidențiată imediat, dacă ținem cont de faptul că intervalul  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  este împărțit în  $N$  intervale egale. Astfel, deoarece  $N\Delta f = T$ , rezultă:

$$(7.3) \quad T = \frac{1}{\Delta f} = N\Delta t \Rightarrow \Delta t \cdot \Delta f = \frac{1}{N}$$

Ținând cont de relațiile (7.2) și (7.3), dacă numărul de puncte  $N$  este constant, o creștere în domeniul temporal duce la o scădere a lungimii domeniului frecvențial. Dacă se înjumătățește  $\Delta t$  menținând constant  $N$ , acest lucru conduce la înjumătățirea lungimii intervalului  $T$ . Frecvența componentei fundamentale, a cărei perioadă este egală cu lungimea intervalului, va fi acum  $1/(T/2)$ , adică  $2/T$  cicluri pe unitate, ceea ce este echivalent cu dublarea lui  $\Delta f$ .

Se observă astfel că, în cazul transformatei Fourier discrete, localizarea într-un domeniu (creșterea preciziei în domeniul respectiv) se obține pe seama scăderii preciziei localizării în domeniul asociat.

#### 7.4. Transformata Gabor continuă (CGT)

După cum s-a menționat anterior, pentru semnalele netaționare, al căror spectru se modifică în timp, se poate considera că pe intervale scurte de timp spectrul acestora este constant. Astfel, dacă vom aplica transformata Fourier doar unei porțiuni a semnalului, vom obține un spectru local, iar transformata astfel definită se numește CGT.

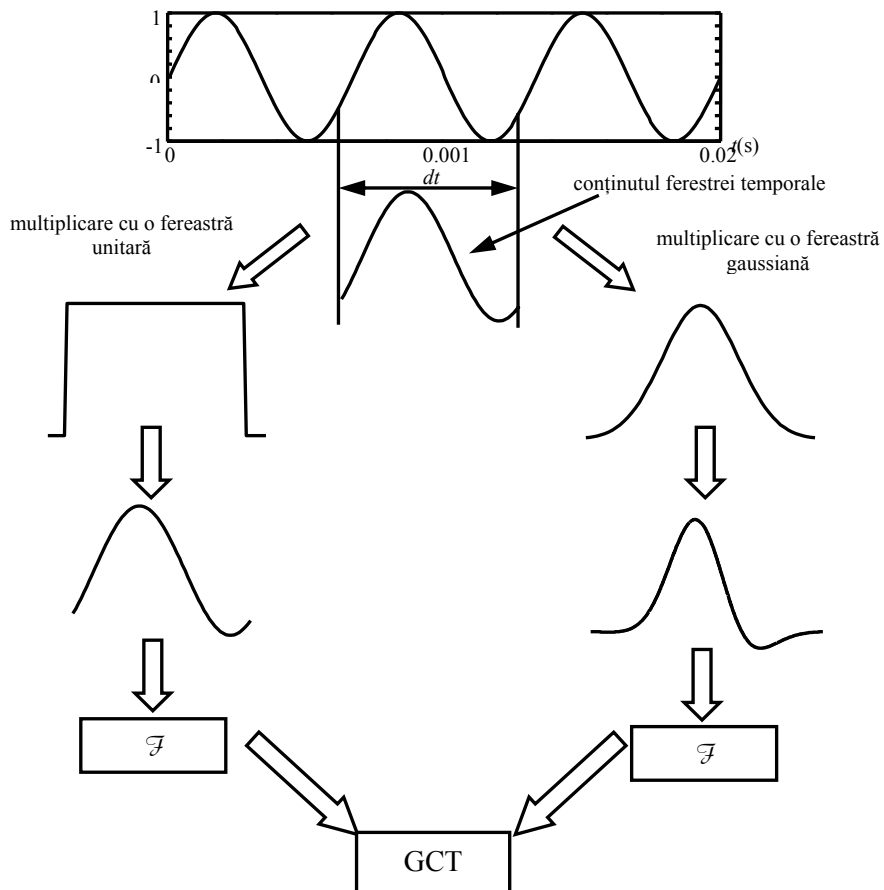


Fig. 7.4 Reprezentarea generică a CGT

CGT poate fi interpretată ca o transformată Fourier care se modifică în timp. Ea se aplică unei funcții văzute printr-o fereastră de timp glisantă care se deplasează pe axa timpului. Astfel, datorită translației în domeniul  $t$ , CGT dă o imagine despre conținutul în domeniul frecvențial al funcției  $f$ , la un moment definit de fereastra temporală. Funcția fereastră, pe care o vom nota în continuare cu  $g(t)$ , poate avea mai multe forme, dintre care câteva sunt prezentate în figurile 7.5 și 7.6.

Fiind date funcțiile  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , CGT a funcției  $f$  poate fi definită ca:

$$(7.4) \quad (G_g f)(t, f) \triangleq \int f(\tau) g(\tau - t) e^{-2\pi i f \tau} d\tau$$

Deși în formularea originală a lui Gabor funcția „fereastră”  $g$  era considerată a fi o funcție gaussiană, sintagma „transformată Gabor” se utilizează pentru formularea generală din (7.4), indiferent de tipul ferestrei utilizate.

Această transformare se mai numește și „Short-Time Fourier Transform”, iar cele mai utilizate „ferestre” sunt:

– fereastra **dreptunghiulară**:

$$g_r(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases}; \quad \mathcal{F}\{g_r\} = \tau \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

– fereastra **triunghiulară**:

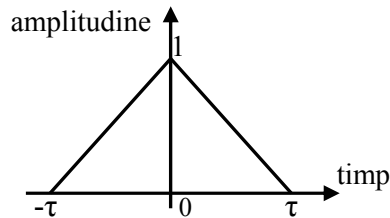


Fig. 7.5 Fereastră triunghiulară

$$g_{tr}(t) = \begin{cases} \frac{t}{T} + 1, & t < 0 \\ -\frac{t}{T} + 1, & t > 0 \end{cases}; \quad \mathcal{F}\{g_{tr}\} = \tau \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

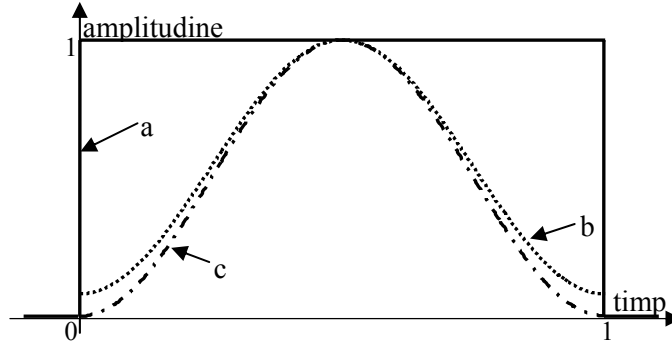
– fereastra **gaussiană**:

$$g_G(t) = A \cdot e^{-\alpha t^2}; \quad \mathcal{F}\{g_G\} = A \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$$

– fereastra **Hamming și Hanning**:

$$g_H(t) = \alpha + (1 - \alpha) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right),$$

unde  $T$  este dimensiunea ferestrei temporale. Pentru fereastra Hamming  $\alpha = 0.54$ , iar pentru fereastra Hanning  $\alpha = 0.5$ .



**Fig. 7.6** Tipuri de ferestre temporale utilizate la calculul CGT: a – fereastră rectangulară, b – fereastră Hamming, c – fereastră Hanning

Obținerea TGC inverse este simplă din punct de vedere matematic: relației (7.4) i se aplică transformata Fourier inversă, rezultatul se multiplică cu  $\bar{g}(\tau - t)$  și se integrează pe toată mulțimea  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\{G_g f\}(t, f) \cdot \bar{g}(\tau - t) d\tau &= \int_{\mathbb{R}} f(t) g(\tau - t) \bar{g}(\tau - t) d\tau = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(t) |g(\tau - t)|^2 d\tau = f(t) \int_{\mathbb{R}} |g(\tau - t)|^2 d\tau = f(t) \cdot \|g\|^2 \end{aligned}$$

Funcția  $f$  poate fi astfel obținută din CGT, cu condiția ca  $g \in L^2(\mathbb{R}^*)$ , astfel încât:

$$(7.5) \quad \begin{aligned} f(t) &= C^{-1} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\{G_g f\} \cdot g(\tau - t) d\tau = \\ &= C^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1}\{G_g f\} e^{j2\pi\gamma\tau} g(\tau - t) d\gamma d\tau \end{aligned}$$

unde  $C \triangleq \|g\|^2$ .

Proprietățile TGC sunt aceleași ca ale transformatei Fourier.

## 7.5. Undine

### Noțiunea de undină

O „undină” (adică, „undă mică”) este o funcție care satisface următoarele condiții în domeniul timp:

- prezintă o creștere bruscă și finită a energiei;
- prezintă oscilații.

Prima condiție este cea care face undina „mică”, în sensul că este bine localizată în timp, în timp ce a doua condiție determină caracterul de „undă” al undinei.

Pentru simplificarea notațiilor, introducem operatorii de: *translație*:

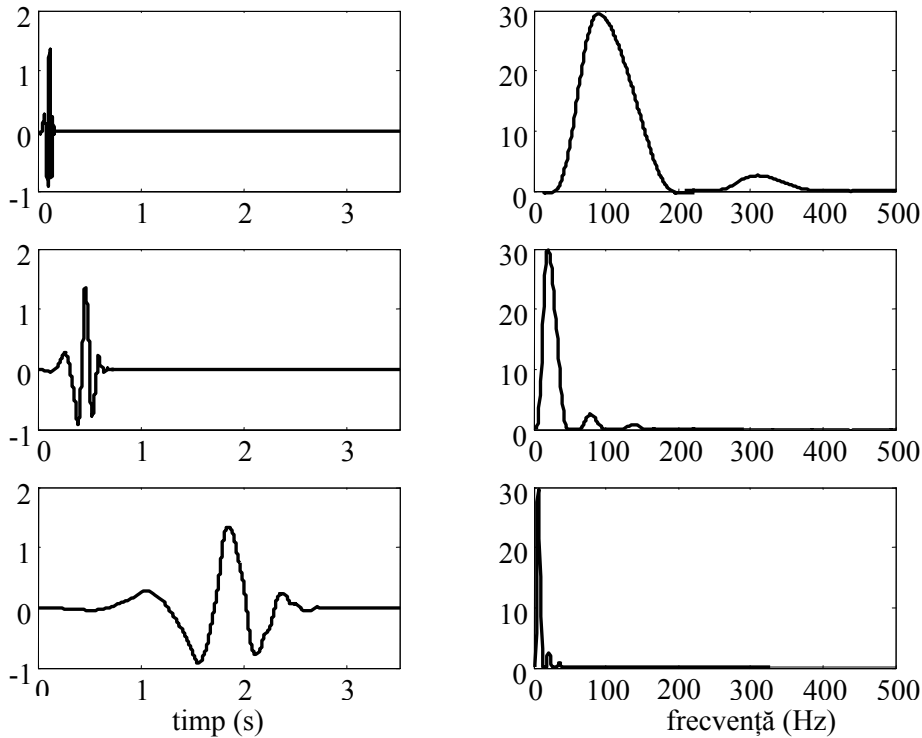
$$\tau_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), (\tau_a f)(t) \triangleq f(t-a) \text{ și } \mathcal{F}\{\tau_a f\} = e^{-j2\pi a f} \cdot \mathcal{F}\{f\}$$

și *dilatație*:

$$D_s : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \text{ cu } (D_s f)(t) \triangleq |s|^{\frac{1}{2}} \cdot f(st) \text{ și } \mathcal{F}\{D_s f\} = D_{s^{-1}} \mathcal{F}\{f\}$$

Astfel, dacă  $|s| < 1$  atunci  $D_s f$  este o contracție a lui  $f$ , iar dacă  $|s| > 1$ ,  $D_s f$  este o dilatare a lui  $f$ .

Dacă  $g$  este o undină, atunci setul de funcții  $\{\tau_t D_s g\}$ , alcătuit din toate dilatăriile (pentru  $s \neq 0$ ) și translațiile (în domeniul  $t$ ) funcției  $g$ , reprezintă o familie de undine. Undina care generează familia de undine se numește undină – mamă. Parametrul  $s$  reprezintă „scala”, iar  $t$  reprezintă „translația”.



**Fig. 7.7** Dilatațiile unei undine mamă și spectrele de amplitudini ale acestora

În fig. 7.7 sunt reprezentate mai multe undine, în stânga se află

reprezentarea lor în domeniul timp, iar în dreapta spectrul de amplitudini al transformatei Fourier.

Dilatarea în domeniul timp, obținută prin modificarea parametrului  $s$  ( $s > 1$ ), corespunde unei reduceri a domeniului frecvențial, datorită faptului că  $\mathcal{F}\{D_s g\} = D_{s^{-1}} \mathcal{F}\{g\}$ . Principalul efect al acestei dilatații sunt translația în domeniul frecvențial spre frecvențe mari și lărgirea benzii semnalului. Aceste efecte sunt vizibile în fig. 7.7.

### Exemple de undine

#### Undina Haar

Undinele Haar sunt un exemplu de familie de undine des utilizat care conduc la o bază ortonormată, atunci când familia de undine este restrânsă la translații întregi și dilatații executate utilizând puteri ale lui 2.

Undina Haar este definită ca:

$$(7.6) \quad g_{\text{Haar}} = 1_{(-1/2, 0]} - 1_{(0, 1/2]},$$

unde s-a notat prin 1 treapta unitară.

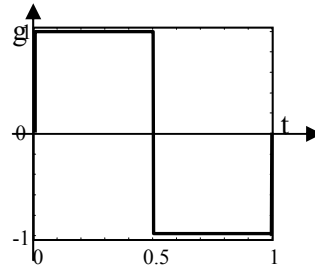


Fig. 7.8 Undina mamă Haar

#### Undina Shannon

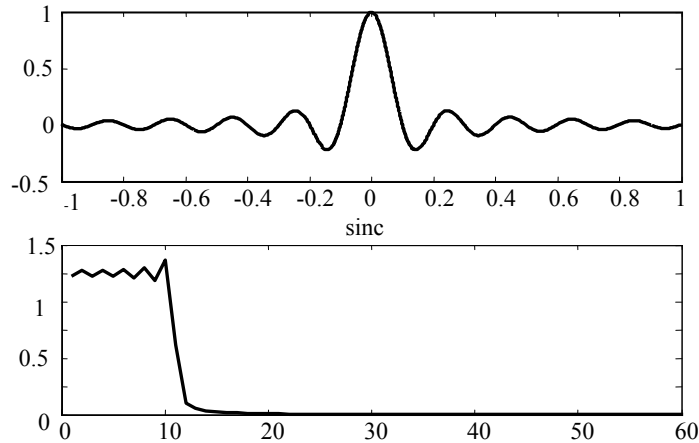


Fig. 7.9 Funcția sinc și spectrul de amplitudini al acesteia

Principala caracteristică a undinei Shannon (funcția sinc) este aceea că

transformata Fourier a acesteia este aproximativ constantă pe un interval în jurul originii și nulă în rest.

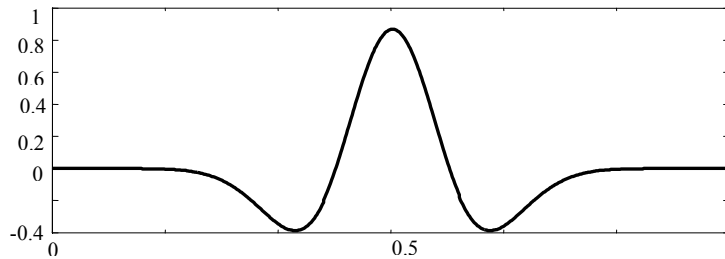
*Undina Morlet*

Undinele de tip Morlet utilizează doi parametri care definesc anumite proprietăți în domeniul frecvențial:

- frecvența centrală  $\gamma_c$
- varianța (lățimea de bandă)  $\gamma_b$

Se poate defini undina de tip Morlet astfel:

$$(7.7) \quad g_{\text{Morlet}}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi\gamma_b}} \cdot e^{j2\pi\gamma_c t - \frac{t^2}{\gamma_b}}$$



**Fig. 7.10** Undina Morlet

Funcția Morlet are norma egală cu unitatea în  $L^1$ :

$$(7.8) \quad \|g_{\text{Morlet}}\|_1 = \int |g_{\text{Morlet}}(t)| dt = 1,$$

cea ce are drept consecință imediată faptul că transformata Fourier a funcției,  $\mathcal{F}\{g_{\text{Morlet}}\}$ , are valoarea maximă 1; în plus  $\mathcal{F}\{g_{\text{Morlet}}\}(\gamma_c) = 1$ . Transformata Fourier continuă a funcției  $g$  poate fi calculată analitic, obținându-se expresia:

$$(7.9) \quad \mathcal{F}\{g_{\text{Morlet}}\} = e^{-\pi^2\gamma_b(\gamma-\gamma_c)^2}$$

**7.6. Transformata continuă în undine (CWT – Continuous Wavelet Transform)**

CWT poate fi definită ca o transformare  $W_g$  dependentă de o funcție auxiliară  $g$ , care se numește undină. Considerând o undină specifică, CWT poate fi considerată ca o reprezentare a semnalului utilizând familia de undine generată de  $g$ . În ceea ce privește alegerea funcției  $g$ , orice funcție din  $L^1(\mathbb{R})$  cu media nulă poate fi o undină – mamă (condiția de admisibilitate).

**Definiție**

Pentru CWT, principalele spații de interes sunt spațiile Hilbert. Acestea pot fi considerate ca fiind o extindere a spațiului vectorial, în care conceptele

de *distanță* (norma  $\| \cdot \|_H$ ) și de *unghi* (produsul scalar) sunt extinse. Din punct de vedere matematic, un spațiu Hilbert este un spațiu vectorial complet normat (cu norma  $\| \cdot \|_H$ ), pe care se definește un produs scalar.

În aceste condiții, pentru un spațiu Hilbert  $H$ , CWT poate fi definită ca o aplicație  $W_g : H \rightarrow W_g(H)$  parametrizată de o funcție  $g$ .

CWT a unui semnal unidimensional este o funcție bidimensională, de variabile  $t$  (timp) și  $s \neq 0$  (scală sau frecvență), și poate fi scrisă ca:

$$(7.10) \quad (W_g f)(t, s) = |s|^{1/2} \int_{\mathbb{R}} f(\sigma) \overline{g(s \cdot (\sigma - t))} d\sigma,$$

unde  $\tau_t D_s g$  reprezintă dilatarea (cu  $s$ ), respectiv translatarea (cu  $t$ ) a funcției  $g$  sau, explicit:

$$(7.11) \quad (\tau_t D_s g)(\sigma) = |s|^{1/2} g(s \cdot (\sigma - t))$$

Pentru valori particulare ale lui  $t$  și  $s$ , CWT asociază o valoare funcției  $f$ , care descrie cantitativ gradul de similitudine dintre funcția  $f$  și funcția  $g$ , translatată cu mărimea  $t$  și dilatăată cu mărimea  $s$ .

În cazul în care undina mamă este definită pe un domeniu timp – frecvență suficient de mare, atunci CWT prezintă o caracteristică timp – frecvență a funcției  $f$  în planul timp – frecvență  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ .

Pornind de la relația (7.10), putem rescrie CWT astfel:

$$(7.12) \quad \begin{aligned} (W_g f)(t, s) &= \langle f, \tau_t D_s g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\sigma) \overline{|s|^{1/2} g(s(\sigma - t))} d\sigma = \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\sigma) \overline{D_s g(-(t - \sigma))} d\sigma = (f * D_s \tilde{g})(t) \end{aligned}$$

unde  $\tilde{g}(t) \triangleq \overline{g(-t)}$ . Din ecuația (7.12) se observă că transformata  $W_g f$  a unei funcții  $f$  poate fi interpretată ca fiind ieșirea unui sistem infinit de filtre liniare descrise de funcția pondere  $D_s \tilde{g}$ , cu  $s \in \mathbb{R}^*$ .



**Fig. 7.11** CWT reprezentată ca ieșirea unui sistem de filtre liniare

În figura 7.12 se prezintă rezultatul obținut prin aplicarea CWT unui semnal de tip chirp.

### Proprietăți ale CWT

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ . Atunci CWT,  $W_g$ , având ca parametru



undina  $g$ , satisface următoarele proprietăți:

*Liniaritatea:*

$$(W_g (af_1 + bf_2)) (t, s) = a(W_g f_1) (t, s) + b(W_g f_2) (t, s)$$

*Invarianța în domeniul timp:*

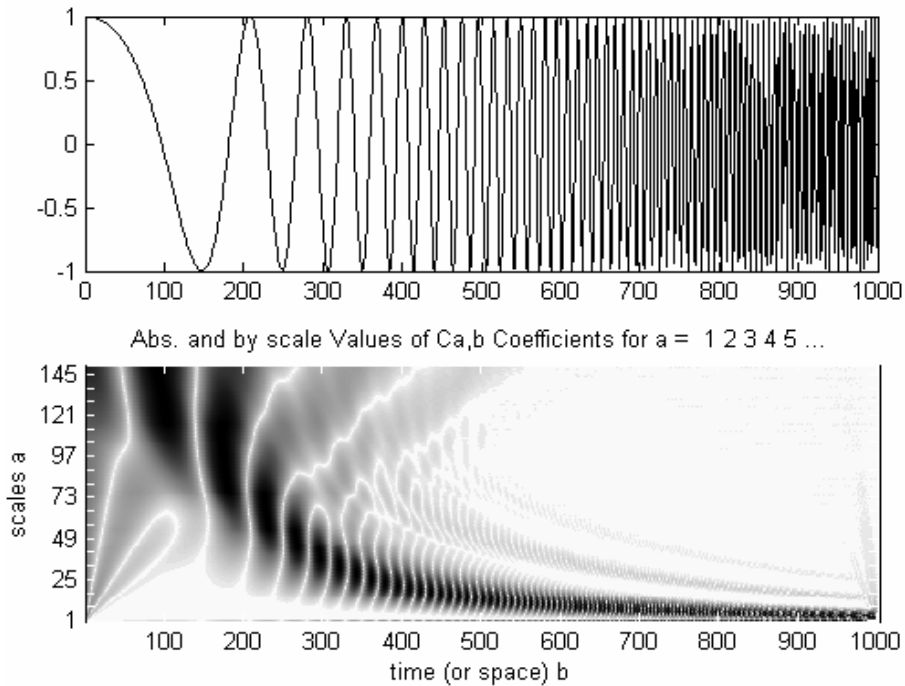
$$(W_g (\tau_b f)) (t, s) = (W_g f)(t - b, s)$$

*Dilatarea:*

$$(W_g (D_a f)) (t, s) = (W_g f) (at, a^{-1}s), a \neq 0$$

*Exemplul 7.1:* aplicație în Matlab

Vom aplica CWT unui semnal de tip chirp. Coeficienții astfel obținuți sunt caracterizați de trei elemente: *scala* (corespunzătoare frecvenței), *poziția în timp* și *ponderea*.



**Fig. 7.12** Transformata continuă în undine a unui semnal de tip chirp

Programul Matlab corespunzător este dat mai jos.

```
clear all
t=0:0.002:1.999;
%2 secunde și frecvența de eșantionare de 1kHz
```

```

y=chirp(t,1,2,100,'q',[],'concave');
%pornește de la 1Hz și atinge 100Hz la t=1.999 secunde

subplot(2,1,1);
plot(y);
subplot(2,1,2);
%se afișează coeficienții obținuți prin descompunerea în undine,
%folosind undina de tip Daubechies
%afișarea se realizează tridimensional,
%parametrii fiind scala, momentul apariției și ponderea undinei
coefs = cwt(y,1:50,'db5','3Dlvl');

```

În planul timp – frecvență reprezentarea acestora se realizează utilizând pentru fiecare coeficient nivele de gri, care codifică ponderea fiecăruia. Astfel, negrul simbolizează o pondere maximă, în timp ce albul reprezintă o pondere nulă. În fig. 7.12 se poate observa că la început ponderea coeficienților de scală mare (frecvențe joase) este mare, iar pe măsură ce frecvența semnalului crește devin importante ponderile coeficienților corespunzători scalelor mici (frecvențe mari).

### 7.7. Transformata inversă în undine

*Inversabilitatea* este o proprietate importantă a transformatei în undine, iar formulele analitice utilizate pentru reconstrucția funcțiilor utilizând parametrii CWT au o importanță deosebită în sinteza semnalelor.

#### Definiția ICWT pentru $L^2(\mathbb{R})$

ICWT poate fi definită ca o aplicație:

$$W_g^{-1} : W_g(L^2(\mathbb{R})) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$$

Ținând cont de aceasta, pentru o funcție  $f \in L^2(\mathbb{R})$  transformata Fourier a CWT poate fi scrisă, pornind de la relația (7.12), ca:

$$(7.13) \quad \mathcal{F}\{W_g f\}(\gamma, s) = \left( \mathcal{F}\{f\} D_{s^{-1}} \overline{\mathcal{F}\{g\}} \right)(\gamma)$$

datorită proprietăților transformatei Fourier aplicate unui produs de convoluție.

Multiplicând ambii termeni ai ecuației cu  $D_s \mathcal{F}\{g\}$  și integrând pe domeniul de definiție al lui  $s$ , se obține:

$$\begin{aligned}
 \int_{s \neq 0} \mathcal{F}\{W_g f\}(\gamma, s) (D_s \mathcal{F}\{g\})(\gamma) ds &= \int_{\mathbb{R}} \left( \mathcal{F}\{f\} \cdot \left| D_{s^{-1}} \mathcal{F}\{g\} \right|^2 \right)(\gamma) ds \\
 (7.14) \quad &= \mathcal{F}\{f\}(\gamma) \int_{\mathbb{R}} |s|^{-1} \left| \mathcal{F}\{g\}(s^{-1}\gamma) \right|^2 ds \\
 &= \mathcal{F}\{f\}(\gamma) \int_{\mathbb{R}} |u|^{-1} \left| \mathcal{F}\{g\}(u) \right|^2 du
 \end{aligned}$$

Ultima ecuație a fost obținută efectuând substituția  $u = s^{-1}\gamma$ , ceea ce determină egalitatea  $du = -|s^{-1}u|ds$ . Faptul că termenul:

$$(7.15) \quad C \triangleq \int_{\mathbb{R}} |s|^{-1} |\mathcal{F}\{g\}(s^{-1}\gamma)|^2 ds = \int_{\mathbb{R}} |u|^{-1} |\mathcal{F}\{g\}(u)|^2 du$$

nu depinde de  $s$  este un fapt important în teoria undinelor, deoarece permite interpretarea cantitativă directă a coeficienților undinelor asociați unui anumit semnal ca fiind cantitatea cu care fiecare undină din familia generată de  $g$  contribuie la compoziția generală a semnalului.

Pentru ca transformata inversă să poată exista trebuie ca integrala (7.15) să fie convergentă ( $C < \infty$ ). În aceste condiții, transformata Fourier a semnalului  $f$  poate fi exprimată ca:

$$\mathcal{F}\{f\}(\gamma) = C^{-1} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}\{W_g f\}(\gamma, s) (D_{s^{-1}} \mathcal{F}\{g\})(\gamma) ds$$

Combinând (7.14) cu (7.15), și transformând în domeniul timp, se obține:

$$\begin{aligned} f(t) &= C^{-1} \int_{\mathbb{R}} \left( (W_g f)(\cdot, s) * (D_s g) \right)(t) ds \\ (7.16) \quad &= C^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_g f)(\sigma, s) (D_s g)(t - \sigma) ds d\sigma \\ &= C^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (W_g f)(\sigma, s) (\tau_{\sigma} D_s g)(t) ds d\sigma \end{aligned}$$

Prima egalitate dă cea mai bună interpretare a transformării inverse în undine, din punctul de vedere al sistemului de filtre: o versiune  $C$ -scalată a funcției  $f$  poate fi reconstruită din CWT ( $f$  după trecerea prin sistemul de filtre definit de funcția pondere  $D_s \tilde{g}$ ) prin trecerea acesteia prin sistemul infinit de filtre liniare definite de funcția pondere  $D_s g$ .

Putem, deci, reprezenta ICWT a unei funcții  $F \in W_g(L^2(\mathbb{R}))$ , parametrizată de funcția  $g \in L^2(\mathbb{R}^*)$ , cu proprietatea că:

$$(7.17) \quad C \triangleq \int_{\mathbb{R}} |\gamma|^{-1} |\mathcal{F}\{g\}(\gamma)|^2 d\gamma < \infty$$

sub forma:

$$(7.18) \quad W_g^{-1} F \triangleq C^{-1} \int_{\mathbb{R}} F(\cdot, s) * (D_s g) ds = C^{-1} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(\sigma, s) (\tau_{\sigma} D_s g) ds d\sigma$$

Deoarece  $W_g^{-1} : W_g(L^2(\mathbb{R})) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , atunci pentru  $f \in L^2(\mathbb{R})$  și

$F = W_g f$  este adevărată egalitatea  $f = W_g^{-1} F$ .

### 7.8. Transformata discretă în undine (DWT – Discrete Wavelet Transform)

În general, DWT poate fi obținută prin eșantionarea (în planul timp – frecvență) a CWT. Astfel, DWT este determinată de alegerea unui set de puncte din planul timp – frecvență și de o undină care generează CWT.

Alegerea acestor parametri se face astfel încât DWT rezultată să satisfacă anumite proprietăți, dintre care cea mai importantă este inversabilitatea.

#### 7.8.1. Discretizarea CWT

Deoarece CWT este o funcție bidimensională continuă în planul timp – frecvență, ea nu poate fi calculată utilizând echipamente digitale. Aproximări ale CWT pot fi totuși calculate eșantionând de o manieră arbitrară planul timp – frecvență. Oricare set finit de puncte din planul timp – frecvență  $\Gamma \triangleq \{(t_{m,n}, s_n)\}$  obținut astfel, caracterizează un set de undine  $\{\tau_{t_{m,n}} D_{s_n} g\}$ , deci, implicit, o transformată discretă în undine.

Deși există teoretic o infinitate de metode de discretizare ale CWT, termenul DWT este utilizat în principal pentru transformarea asociată setului diadic:

$$(7.19) \quad \Gamma_D \triangleq \{(2^{-n} m, 2^n)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$$

pentru că se pot obține baze ortonormate.

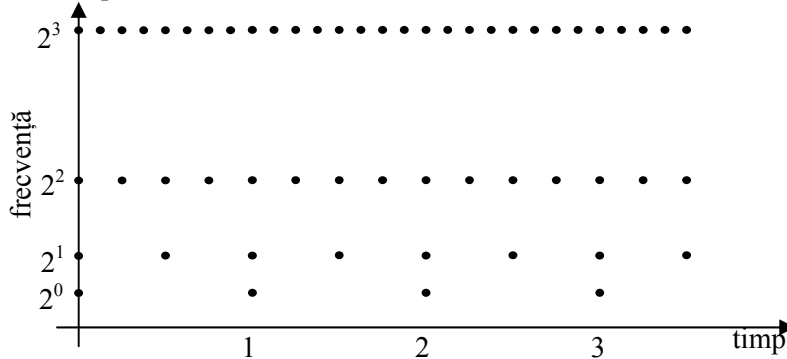


Fig. 7.13 Setul diadic de puncte în care se evaluează CWT

Termenul DWT este utilizat pentru orice discretizare a CWT care îndeplinește următoarele condiții:

- discretizarea timp – frecvență se face utilizând setul  $\Gamma_D$ ;
- familia de undine  $\{\tau_t D_s g\}_{(t,s) \in \Gamma_D}$  trebuie să formeze o bază

ortonormată în spațiul de interes;

- undina mamă trebuie să fie cu suport compact.

Reamintim că un set  $\{\phi_n\}$  este ortonormat dacă  $\forall m, n \langle \phi_m, \phi_n \rangle = \delta_{m,n}$  și este o bază ortonormată a unui spațiu Hilbert dacă pentru orice  $f \in H$  există o secvență unică  $\{c_n\} \in \mathbb{C}$  astfel încât  $f = \sum c_n \phi_n$ . În plus, dacă  $\{\phi_n\}$  este o bază ortonormată a lui  $H$ , atunci  $\forall f \in H, f = \sum \langle f, \phi_n \rangle \phi_n$  și  $\|f\|^2 = \sum_n |\langle f, \phi_n \rangle|^2$  – egalitatea lui Parseval.

### 7.8.2. Analiza multirezoluție

În această secțiune se consideră că semnalele de interes aparțin unui spațiu Hilbert arbitrar, cel al funcțiilor de o singură variabilă. Astfel, semnalele (funcțiile) alcătuiesc un subset al spațiului  $L^2(\mathbb{R})$ , al funcțiilor de energie finită.

#### Principiul analizei multirezoluție (AMR)

Pentru a defini o AMR trebuie mai întâi definită o secvență de spații, cu proprietatea:

$$\{0\} \subset \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset H$$

care alcătuiește o structură de bază. Pentru un indice  $k$  mai mare spațiul  $V_k$  este mai asemănător cu spațiul hilbertian  $H$ .

Considerăm apoi o funcție:

$$\phi \in H,$$

numită *funcție de scalare*, ale cărei translatări  $\{\tau_n \phi\}$  cu  $n \in \mathbb{N}$  alcătuiesc o bază ortonormată pentru un subspațiu  $V_k \subset H$ . Uzual se consideră  $k=0$ . Deoarece sunt alcătuite doar din translatări întregi ale lui  $\phi$ , funcțiile din  $V_0$  sunt mai grosiere decât marea majoritate a funcțiilor din  $H$ , deoarece variația lor în timp este limitată de variația în timp a lui  $\phi$ . Se poate deci considera  $V_0$  ca fiind o aproximare grosieră (de rezoluție scăzută) a lui  $H$ .

O ultimă condiție care trebuie pusă este ca subspațiile cu ordin de mărime mai mare să aibă o rezoluție mai bună decât cele cu ordine de mărime mici. Astfel, pentru orice funcție  $f$  aparținând spațiului  $H$ , subspațiul  $V_k$  va conține o aproximare de ordinul  $k$  a acesteia. Cu cât ordinul de mărime  $k$  al subspațiului este mai mare, cu atât mai bună este aproximarea funcției (rezoluția este mai bună).

#### Definiția AMR

Ideea de bază a AMR este definirea unei secvențe de subspații  $\{V_k : V_k \subseteq H\}$ , astfel încât acestea sunt aproximări din ce în ce mai exacte ale lui  $H$ , pe măsură ce  $k$  crește. Pentru aceasta, este necesar ca secvența de

subspații să îndeplinească următoarele condiții:

1.  $V_k \subset V_{k+1}$
2.  $V_k \rightarrow H$  pentru  $k \rightarrow \infty$ , și  $V_k \rightarrow \{0\}$  pentru  $k \rightarrow -\infty$

Ținând cont de aceste condiții, fiecare subspațiu  $V_k$  este o aproximație de nivel  $k$  pentru spațiul  $H$ . Acest lucru înseamnă că proiecția unei funcții pe subspațiul  $V_k$  conduce la o aproximație care se apropie de funcția originală pe măsură ce  $k$  se mărește.

În plus, creșterea rezoluției trebuie să fie uniformă, în sensul că o creștere a acesteia de la subspațiul  $V_k$  la  $V_{k+1}$  trebuie să determine aceeași creștere a rezoluției pentru orice  $k$ . O modalitate de a asigura această creștere uniformă este ca fiecare subspațiu  $V_k$  să aibă o bază ortonormată care să fie derivată din baza ortonormată a subspațiului  $V_0$ , printr-o dilatație cu o putere a lui 2, ceea ce conduce la o nouă condiție:

3.  $f \in V_k \Rightarrow D_2 f \in V_{k+1}$

Acest lucru implică faptul că, dacă o funcție  $f_k \in V_k$ , atunci funcția  $f_{k+1}(t) \triangleq f_k(2t)$  trebuie să aparțină subspațiului  $V_{k+1}$ .

Cum setul  $\{\tau_n \phi\}$  este o bază ortonormată a subspațiului  $V_0$ , atunci setul  $\{D_2^k \tau_n \phi\}$  este o bază ortonormată a lui  $V_k$ . Astfel, pentru  $k > 0$ , funcțiile din subspațiul  $V_k$  au o rezoluție mai bună decât cele din  $V_0$ . Acest lucru este prezentat în fig. 7.14, unde s-a realizat o AMR utilizând funcția de scalare Haar  $\phi_{\text{Haar}} \triangleq 1_{(0,1]}$ ; aici funcțiile din  $V_0$  sunt constante pe intervale  $(n, n+1]$ , iar  $f_0 \in V_0$  poate fi utilizată pentru aproximarea unei funcții  $f \in H$  astfel:

$$f_0 = \sum_n \langle f, \tau_n \phi \rangle \tau_n \phi = \sum_n c_n 1_{(n, n+1]},$$

unde  $c_n$  este valoarea medie a funcției  $f$  pe intervalul  $(n, n+1]$ . Aproximația pe intervalul  $V_1$  este mai bună deoarece funcțiile sunt constante pe intervale de forma  $(n/2, (n+1)/2]$ ; pentru  $V_2$  intervalele sunt de forma  $(n/4, (n+1)/4]$ .

În concluzie, o AMR se poate defini astfel:

Fie  $\{V_k : V_k \subset H\}$  o secvență crescătoare de subspații și  $\phi \in V_0$ . Perechea  $(\{V_k\}, \phi)$  se numește analiză multirezoluție a spațiului  $H$  dacă:

1.  $\exists \phi \in V_0$  astfel încât  $\{\tau_n \phi\}_{n \in \mathbb{Z}}$  este o bază ortonormată a lui  $V_0$
2. Dacă  $f \in V_k$  atunci  $D^2 f \in V_{k+1}$  (invarianța dilatației)
3.  $\bigcup V_j = H$  și  $\bigcap V_j = \{0\}$

AMR asigură o structură matematică ce face legătura între funcțiile discrete și cele continue.

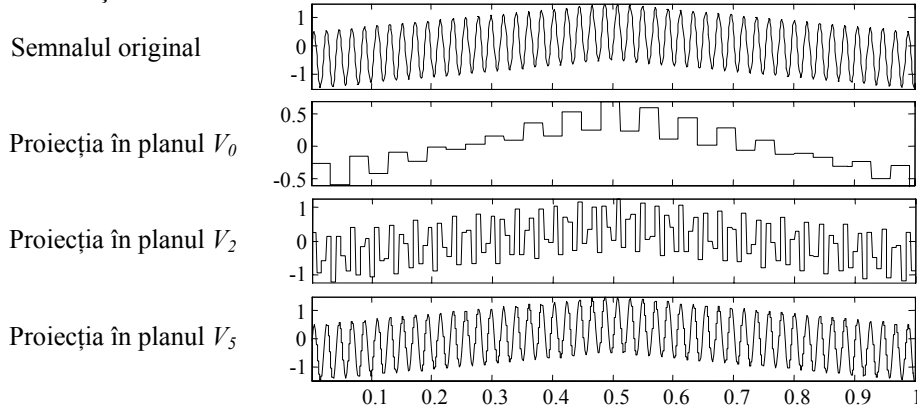


Fig. 7.14 Reprezentările unei funcții folosind AMR Haar

### 7.9. Baze ortonormate de undine

În cazul unei AMR, setul  $\{D_{2^k} \tau_n \phi\}$  este o bază ortonormată pentru spațiul  $V_k$ , însă pentru generarea unei baze ortonormate pe întreg spațiul  $H$  este necesară ortogonalitatea rezoluțiilor. Deoarece subspațiile  $V_k$  sunt incluse unul în celălalt condiția nu este îndeplinită, astfel încât combinarea directă a bazelor fiecărui subspațiu nu este o bază ortonormată pe întreg spațiul  $H$ . Pentru a obține ortogonalitatea rezoluțiilor se definește o secvență de subspații  $\{W_k : W_k \subseteq H\}$  cu proprietățile:

$$(7.20) \quad V_{k+1} = V_k \oplus W_k$$

și

$$(7.21) \quad V_k \perp W_k$$

Subspațiile  $W_k$  se numesc *subspații de undine*, iar funcția  $\psi \in W_0$  se numește undină mamă.

În continuare trebuie să construim o funcție  $\psi \in W_0 \subset V_1$  astfel încât  $\{\tau_n \psi\}$  formează o bază ortonormată în  $W_0$ . Dacă această funcție există, atunci ea este o bază pentru întreg spațiul  $H$ .

Notăm reprezentarea unei funcții  $f \in H$  în subspațiul  $V_k$ :

$$(7.22) \quad L_{\phi,k} f \triangleq \left\{ \langle f, D_{2^k} \tau_n \phi \rangle \right\} = \left\{ (f * D_{2^k} \tilde{\phi})(2^{-k} n) \right\}$$

Deoarece  $\psi \in W_0$ , atunci această funcție trebuie să îndeplinească următoarele condiții:  $L_{\phi,0} = 0$ ;  $L_{\phi,1} \neq 0$

Notând:

$$(7.23) \quad H = \mathcal{F}\{L_{\phi,1}\phi\} \text{ și}$$

$$(7.24) \quad G = \mathcal{F}\{L_{\phi,1}\psi\},$$

se poate arăta că  $\psi \in W_0$  dacă și numai dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$1. |H|^2 + \tau_{1/2}|H|^2 = 2$$

$$2. G\bar{H} + \tau_{1/2}(G\bar{H}) = 0$$

Deoarece condițiile (1) și (2) de mai sus caracterizează subspațiul  $W_0$ , orice funcție aparținând acestuia trebuie să le îndeplinească. Dacă se consideră funcția  $G$  de forma:

$$(7.25) \quad G = Q\tau_{1/2}\bar{H},$$

unde  $Q \in L^2[0,1]$ ,  $|Q|=1$ , condițiile (1) și (2) devin respectiv:

$$(7.26) \quad |H|^2 + |G|^2 = 2$$

$$(7.27) \quad \left[Q + \tau_{1/2}Q\right]\left(\tau_{1/2}\bar{H}\right)\bar{H} = 0$$

Din aceste două ecuații rezultă:

$$(7.28) \quad Q + \tau_{1/2}Q = 0$$

Dacă  $\{q_n\}$  este secvența asociată lui  $Q$ , astfel încât  $Q$  este obținută aplicând transformata Fourier discretă a secvenței  $\{q_n\}$ , ecuația (7.28) devine:

$$(7.29) \quad q_n + (-1)^n q_n = 0 \Rightarrow q_{2n} = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$$

În domeniul temporal ecuația (7.25) se poate scrie:

$$(7.30) \quad g_n = \{q_n\} * \{(-1)^n \bar{h}_{-n}\}$$

Cea mai simplă secvență  $\{q_n\}$  care îndeplinește aceste condiții este  $q_n = (-1)^{n-1} \delta_{n,1}$ , astfel încât se poate scrie:

$$(7.31) \quad g_n = (-1)^n \cdot \bar{h}_{1-n}$$

S-a construit astfel o potențială undină mamă  $\psi \in W_0$  și  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  exprimată în domeniul frecvențial:



$$(7.32) \quad \mathcal{F}\{\psi\} = D_{2^{-1}}(G\mathcal{F}\{\phi\})$$

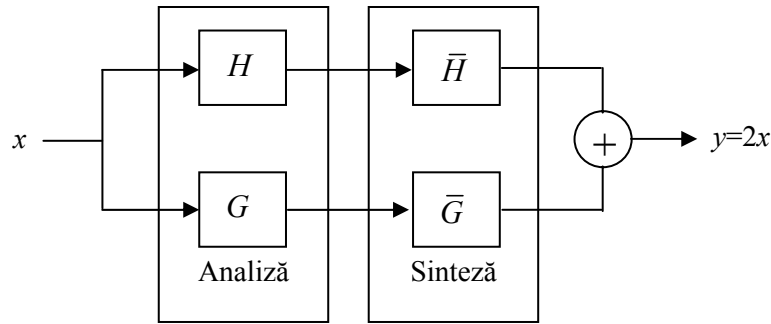
cu  $G$  de forma (7.25).

Se poate arăta și că secvența  $\{\tau_n\psi\}$  este ortonormată și că este completă în  $\mathcal{W}_0$ , ceea ce înseamnă că  $\{D_{2^m}\tau_n\phi\}$  este bază ortonormată pentru  $H$ .

Ecuția:

$$|H|^2 + |G|^2 = 2$$

sugerează un banc de filtre cu două canale,  $H$  acționând ca un FTJ, iar  $G$  ca FTS, iar pentru sinteză se utilizează  $\bar{H}$  și  $\bar{G}$ , ca în fig. 7.15. Problema care apare este dată de faptul că la ieșirea sistemului de filtre  $y = 2x$ .



**Fig. 7.15** Banc de filtre pentru descompunerea și sinteza unui semnal

Pentru a rezolva acest neajuns se consideră doi operatori auxiliari. Fie  $c = \{c_n\} \in l^2(\mathbb{Z})$ . Se definesc operatorii:

„down-sampling”:

$$S \downarrow: l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$(7.33) \quad (S \downarrow c)_n \triangleq \{c_{2n}\}$$

pentru care:

$$(7.34) \quad \mathcal{F}\{S \downarrow c\} = 2^{1/2} D_2(\mathcal{F}\{c\} + \tau_{1/2}\mathcal{F}\{c\}),$$

deoarece apare o aliere spectrală, prin eliminarea eşantioanelor impare, și „up-sampling”:

$$S \uparrow: l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z})$$

$$(7.35) \quad (S \uparrow c)_n \triangleq \begin{cases} c_{n/2}, & n - \text{par} \\ 0, & n - \text{impar} \end{cases}$$

sau:

$$(7.36) \quad \mathcal{F}\{S \uparrow c\} = 2^{-1/2} D_{2^{-1}} \mathcal{F}\{c\}$$

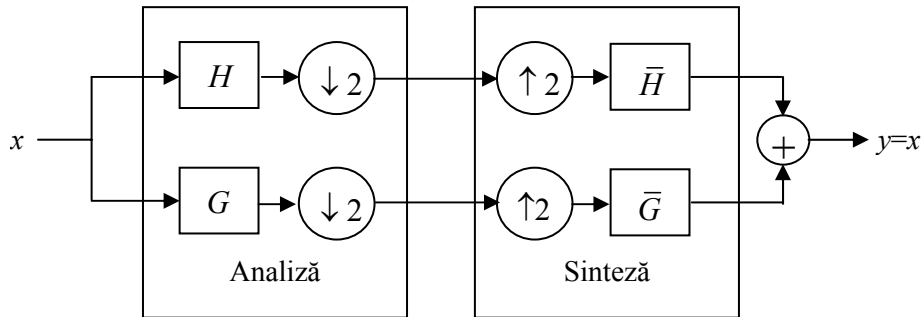


Fig. 7.16 Analiza în undine efectuată pe un singur nivel

Se observă că  $c = S \downarrow S \uparrow c$  și că  $(S \uparrow S \downarrow c)_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)c_n$ , deoarece toți coeficienții impari au fost eliminați.

Putem realiza analiza și sinteza utilizând acești operatori astfel încât funcția de transfer a sistemului de prelucrare să fie  $H_0 = 1$ .

$$(7.37) \quad H_0 = \bar{H}S \uparrow S \downarrow H + \bar{G}S \uparrow S \downarrow G$$

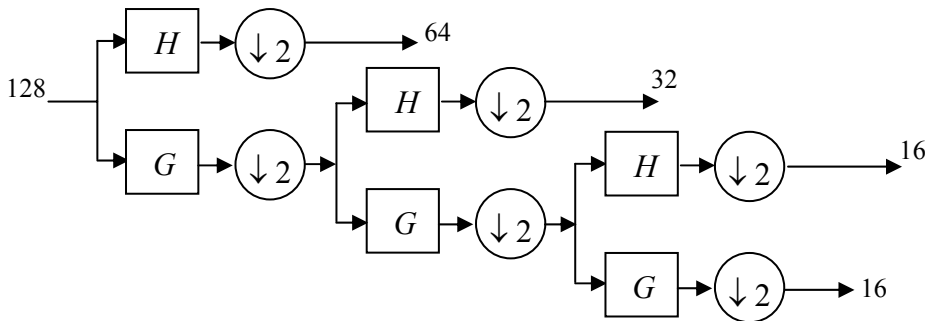


Fig. 7.17 Descompunerea pe trei niveluri a unui semnal

Ținând cont că  $\mathcal{F}\{S \uparrow S \downarrow c\} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}\{c\} + \tau_{1/2}\mathcal{F}\{c\})$ ,  $H_0$  se poate scrie:

$$H_0 = \frac{1}{2}(|H|^2 + |G|^2 + (\tau_{1/2}H)\bar{H} + (\tau_{1/2}G)\bar{G}) = 1, \text{ deoarece:}$$

$$(\tau_{1/2}H)\bar{H} + \bar{H}(\tau_{1/2}Q)\bar{Q}(\tau_{1/2}H) = (\tau_{1/2}H)\bar{H}[1 + \bar{Q}\tau_{1/2}Q] = 0$$

Analiza, ca și sinteza, poate fi realizată pe mai multe niveluri, folosind aceleași filtre și operatori adiționali, ca în figura 7.17.

*Acest algoritm, care permite descompunerea semnalelor în semnale care conțin numai detalii și în semnale care dau „alura”, se mai numește și algoritm de descompunere piramidal.*

În figura 7.18 se prezintă rezultatul aplicării algoritmului de descompunere piramidal.

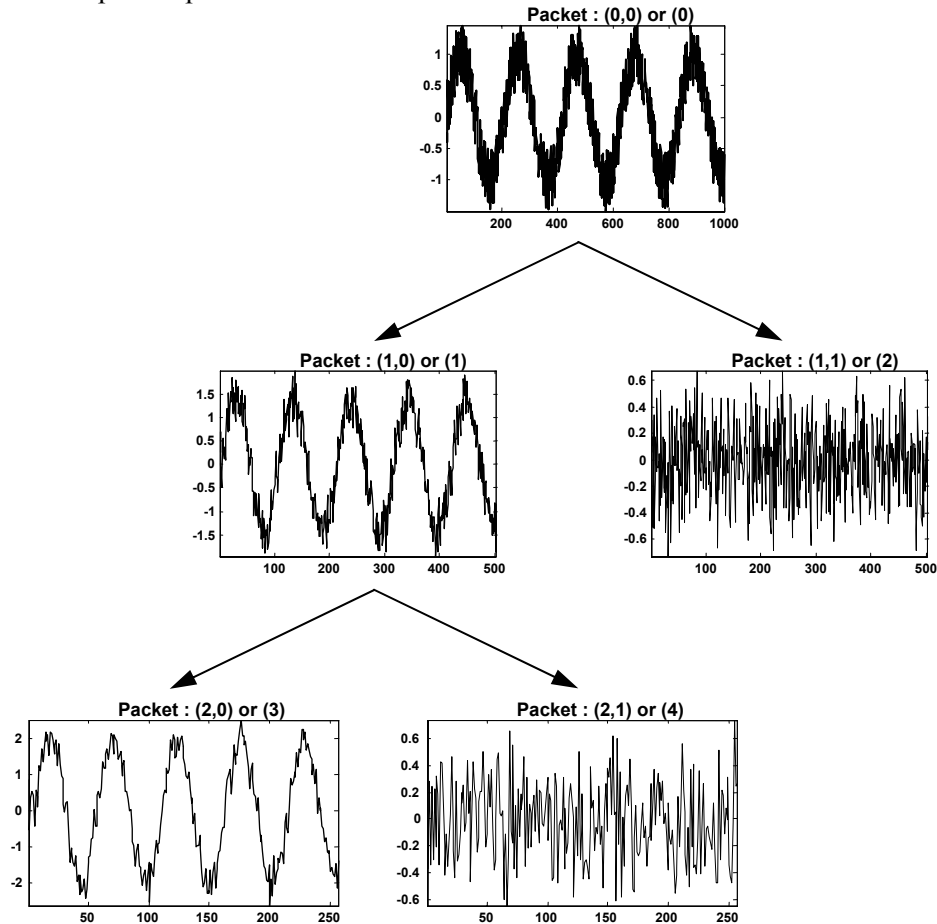


Fig. 7.18 Descompunerea unui semnal folosind algoritmul piramidal

*Exemplul 7.2:*

Pentru a exemplifica utilizarea algoritmului de descompunere, vom considera un semnal aleator, care conține armonici definite de utilizator, la care se adaugă un zgomot alb. După aplicarea algoritmului piramidal, se evidențiază componentele care dau detaliile semnalului. Scopul urmărit este de a elimina componentele de zgomot, care au fost puse în evidență de algoritmul piramidal.

Programul Matlab care realizează procesarea semnalului complex este prezentat în continuare.

```
clear all
t = 1:100;
nr_armonici = input('Cate armonici? ');
```

```

fundamentala = 10*sin(2*pi*50*t/2500);
s = 0;
%generarea armonicilor
for i = 1:nr_armonici,
    nr = input('nr armonica ');
    A = rand(1,1);
    armonica = 1.75*A*sin(2*pi*50*t*nr/2500);
    s = s + armonica;
end
alb = rand(1,100);
white = 1.5*alb;
semnal = fundamentala + s + white;

%descompunerea în undine se realizează utilizând algoritmul piramidal
%implementat cu funcția wavedec ai cărei parametri sunt:
% - semnalul de analizat
% - numărul de nivele pe care se va face descompunerea
% - tipul undinei utilizate
[c, l] = wavedec(semnal, 5, 'db7');

%funcția ddencmp realizează filtrarea zgomotului
%prin compararea detaliilor semnalului cu o valoare dată
%(detaliile ce depășesc această valoare sunt eliminate)
%componentele rămase dau alura semnalului
%și detaliile care sunt sub valoarea de prag
[thr, sorh, keepapp] = ddencmp('den', 'wv', semnal);

%se recompune semnalul utilizând componentele furnizate de
%funcția ddencmp, folosind același tip de undine ca și la analiză
clean = wdencmp('gbl', c, l, 'db7', 5, thr, sorh, keepapp);

subplot(2,2,1);plot(semnal);title('Semnal original')
subplot(2,2,2);plot(clean);title('Semnal filtrat')
end

```

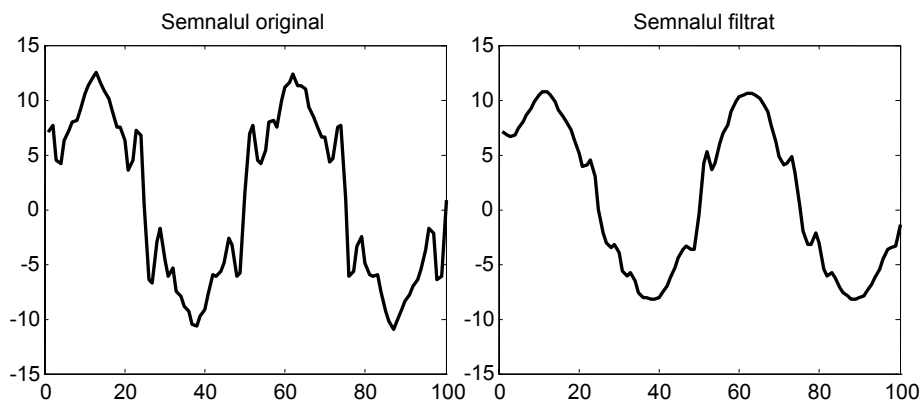


Fig. 7.19 Filtrarea zgomotului utilizând algoritmul piramidal

Practic, semnalul este descompus utilizând algoritmul piramidal, apoi sunt eliminate componentele obținute prin proiecția semnalului pe subspațiile  $W_k$  (componentele date de bancul de filtre trece-sus  $G$ ). Folosind celelalte componente ale semnalului original se obține, aplicând algoritmul invers, un semnal asemănător ca „alură” cu cel original, dar care nu mai conține componente de frecvență înaltă.

## Bibliografie

1. Cartianu, Gh. ș.a. *Semnale, circuite și sisteme*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1980.
2. Mateescu, A. *Semnale, circuite și sisteme*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1984.
3. Mateescu, A., Șerbănescu, Al. *Semnale, circuite și sisteme - Probleme*. Editura Militară, București, 1998.
4. Săvescu, M. *Semnale, circuite și sisteme - Probleme*. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982.
5. Stanomir, D., Stănășilă, O. *Metode matematice în teoria semnalelor*. Editura Tehnică, București, 1980.
6. Mateescu, A., Dumitru, N., Stanciu, L. *Semnale și sisteme*. Editura Teora, București, 2001.
7. Oppenheim, A.V., Schaffer, R.W. *Discrete-Time Signal Processing*. Prentice-Hall, 1989.
8. Naforniță, M., Isar, A. *Reprezentări timp - frecvență*. Editura Politehnica Timișoara, 1998.
9. Teolis, A. *Computational signal processing with wavelets*. McGraw-Hill, 1999.
10. Jawerth, B., Sweldens, W. *An Overview Of Wavelet Based Multiresolution Analyses*. Report of The Department of Mathematics, University Of South Carolina, 1998.



## Repertoriu de figuri

### Capitolul 1: INTRODUCERE

- Fig. 1.1 Sistem dinamic
- Fig. 1.2 Sistem numeric
- Fig. 1.3 Sistem 2D

### Capitolul 2: MODELAREA SEMNALELOR PERIODICE

- Fig. 2.1 Semnal periodic
- Fig. 2.2 Răspunsul sistemului liniar
- Fig. 2.3 Spectrul SFG al unui semnal
- Fig. 2.4 Schema de principiu a unui analizor spectral
- Fig. 2.5 Schema de principiu a unui sintetizor de semnal
- Fig. 2.6 Spectrul SFT al unui semnal periodic
- Fig. 2.7 Spectrul de amplitudini și de faze inițiale la SFA
- Fig. 2.8 Spectrul unui semnal periodic în SFC
- Fig. 2.9 Semnal de tip „sinus pătrat”
- Fig. 2.10 Spectrul SFT al semnalului din fig. 2.9
- Fig. 2.11 Spectrul SFA al semnalului din fig. 2.9
- Fig. 2.12 Spectrul SFC al semnalului din fig. 2.9
- Fig. 2.13 Semnalul  $u(t)$  și diferite aproximări ale sale prin SFA
- Fig. 2.14 Semnal derivat din semnalul  $u(t)$  din fig. 2.9
- Fig. 2.15 Tren de impulsuri de arie unitară
- Fig. 2.16 Funcția sinus cardinal a) și spectrul unui tren de impulsuri b)
- Fig. 2.17 Spectrul de amplitudini și de faze al unui tren de impulsuri
- Fig. 2.18 Spectrele de amplitudini  $|A_i|$  și de faze  $\varphi_i$
- Fig. 2.19 Semnalul  $x(t)$  și aproximarea acestuia printr-un număr finit de armonici
- Fig. 2.20 Detalierea zonei centrale din fig. 2.19
- Fig. 2.21 Primele 8 funcții Walsh
- Fig. 2.22 Spectre în analiza Fourier-Walsh
- Fig. 2.23 Generarea funcției  $wal(1, \theta)$
- Fig. 2.24 Generarea funcției  $wal(5, \theta)$
- Fig. 2.25 Construcția funcției  $wal(1, r)$
- Fig. 2.26 Semnal sinusoidal
- Fig. 2.27 Aproximarea lui  $x(\theta)$  prin  $\tilde{x}(\theta)$  în analiza Fourier - Walsh
- Fig. 2.28 Funcții Rademacher
- Fig. 2.29 Funcții Hadamard
- Fig. 2.30 Funcții Haar



### Capitolul 3: MODELAREA SEMNALELOR NEPERIODICE

- Fig. 3.1 Semnal periodic obținut dintr-un semnal neperiodic
- Fig. 3.2 Pulsațiile discrete din SFC
- Fig. 3.3 Pulsațiile discrete pentru o perioadă  $T$  foarte mare
- Fig. 3.4 Procedul de discretizare a unei caracteristici spectrale
- Fig. 3.5 Impuls de arie unitară
- Fig. 3.6 Caracteristica spectrală a impulsului
- Fig. 3.7 Discretizarea caracteristicii spectrale (3.15)
- Fig. 3.8 Caracteristica spectrală a unui semnal modulată
- Fig. 3.9 Funcții  $\Delta(\varepsilon, t)$  care pot genera, prin trecere la limită, distribuția  $\delta(t)$
- Fig. 3.10 Caracteristica spectrală a unui semnal cosinusoidal
- Fig. 3.11 Caracteristica spectrală (densitatea spectrală de amplitudine) a unui semnal periodic
- Fig. 3.12 Obținerea treptei unitare prin intermediul relației (3.42)
- Fig. 3.13 Funcția  $f(t, \varepsilon)$  definită prin relația (3.43)
- Fig. 3.14 Distribuția delta periodică
- Fig. 3.15 Distribuția delta periodică a) și caracteristica ei spectrală b)
- Fig. 3.16 Prelucrarea semnalului  $x(t)$  pentru determinarea caracteristicii spectrale
- Fig. 3.17 Prelucrarea prin derivare a unui semnal, în vederea determinării caracteristicii spectrale
- Fig. 3.18 Semnalul  $x(t)$  și derivata lui
- Fig. 3.19 Descompunerea semnalului  $x(t)$  într-o sumă de impulsuri
- Fig. 3.20 Semnalele  $u(t)$  și  $x(t)$  pentru care se determină convoluția
- Fig. 3.21 Construcția grafică a convoluției (3.65)
- Fig. 3.22 Semnalul  $u(t)$  (aplicația 3.5)
- Fig. 3.23 Construcția grafică a convoluției semnalului  $u(t)$  din fig. 3.22 cu el însuși
- Fig. 3.24 Conturul Bromwich
- Fig. 3.25 Descompunerea unui impuls ca sumă a două semnale treaptă
- Fig. 3.26 Tren de impulsuri
- Fig. 3.27 Caracteristicile spectrale ale semnalelor  $x_{\cos}(t)$  și  $\hat{x}_{\cos}(t)$

### Capitolul 4: SEMNALE MODULATE

- Fig. 4.1 Semnal purtător sub forma unui tren de impulsuri
- Fig. 4.2 Modulația în amplitudine
- Fig. 4.3 Spectrul semnalelor  $x(t)$ ,  $x_p(t)$  și  $x_{MA}(t)$
- Fig. 4.4 Reprezentarea fazorială a semnalului modulată
- Fig. 4.5 Spectrul semnalelor (4.6) și (4.8)
- Fig. 4.6 Caracteristicile spectrale ale semnalelor  $x_M \cdot x(t)$ , și  $x_{MA}(t)$
- Fig. 4.7 Spectrele semnalelor modulator și modulată (aplicația 4.1)
- Fig. 4.8 Modulator de tip produs
- Fig. 4.9 Modulația de tip produs a unui semnal
- Fig. 4.10 Spectrul semnalului  $MA$  cu modulație de tip produs

- Fig. 4.11 Semnalul de analizat (aplicația 4.2)  
 Fig. 4.12 Generarea semnalului  $x(t)$  din fig. 4.11  
 Fig. 4.13 Caracteristicile spectrale  $X(j\omega)$ ,  $X_1(j\omega)$  și  $X_2(j\omega)$  (aplicația 4.2)  
 Fig. 4.14 Demodulator de tip produs  
 Fig. 4.15 Funcționarea demodulatorului de tip produs  
 Fig. 4.16 Modulația *BLU* – metoda semnalului analitic  
 Fig. 4.17 Caracteristicile spectrale ale semnalelor implicate în schema din fig. 4.16  
 Fig. 4.18 Modulația *BLU* – metoda Weaver  
 Fig. 4.19 Obținerea caracteristicii spectrale a semnalului  $x_{1c}(t)$   
 Fig. 4.20 Obținerea caracteristicii spectrale a semnalului  $x_{2s}(t)$   
 Fig. 4.21 Obținerea caracteristicii spectrale a semnalului  $x_{MA-BLU}(t)$   
 Fig. 4.22 Principiul multiplexării în frecvență  
 Fig. 4.23 Multiplexarea în frecvență utilizând *MA-BLU*  
 Fig. 4.24 Semnale *MF* și *MP*, de tip *FSK* și *PSK*  
 Fig. 4.25 Primele 7 funcții Bessel de speța I  
 Fig. 4.26 Spectrul semnalului *MF* pentru  $\beta = 2.4$   
 Fig. 4.27 Spectrul semnalului *MF* pentru  $\beta$  mare ( $\beta = 5.5$ )  
 Fig. 4.28 Spectrul semnalului *MF* cu  $\beta$  redus ( $\beta = 0.3$ )  
 Fig. 4.29 Reprezentarea fazorială a semnalului *MF* cu indice redus de modulație  
 Fig. 4.30 Modulador *MP* cu indice redus de modulație  
 Fig. 4.31 Modificarea schemei din fig. 4.30, pentru a se obține *MF* cu indice redus de modulație  
 Fig. 4.32 Modulația impulsurilor în amplitudine naturală  
 Fig. 4.33 Impuls de amplitudine unitară  
 Fig. 4.34 Modelul matematic temporal al unui semnal *MIA-N*  
 Fig. 4.35 Distribuția spectrală a semnalului modulator  
 Fig. 4.36 Funcția spectrală  $|X_{MIA-N}(\omega)|$   
 Fig. 4.37 Extragerea semnalului de bază din semnalul *MIA-N*  
 Fig. 4.38 Modulația impulsurilor în amplitudine  
 Fig. 4.39 Modelul matematic temporal al unui semnal *MIA-U*  
 Fig. 4.40 Funcția spectrală  $|X_{MIA-U}(\omega)|$   
 Fig. 4.41 Principiul multiplexării în timp  
 Fig. 4.42 Impulsuri cu diverse valori ale fazei  
 Fig. 4.43 Modulația naturală a impulsurilor în poziție  
 Fig. 4.44 Modulația uniformă a impulsurilor în poziție  
 Fig. 4.45 Schema de realizare a unui semnal *MIP-U*  
 Fig. 4.46 Modulația impulsurilor în durată

## Capitolul 5: SEMNALE EȘANTIONATE

- Fig. 5.1 Element de eșantionare  
 Fig. 5.2 Procesul de eșantionare  
 Fig. 5.3 Modulația distribuției delta periodice  
 Fig. 5.4 Caracteristica spectrală a semnalului  $x(t)$   
 Fig. 5.5 Caracteristica spectrală a semnalului eșantionat  $x^*(t)$

- Fig. 5.6 Suprapunerea spectrală
- Fig. 5.7 Caracteristică spectrală cu frecvența maximă finită
- Fig. 5.8 Ilustrarea teoremei lui Shannon
- Fig. 5.9 Situația limită când  $\omega_e = 2\omega_M$
- Fig. 5.10 Filtru anti-aliasing
- Fig. 5.11 Distribuția poli-zeroouri a funcției  $X(s)$
- Fig. 5.12 Distribuția polilor și zerourilor funcției  $X^*(s)$
- Fig. 5.13 Reconstrucția semnalului  $x(t)$  cu un filtru trece jos ideal
- Fig. 5.14 Reconstrucția semnalului cu un extrapolator de ordinul zero
- Fig. 5.15 Ansamblul eșantionator-extrapolator
- Fig. 5.16 Reconstrucția semnalului folosind un extrapolator de ordinul 1
- Fig. 5.17 Traiectorii corespondente în planele „s” și „z”
- Fig. 5.18 Traiectorii corespondente în planele „s” și „z”
- Fig. 5.19 Treapta unitară
- Fig. 5.20 Rampa unitară
- Fig. 5.21 Funcția exponențială
- Fig. 5.22 Schema de calcul al transformatei  $\mathcal{Z}$
- Fig. 5.23 Reprezentarea funcției (5.59)
- Fig. 5.24 Caracterizarea spectrală a semnalelor neperiodice și periodice
- Fig. 5.25 Steaua vectorilor unitari  $\underline{u}^i, i = \overline{0, N-1}$
- Fig. 5.26 Eșantionarea unei caracteristici spectrale introduce o periodicitate a semnalului
- Fig. 5.27 Analiza spectrală a unui semnal (exemplul 5.8)
- Fig. 5.28 Analiza spectrală a unui semnal (exemplul 5.9)
- Fig. 5.29 Transformata Hilbert a semnalului din fig. 5.27

## Capitolul 6: SEMNALE ALEATOARE

- Fig. 6.1 Realizarea unui semnal aleator
- Fig. 6.2 Clasificarea proceselor aleatoare
- Fig. 6.3 Funcția de corelație
- Fig. 6.4 Definiția semnalului  $x_r(t)$
- Fig. 6.5 Caracteristicile unui zgomot alb
- Fig. 6.6 Caracteristicile unui zgomot de bandă largă
- Fig. 6.7 Caracteristicile unui zgomot de bandă îngustă
- Fig. 6.8 Variabila aleatoare  $v_e$  (exemplul 6.1)
- Fig. 6.9 Modulul TFD (exemplul 6.1)
- Fig. 6.10 Spectrul semnalului (exemplul 6.1)
- Fig. 6.11 Funcția de autocorelație a variabilei aleatoare  $v_e$  (exemplul 6.1)
- Fig. 6.12 Densitatea spectrală de putere calculată pe baza teoremei Wiener – Hincin (exemplul 6.1)
- Fig. 6.13 Densitatea spectrală de putere calculată pe baza TFD a semnalului aleator (exemplul 6.1)
- Fig. 6.14 Diferența dintre densitățile spectrale calculate pe baza celor 2 metode (exemplul 6.1)
- Fig. 6.15 Zgomotul pseudo-aleator  $w$  (exemplul 6.2)
- Fig. 6.16 Funcția de autocorelație a variabilei  $w$  (exemplul 6.2)

- Fig. 6.17 Funcția de autocorelație prezentată ca un impuls real (exemplul 6.2)  
Fig. 6.18 Caracteristica densității spectrale de putere, dedusă prin prelucrarea numerică a datelor (exemplul 6.2)  
Fig. 6.19 Densitatea spectrală de putere, calculată cu relația (6.35), reprezentată în scări liniare (exemplul 6.2)  
Fig. 6.20 Densitatea spectrală de putere, calculată cu relația (6.35), reprezentată în scări logaritmice (exemplul 6.2)

## Capitolul 7: ANALIZA TIMP – FRECVENȚĂ

- Fig. 7.1 Planul timp – frecvență și echivalentul său muzical  
Fig. 7.2 Atom timp – frecvență  
Fig. 7.3 Corespondența dintre domeniile temporal și frecvențial  
Fig. 7.4 Reprezentarea generică a CGT  
Fig. 7.5 Fereastră triunghiulară  
Fig. 7.6 Tipuri de ferestre temporale utilizate la calculul CGT: a – fereastră rectangulară, b – fereastră Hamming, c – fereastră Hanning  
Fig. 7.7 Dilatațiile unei undine mamă și spectrele de amplitudini ale acestora  
Fig. 7.8 Undina mamă Haar  
Fig. 7.9 Funcția sinc și spectrul de amplitudini al acesteia  
Fig. 7.10 Undina Morlet  
Fig. 7.11 CWT reprezentată ca ieșirea unui sistem de filtre liniare  
Fig. 7.12 Transformata continuă în undine a unui semnal de tip chirp  
Fig. 7.13 Setul diadic de puncte în care se evaluează CWT  
Fig. 7.14 Reprezentările unei funcții folosind AMR Haar  
Fig. 7.15 Banc de filtre pentru descompunerea și sinteza unui semnal  
Fig. 7.16 Analiza în undine efectuată pe un singur nivel  
Fig. 7.17 Descompunerea pe trei niveluri a unui semnal  
Fig. 7.18 Descompunerea unui semnal folosind algoritmul piramidal  
Fig. 7.19 Filtrarea zgomotului utilizând algoritmul piramidal



## Index alfabetic

### A, B

aliasing	118
aliere spectrală	186
algoritm (de descompunere)	
piramidal	187
analiza semnalelor	10
analiză în undine	187
analiză spectrală	144, 167
analizor spectral	10
armonică	13
armonică elementară	38
armonică fundamentală	13
atom timp – frecvență	168
bandă laterală	75
bandă laterală unică	83
bază ortonormată	175, 181

### C

caracteristică spectrală	36, 76
caracteristică timp – frecvență	177
cerc unitar	142, 146
componentă centrală	103, 106, 121
componentă fundamentală	170
componente laterale	73
contur Bromwich	60
contur de integrare	60, 125
convergență (abscisă de $\sim$ absolută)	59
convertor analogic/numeric (CAN)	2, 115
convoluție	54, 101, 105, 129, 148
cuantificare	115
cuantizare	2

### D

demodulator	81, 104
demodulație	81
densitate de amplitudini (a armonicilor)	38, 42, 76
densitate de energie (a semnalului)	40
densitate de faze inițiale (de armonici)	38

densitate de probabilitate	151, 152
densitate interspectrală	156
densitate spectrală	
a puterii	155, 160, 163, 165
dectecție/redresare	77
deviație de fază	90, 97, 109
deviație de frecvență	90
discretizare	138
discretizare (a spectrului)	38, 39
distorsiuni de apertură	106
distribuția delta	43, 118
distribuția delta	
periodică	49, 101, 111, 116
distribuție poli-zerouri	120
distribuție spectrală	39, 102
distribuție treaptă unitară	44

### E

egalitatea lui Parseval	10, 182
element de eșantionare	115
energia semnalului	39
eșantionare	2, 115, 137, 142, 181
eșantionator	120
extrapolator	122
extrapolator de ordin 0 (cardinal)	123
extrapolator de ordin 1	123

### F

familie de undine	174, 181
fâșie (bandă) de bază	121, 138
faza semnalului analitic	64
fazor	96
fereastră temporală	168, 172
filtrare	189
filtru anti-aliasing	120
filtru Hilbert	67, 83
filtru trece bandă (FTB)	83, 89, 104
filtru trece jos (FTJ)	82, 103, 122
frecvență de eșantionare	117
FSK	91
funcția „sign”	48
funcția repartiție de probabilitate	151, 152

funcție de	
(auto)corelație	153, 154, 159, 162
funcție de (auto)covarianță	155
funcție de intercorelație	153
funcție de ponderare	31
funcție de scalare	183
funcție rațională	132
funcție spectrală	36, 85, 103, 105
funcții Bessel	92, 110, 114
funcții binare	10, 23
funcții liniar independente	5
funcții ortogonale	10, 23
funcții polinomiale	31
funcții trigonometrice	6, 10
funcții Walsh	23

### G, I

generator de funcții	10
grad de modulație	72
(tren de)	
impuls(uri)	19, 39, 49, 71, 100
impuls de amplitudine unitară	101
impuls delta	156
impuls real	39
impuls(uri) de arie unitară	19, 39, 109
impuls-distribuție	105, 111
indice de modulație	92, 97, 109
inegalitatea lui Bessel	10
inversabilitate	179, 181
înfășurătoarea semnalului analitic	64

### M

MIA-N	100, 115, 118
MIA-U	100, 104
MIP-N	107
MIP-U	107, 111
modulare	43
modulator	78, 98
modulator Weaver	85
modulația impulsurilor	72, 100
modulația impulsurilor	
în amplitudine (MIA)	72, 100
modulația impulsurilor	
în durată (MID)	72, 113
modulația impulsurilor	
în frecvență (MIF)	72, 108
modulația impulsurilor	
în poziție (MIP)	72, 107

modulația naturală	
a impulsurilor	107
modulația uniformă	
a impulsurilor	111
modulație	63, 71, 116
modulație de tip produs	67, 79, 89
modulație în amplitudine (MA)	72
modulație în fază (MP)	72, 90
modulație în frecvență (MF)	72, 90
modulație unghiulară	90
multiplexare în frecvență	88
multiplexare în timp	106

### N, O

normă	24, 31, 177
operator de dilatație	174
operator de down-sampling	186
operator de translație	174
operator de up-sampling	186
ortogonalizare	32

### P

pereche Hilbert	63, 69
perioadă de eșantionare	115
plan timp – frecvență	167
poli	133
polinoame Cebâșev	32
polinoame Hermite	32
polinoame Laguerre	31
polinoame Legendre	31
polinoame ortogonale	10, 31
principiul incertitudinii	169
procedură de ortogonalizare	32
proces aleator	151
proces aleator ergodic	154
proces aleator general	154
proces aleator netaționar	153
proces aleator staționar	153
proces de eșantionare	115
proces Markov	152
produs de convoluție ciclic	142
produs scalar	177
PSK	91
(frecvență) purtătoare	73
PWM	113

### R

rampă unitară	131
---------------	-----

randamentul modulației ..... 73  
 reconstituirea semnalului ..... 103, 118, 122  
 reprezentare fazorială ..... 74, 97  
 reziduuri ..... 134

**S**

secvența funcției ..... 24  
 semnal (cu timp) continuu ..... 2  
 semnal (cu timp) discret ..... 2, 146  
 semnal (de tip) chirp ..... 177  
 semnal aleator ..... 2, 151, 188  
 semnal aleator pur ..... 152  
 semnal analitic ..... 64, 148  
 semnal analitic discret ..... 147  
 semnal analogic ..... 2  
 semnal bidimensional ..... 2  
 semnal binar ..... 91  
 semnal cauzal ..... 59, 60, 68  
 semnal de bază ..... 71  
 semnal determinist ..... 2, 157  
 semnal eșantionat ..... 115  
 semnal modulată ..... 43, 57, 67, 71  
 semnal modulator ..... 71  
 semnal neperiodic ..... 35, 137  
 semnal numeric ..... 2  
 semnal periodic ..... 5, 35, 137, 157  
 semnal purtător ..... 71, 118  
 semnal unidimensional ..... 1  
 serie Fourier generalizată (SFG) ..... 5, 32  
 serie Fourier armonică (SFA) ..... 12, 15, 114, 144  
 serie Fourier complexă (SFC) ..... 13, 14, 20, 49, 113, 137  
 serie Fourier trigonometrică (SFT) ..... 11, 12, 20, 144, 145  
 set diadic ..... 181  
 sintetizor ..... 10  
 sinteza semnalelor ..... 10, 179  
 (funcția) sinus cardinal ..... 19, 103, 175  
 sistem (banc) de filtre ..... 177, 186  
 sistem (complet) de funcții ortogonale ..... 8, 29, 30  
 sistem dinamic ..... 1  
 sistem ortonormal (de funcții) ..... 32  
 spațiu Hilbert ..... 177, 182  
 spectru ..... 8, 158  
 spectru de amplitudini ..... 13, 15, 20, 145, 174

spectru de faze inițiale ..... 13, 15, 20, 145  
 spectru discret ..... 110  
 steaua vectorilor unitari ..... 140  
 subspațiu (de undine) ..... 184  
 suprapunere în frecvență ..... 119

**T**

teorema lui Shannon ..... 118, 163  
 teorema Wiener – Hincin ..... 156  
 timp fizic ..... 24  
 timp normal ..... 23  
 transformata Fourier discretă (TFD) directă ..... 140, 157, 163, 185  
 transformata Fourier discretă (TFD) inversă ..... 140, 148  
 transformată Fourier inversă ..... 36  
 transformata Fourier rapidă (TFR–FFT) ..... 141  
 transformata Gabor continuă (TGC–CGT) inversă ..... 173  
 transformata Hilbert inversă ..... 63  
 transformata Laplace ..... 58  
 transformata Laplace bilaterală ..... 59  
 transformata Laplace inversă ..... 60  
 transformata Laplace unilaterială ..... 59  
 transformata inversă în undine ..... 179  
 treaptă unitară ..... 48, 131

**U, V, Z**

undină ..... 173  
 undină – mamă ..... 174, 176  
 valoare medie ..... 152  
 valoare principală (a integralei) ..... 63  
 varianță ..... 153  
 vector rotitor ..... 13  
 zgomot „colorat” ..... 158, 162  
 zgomot alb ..... 157, 188  
 zgomot pseudo-aleator ..... 163