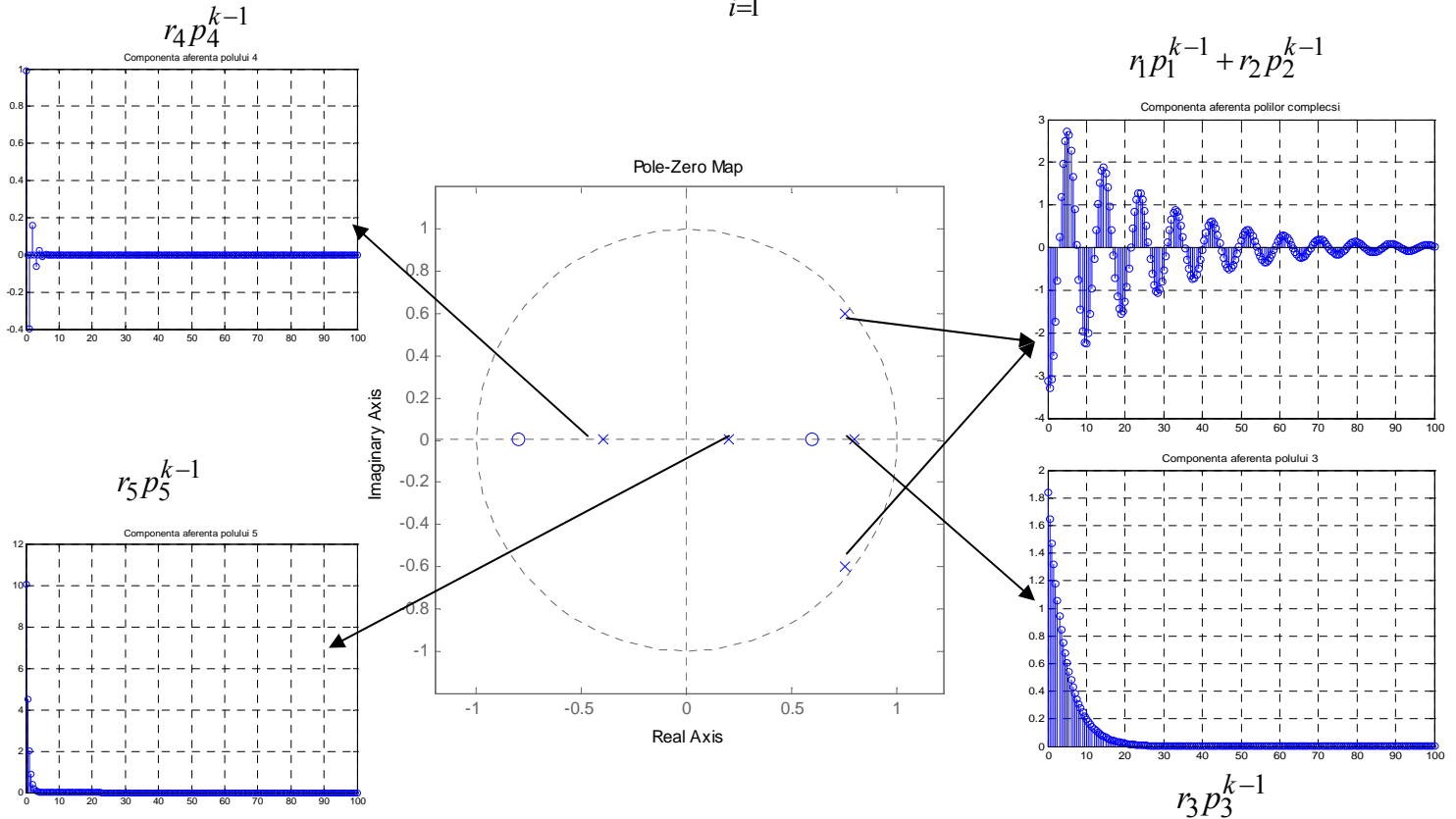


## CURS 13 RECAPITULARE

**Răspunsul la impuls** pentru sisteme cu timp discret

$$h(k) = Z^{-1}\{H(z)\} = \sum_{i=1}^n r_i \cdot p_i^{k-1}, \quad k=1,2,\dots$$



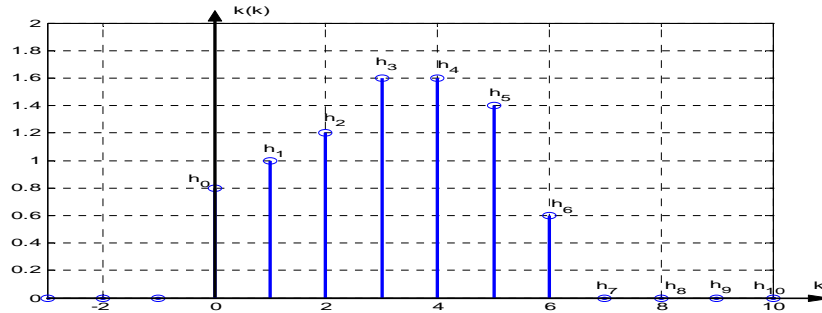
**Funcția indicială** a sistemului cu timp discret

$$y(k) \equiv h^{(-1)}(k) = \sum_{i=0}^k h(i)$$

**Modelul intrare-ieșire pentru un semnal de intrare oarecare**

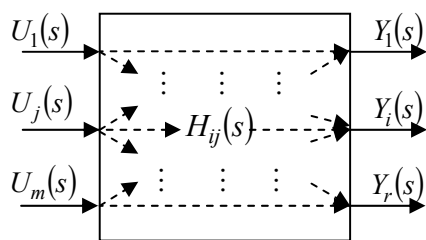
$$y(k) = h(k) * u(k) = \sum_{i=0}^k h(i) u(k-i)$$

**Sisteme cu răspuns la impuls infinit (IIR)** → **Sisteme cu timp continuu**  
 → **Sisteme cu timp discret**



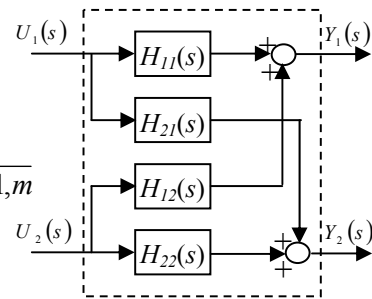
$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_6 z^{-6} = 0.8 + z^{-1} + 1.2z^{-2} + 1.6z^{-3} + 1.6z^{-4} + 1.4z^{-5} + 0.6z^{-6}$$

### Modele intrare-ieșire pentru sisteme multivariabile



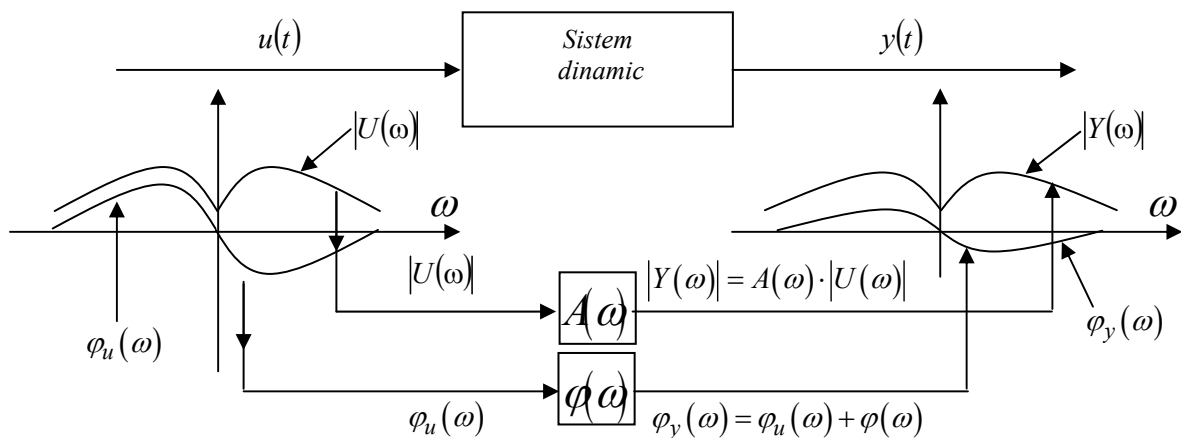
Sistem multivariabil

$$H(s) = \{H_{ij}(s)\}_{i=\overline{1,r}, j=\overline{1,m}}$$



Sistem cu 2 intrari si 2 iesiri

### Reprezentarea frecvențială a sistemelor



Ilustrarea reprezentării frecvențiale a unui sistem

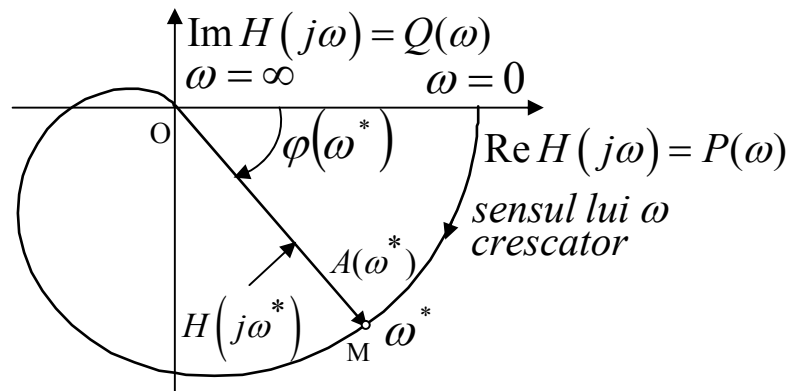
**Răspunsul la frecvență**  $H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

**Caracteristica de amplificare**  $A(\omega) = \frac{Y}{U} = |H(j\omega)|$

**Caracteristica de defazaj (de fază)**  $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$

## Reprezentări grafice ale răspunsului la frecvență

### A. Locul de transfer (caracteristica Nyquist)



Locul de transfer

### B. Caracteristicile logaritmice de frecvență (caracteristicile Bode)

Reprezentarea Bode a răspunsului la frecvență implică două caracteristici distincte (fig. 27) :

- **caracteristica amplificării exprimată în decibeli [dB]** în funcție de pulsație:

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log A(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| \quad (107)$$

- **caracteristica de fază**  $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$  (108)

La ambele caracteristici, **pulsația în abscisă se consideră în scară logaritmică.**

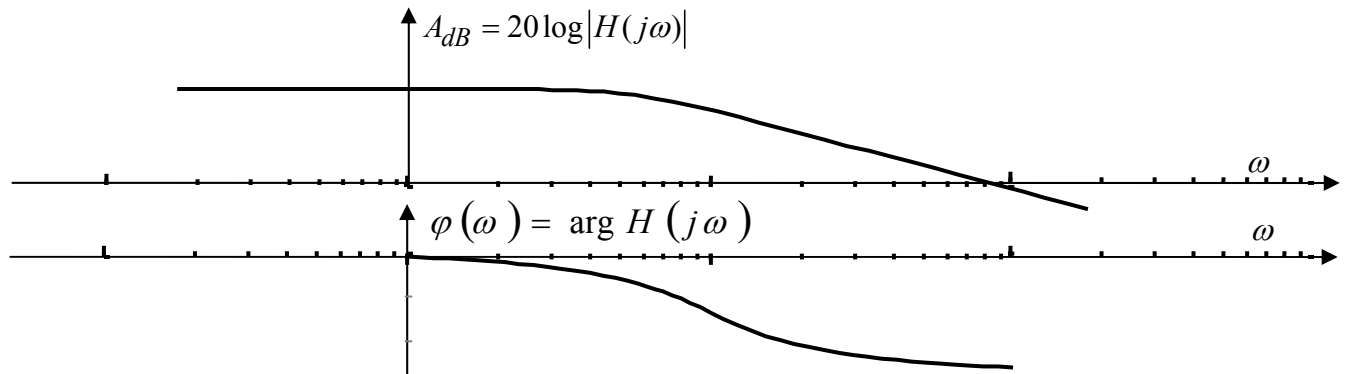


Fig. 27 Caracteristici Bode

Fie  $H(j\omega)$  răspunsul la frecvență al unui sistem, exprimat ca produsul funcțiilor de transfer  $H_1(j\omega)$  și  $H_2(j\omega)$ . Caracteristicile Bode pentru  $H(j\omega) = H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$  se deduc pe baza celor aferente funcțiilor  $H_1(j\omega)$  și  $H_2(j\omega)$ , astfel:

$$20\log|H(j\omega)| = 20\log|H_1(j\omega)| + 20\log|H_2(j\omega)| \quad (109)$$

$$\arg H(j\omega) = \arg H_1(j\omega) + \arg H_2(j\omega) \quad (110)$$

sau

$$A_{dB}(\omega) = A_{1dB}(\omega) + A_{2dB}(\omega), \varphi(\omega) = \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) \quad (111)$$

**Deci, caracteristicile Bode ale sistemului se obțin prin însumare, din cele aferente funcțiilor de transfer  $H_1(j\omega)$  și  $H_2(j\omega)$ .**

Trasarea în mediul Matlab® a caracteristicilor Bode se face cu funcția bode

*Exemple. 1.* Pentru secvența `n1=[2 0];d1=[0.5 3.3 1]; s1=tf(n1,d1);`  
`bode(s1);grid`

se obține rezultatul din fig. 28

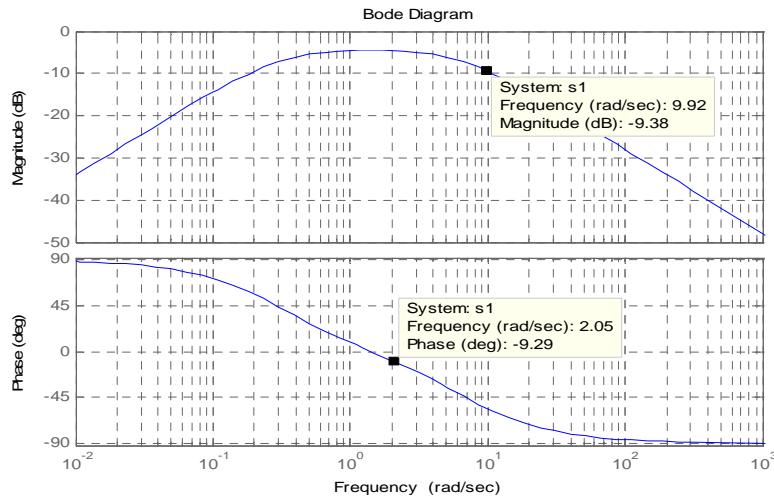


Fig. 28 Exemplul 1

2. Pentru secvența :

```
n1=[2 1];d1=[0.5 1.3 1];s1=tf(n1,d1);
n2=[1];d2=[1 1];s2=tf(n2,d2);
w=(1e-2:0.01:100);bode(s1,'r',s2,'b--',w);grid
```

se obțin caracteristicile Bode din fig. 29,a.

3. Dacă se dorește reprezentarea numai a caracteristicii de amplificarea (fig. 29,b), se utilizează secvența :

```
n1=[2 1];d1=[0.5 1.3 1];s1=tf(n1,d1);
n2=[1];d2=[1 1];s2=tf(n2,d2);
w=(1e-2:0.01:100);[A1,Ph1]=bode(s1,w);[A2,Ph2]=bode(s2,w);
A1dB=20*log10(A1(1,:));A2dB=20*log10(A2(1,:));
semilogx(w,A1dB,'b',w,A2dB,'b--');grid;
```

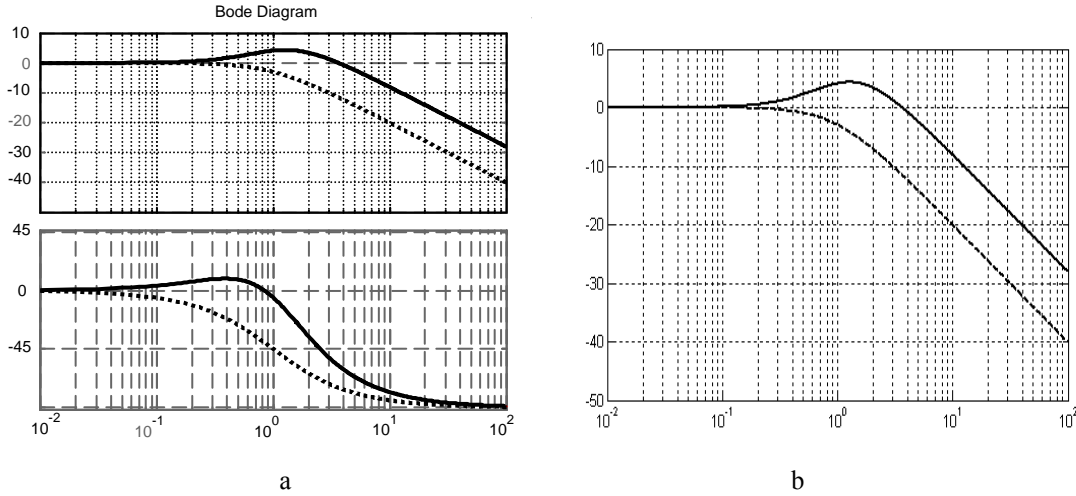


Fig. 29 Caracteristici Bode obținute prin funcția Matlab bode

#### 10.4. Răspunsul la frecvență al sistemelor cu timp discret

Fie  $H(z)$  funcția de transfer a unui sistem discret, unde  $z = e^{sT_e}$ ,  $T_e$  fiind perioada

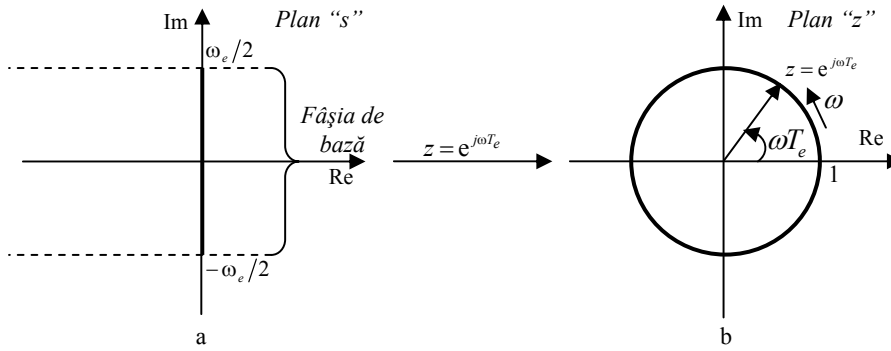


Fig. 30 Traiectoriile punctului curent în planurile  $s$  și  $z$ , asociate răspunsului la frecvență

de eșantionare. Prin substituția  $s = j\omega$  se impune ca punctul curent din planul complex  $s$  să fie situat pe axa imaginară. Întrucât semnalele de intrare-ieșire sunt eșantionate, este necesar ca  $\omega$  să fie în domeniul  $\left[-\frac{\omega_e}{2}, \frac{\omega_e}{2}\right]$ , care corespunde fâșiei de bază (fig. 30,a).

**Pulsația  $\omega_e/2$  se mai numește pulsație Shannon.** Substituția  $s = j\omega$  în  $z = e^{sT_e}$  plasează variabila  $z$  pe cercul unitar în planul “ $z$ ” (fig. 30,b).

**Răspunsul la frecvență al sistemelor cu timp discret se obține prin înlocuirea variabilei  $z$  cu  $e^{j\omega T_e}$  în funcția de transfer :**

$$H(e^{j\omega T_e}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_e}} \quad (112)$$

Caracteristicile de amplificare și de fază sunt definite prin relațiile:

$$A(\omega) = \left| H(e^{j\omega T_e}) \right|; A_{dB} = 20 \log \left| H(e^{j\omega T_e}) \right| \quad (113)$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T_e}); \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_e}{2} \quad (114)$$

și generează reprezentările grafice prezentate anterior : locul de transfer, caracteristicile Bode și caracteristica Black.

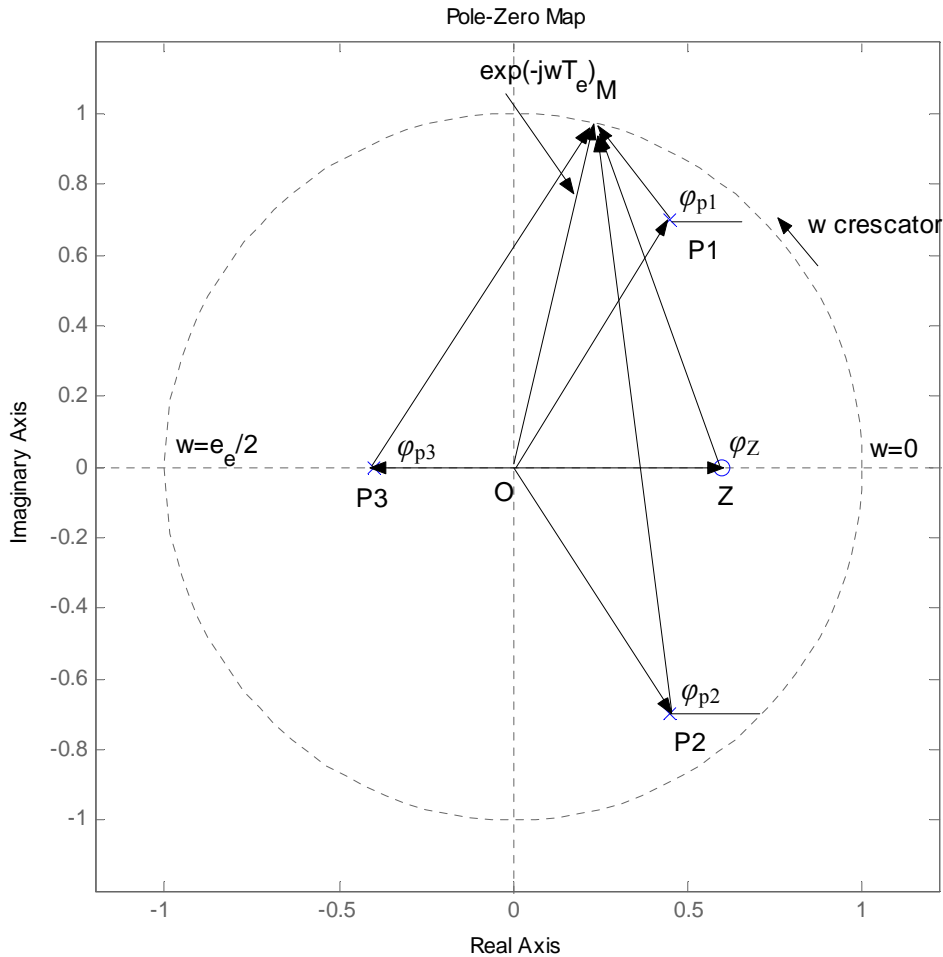
Fie sistemul definit prin secvența

```
n=3; p=[0.45+i*0.7 0.45-i*0.7 -0.4]; z=[0.6]; k=1.2; Te=0.5;
sys=zpk(z,p,k,Te); figure(1); pzmap(sys); axis([-1.2 1.22 -1.2 1.2]).
```

Funcția de transfer definită prin procedura Matlab zpk este

$$H(z) = \frac{1.2(z-Z)}{(z-P_1)(z-P_2)(z-P_3)} = \frac{1.2(z-0.6)}{(z-0.45-j0.7)(z-0.45+j0.7)(z+0.4)} = \frac{1.2(z-0.6)}{(z^2-0.9z+0.6925)(z+0.4)}$$

iar distribuția poli-zerouri este dată în fig. din fig. 31. Răspunsul la frecvență este



**Fig. 31**

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{1.2(e^{j\omega T_e} - Z)}{(e^{j\omega T_e} - P_1)(e^{j\omega T_e} - P_2)(e^{j\omega T_e} - P_3)}; P_{1,2} = 0.45 \pm j*0.7; P_3 = -0.4; Z=0.6$$

Vectorul  $e^{j\omega T_e}$  are vârful în punctul curent M de pe cercul unitar. Atunci când  $\omega$  variază de la zero la  $\omega_e/2$  (pulsăția Shannon), punctul curent parcurge în sens direct semicercul superior. Pentru o frecvență la care punctul M este cel din fig. 31, amplificarea și defazajul sistemului sunt:

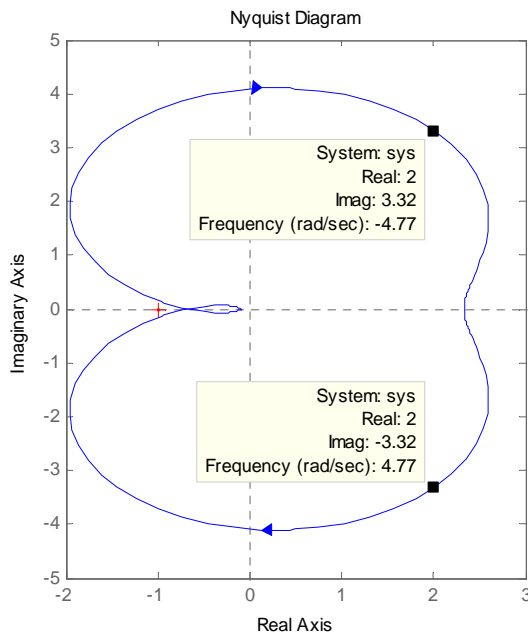
$$A(\omega) = |H(e^{j\omega T_e})| = \frac{1.2 |e^{j\omega T_e} - Z|}{|(e^{j\omega T_e} - P_1)|(e^{j\omega T_e} - P_2)|(e^{j\omega T_e} - P_3)|} = \frac{1.2 \overline{ZM}}{\overline{P_1M} \cdot \overline{P_2M} \cdot \overline{P_3M}}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg H(e^{j\omega T_e}) = \arg(e^{j\omega T_e} - Z) - \arg(e^{j\omega T_e} - P_1) - \arg(e^{j\omega T_e} - P_2) - \arg(e^{j\omega T_e} - P_3) = \\ &= \varphi_Z - \varphi_{P1} - \varphi_{P2} - \varphi_{P3} \end{aligned}$$

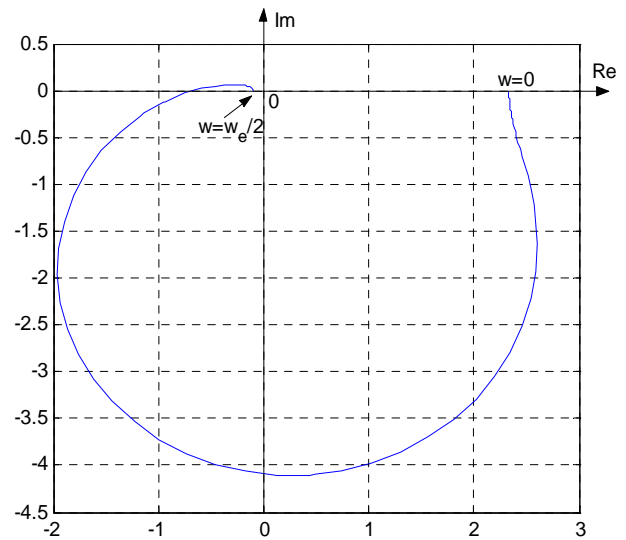
**Exemple 1.** Trasarea caracteristicii Nyquist. Secvența

```
num=[0.5 0.2];den=[1 -1.4 0.7];Te=0.1 ;sys=tf(num,den,Te);
nyquist(sys)
```

conduce la rezultatul din fig. 32.



**Fig.32** Exemplu



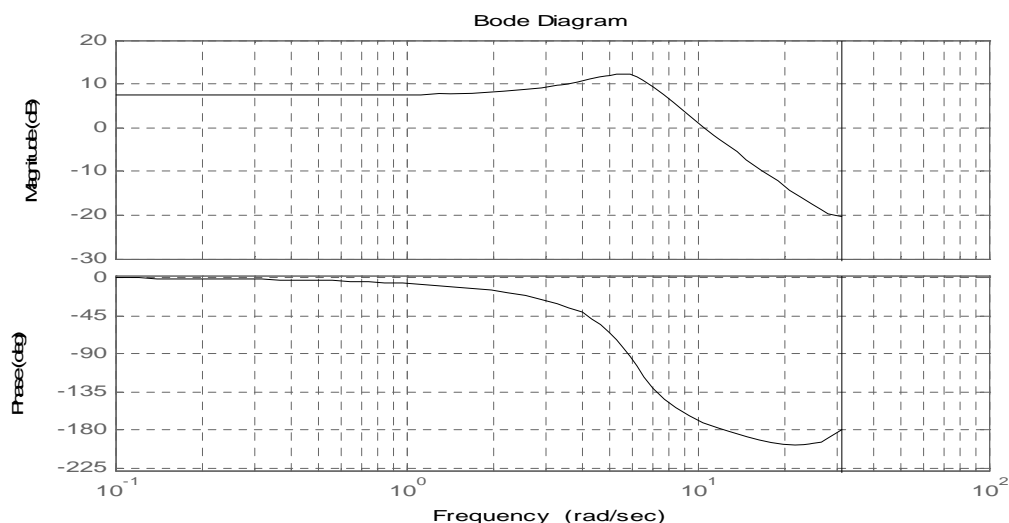
**Fig. 33** Exemplu

Pentru obținerea unei singure ramuri a caracteristicii Bode (Fig. 33), corespunzătoare frecvențelor pozitive, se utilizează secvența

```
num=[0.5 0.2];den=[1 -1.4 0.7]; Te=0.1; sys=tf(num,den,Te);
[re,im]=nyquist(sys); re=squeeze(re);im=squeeze(im);
plot(re,im);grid
```

În fig. 34 este reprezentată caracteristica Bode a unui sistem cu timp discret, obținută cu următoarea secvență Matlab®:

```
num=[0.5 0.2];
den=[1 -1.4 0.7];Te=0.1 ;
sys=tf(num,den,Te);
bode(sys);grid
```



**Fig. 34** Caracteristici Bode ale unui sistem cu timp discret, obținute în mediul Matlab®

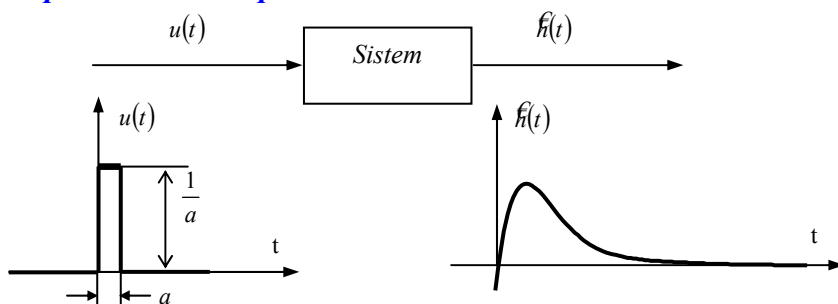
Se constată că reprezentarea caracteristicilor Nquis și Bode se face până la pulsația  $\omega_e/2 = \pi/T_e = 31.4$  rad/s.

## 11 Modele neparametrice

Modelele neparametrice sunt definite prin reprezentări grafice, având **forme netipizate**. În funcție de domeniul de reprezentare, modelele neparametrice pot fi :

- în domeniul «  $t$  » ;
- în domeniul «  $\omega$  ».

### A. Modele neparametrice temporale



**Fig. 35** Model neparametric : răspunsul la impuls determinat experimental

Fie  $\hat{h}(t)$  **înregistrarea experimentală** a răspunsului unui sistem la un impuls unitar real, aplicat la intrare (fig. 35). Dacă durata impulsului aplicat la intrare este foarte mică, atunci se poate considera :  $h(t) \cong \hat{h}(t)$ . Acest răspuns la impuls, obținut experimental, este un model neparametric.

Fie  $h^{(-1)}(t)$  **înregistrarea experimentală** a răspunsului unui sistem la o treaptă unitară, aplicată la intrare. Acest răspuns este, de asemenea, un model neparametric.

Funcțiile  $h(t)$  și  $h^{(-1)}(t)$  pot fi calculate într-un număr mare de puncte și reprezentate grafic. Calculul se poate face pornind de la expresiile analitice (formele parametrice ale funcțiilor  $h(t)$  și  $h^{(-1)}(t)$ ) sau prin integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.

Răspunsurile la impuls sau la treaptă, calculate și reprezentate grafic, sunt – de asemenea – reprezentări neparametrice ale sistemului.

### B. Modele neparametrice frecvențiale

Reprezentările grafice, de tipul caracteristicilor Nyquist și Bode, în care amplificarea și defazajul sunt deduse pentru un număr mare de frecvențe, fie **prin măsurări experimentale**, fie **prin calcul** (pornind de la expresia analitică a răspunsului la frecvență), reprezintă modele neparametrice

### Utilizarea mediului Matlab pentru calculul răspunsului la impuls și a răspunsului la treaptă unitară (răspuns indicial).

Cele două răspunsuri se determină cu funcțiile **impulse** și **step**, care au reguli de utilizare similare. Fis *sys* un sistem cu timp continuu sau cu timp discret, definit prin una din funcțiile Matlab : *tf*, *zpk* sau *ss*.

Răspunsul la impuls se poate determina prin comanzile :

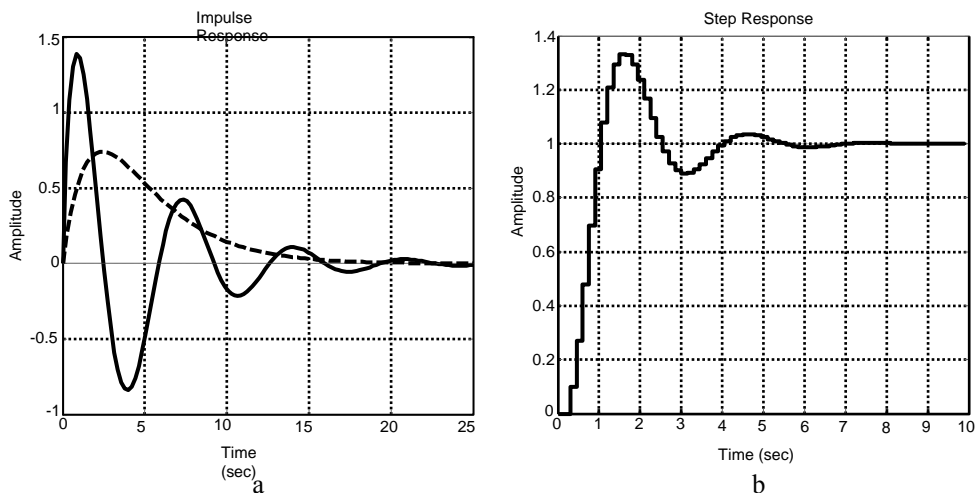
- `impulse(sys)`, care permite calculul și reprezentarea răspunsului la impuls ;
- `impulse(sys,t)`, cu care se calculează și se reprezintă răspunsul la impuls, pentru timpul inclus în vectorul *t* ( $t=0:dt:tf$ , unde *dt* este pasul cu care se discretizează timpul, iar *tf* este timpul final)
- `[y,t]= impulse(sys)` care permite obținerea fișierelor *y* și *t*, care conțin valorile răspunsului la impuls și ale timpului aferent. Răspunsul la impuls se reprezintă prin `plot(t,y)`.

Funcția `step` se utilizează în mod similar.

### Examples

#### 1. Programul Matlab:

```
num1=[2 1];den1=[0.5 1.3 0.9 1];sys1=tf(num1,den1);
num2=[5];den2=[6 5 1];sys2=tf(num2,den2);
impulse(sys1,'b',sys2,'r-',25);grid
```



**Fig. 36** Răspunsul la impuls (a) și indicial (b), determinate cu funcțiile Matlab `impulse` și `step`

conduce la rezultatele prezentate în fig. 36,a.

2. Fie un sistem discret al căruirăspuns la impuls se deduce cu programul :

```
num=[0.1];den=[1 -1.7 0.8];sys=tf(num,den,0.15);
step(sys,10);grid
```

în care 10 din (step(sys,10))este timpul final. Răspunsul este dat în fig. 36,b.

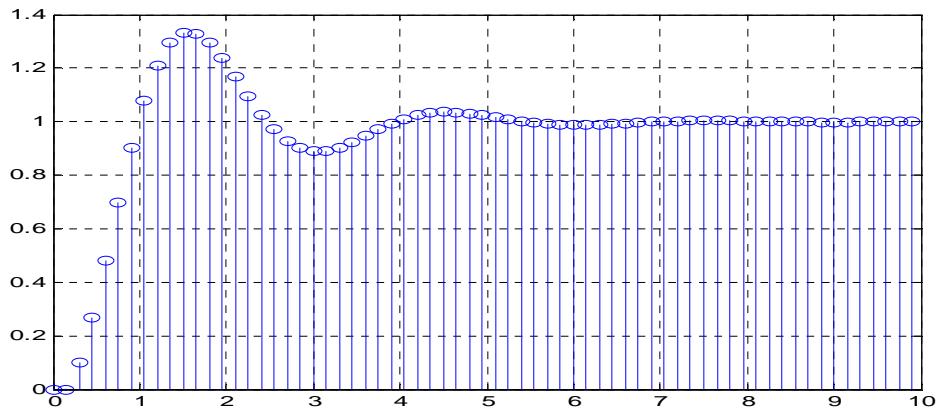


Fig. 37

Utilizând secvența

```
num=[0.1];den=[1 -1.7 0.8];sys=tf(num,den,0.15);
[y,t]=step(sys,10);stem(t,y);grid
```

se obține reprezentarea din fig 37, care este mai adecvată pentru sistemele cu timp discret.

**Observații:**

1. Există o formă **tipizată** pentru caracteristica Bode,  $A_{dB}(\omega)$ , prezentată ca o succesiune de drepte definite prin pantele ( $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots$ ) și prin frecvențele de

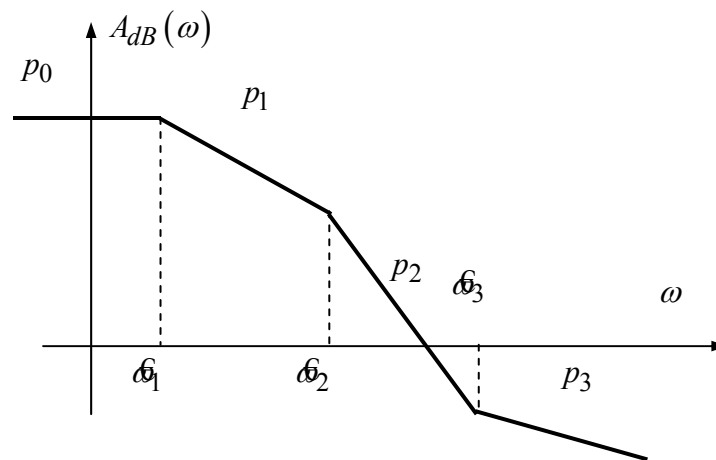


Fig. 38 Model frecvențial parametric

schimbare a pantelor ( $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ ). Un asemenea model (fig. 38) este **parametric**. Pantele sunt de  $\pm k \cdot 20 [dB/dec]$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , iar  $\omega_k, k = 1, 2, \dots$  se numesc **pulsații de frângere**.

2. Un model neparametric poate fi transformat într'un model descris printr-un număr finit (și rezonabil) de parametri. Această operație se numește parametrizare. Pentru un răspuns la impuls neparametric, cea mai simplă procedură de parametrizare este eșantionarea semnalului. Parametrii obținuți sunt valorile discrete (eșantionate) ale răspunsului la impuls.

## 12. Centrul de greutate al unui impuls

Fie  $x(t)$  un semnal, de forma unui impuls oarecare, ilustrat în fig. 39. Mărimea

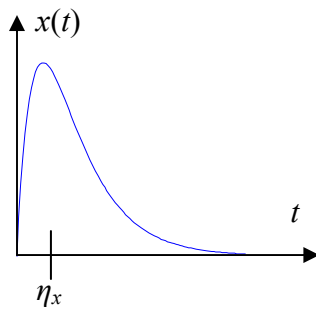


Fig. 39

$$A_x = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt \quad (115)$$

reprezintă aria semnalului, iar mărimea

$$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} ty(t)dt \quad (116)$$

se numește momentul de ordinul 1 al semnalului. Raportul

$$\eta_x = \frac{m_x}{A_x} \quad (117)$$

reprezintă centrul de greutate al semnalului.

Fie acum un sistem (fig. 40) având semnalul de intrare  $u(t)$ , funcția pondere  $h(t)$ , iar mărimea de ieșire  $y(t)$ , cele 3 semnale fiind caracterizate prin ariile  $A_u, A_h, A_y$ ; momentele de ordinul 1,  $m_u, m_h, m_y$ ; și centrele de greutate  $\eta_u, \eta_h, \eta_y$ . Ecuația

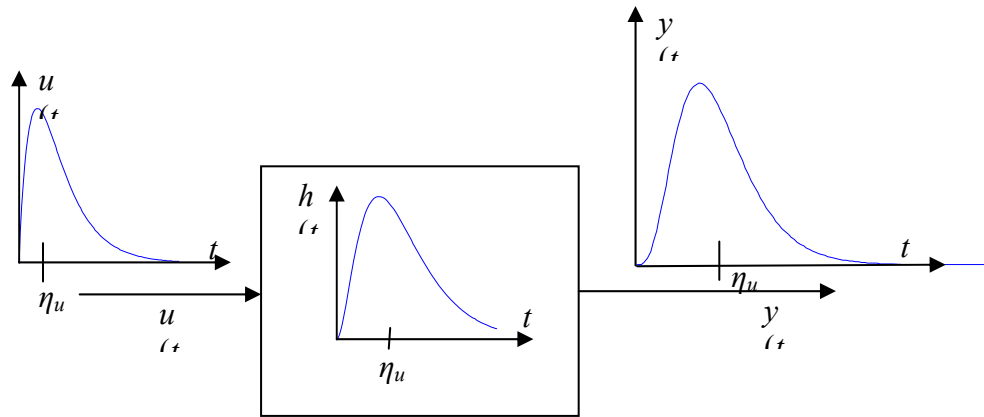


Fig. 40

intrare-ieșire a sistemului este

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau \quad (118)$$

Aria semnalului de ieșire este

$$A_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-\tau)dt \right] d\tau = A_h \cdot A_u \quad (119)$$

Momentul de ordinul 1 al semnalului de ieșire este

$$\begin{aligned} m_y &= \int_{-\infty}^{+\infty} ty(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} t \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} tu(t-\tau)dt \right] d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \theta u(\theta)d\theta \right] + \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \tau h(\tau)d\tau \right] \int_{-\infty}^{+\infty} u(\theta)d\theta = A_h \cdot m_u + A_u \cdot m_h \end{aligned}$$

Rezultă

$$\eta_y = \frac{m_y}{A_y} = \frac{A_h \cdot m_u + A_u \cdot m_h}{A_h \cdot A_u} = \frac{m_u}{A_u} + \frac{m_h}{A_h} = \eta_u + \eta_h \quad (120)$$

## 12. Caracteristica timpului de propagare de grup

Este o caracteristică de frecvență derivată din caracteristica de fază:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (121)$$

Se poate demonstra că:

$$\tau_g(0) = \eta_h \quad (122)$$