CURS 11

RECAPITULARE

Modelul matematic al unui sistem fizic (al unui proces fizic) se numeşte* sistem, *sau* sistem dinamic*, *în accepțiunea teoriei sistemelor

Clasificarea reprezentărilor matematice ale sistemelor

Criterii de clasificare:

natura modelului. Reprezentările pot fi :
- **parametrice**, în care modelul are **o formă tipizată**, fiind ***individualizat printr-un număr finit de parametri***, dependent de ***ordinul sistemului*** ;
- **neparametrice**, în care modelul este dat prin reprezentări grafice ***netipizate*** ;

domeniul de reprezentare. Există :
- modele reprezentate în domeniul " timp " (în **domeniul " *t* "**),
- modele reprezentate în **domeniul " *s* "** (**domeniul "z"**, in cazul sistemelor cu timp discret),
- modele frecvențiale (reprezentate în **domeniul "ω"**).

modul de transfer cauză-efect : Modelele pot fi :
- **de stare**, cu ***transfer de tip intrare-stare- ieşire,***
- **de tip intrare-ieşire**.

In raport cu natura timpului, sistemele pot fi :
- ***cu timp continuu*** sau
- ***cu timp discret***. Sistemele cu timp discret pot fi, la rândul lor:
  - ***sisteme cu răspuns la impuls infinit*** (I.I.R – Infinite Impulse Response), sau
  - ***sisteme cu răspuns la impuls finit*** (FIR - Finite Impulse Response).

3 Modele de stare

Sisteme cu timp continuu

Sistem neliniar $\dot{x} = f(x,u)$

$$y = g(x) \ ; \ y = g(x,u)$$

Sistem liniar multivariabil $\dot{x} = Ax + Bu$

$$y = Cx \ ; \ y = Cx + Du$$

Sistem liniar monovariabil $\dot{x} = Ax + bu$

$$y = c^T x \ ; \qquad y = c^T x + d.u$$

Sisteme cu timp discret

Sistem neliniar $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}(k-1),\boldsymbol{u}(k-1)\right)$

$$\boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(k)\right)\ ;\ \boldsymbol{y}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{k}),\boldsymbol{u}(\boldsymbol{k})\right)$$

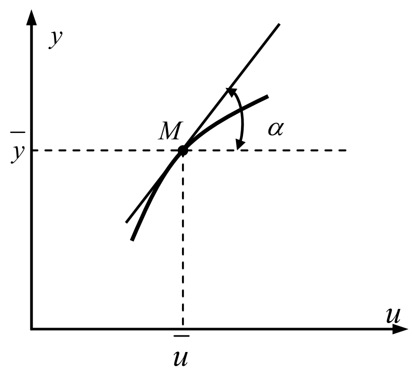
Sistem liniar multivariabil $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1)$

$$y(k)=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k)\ ;\ \boldsymbol{y}(k)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k)$$

Sistem liniar monovariabil $\boldsymbol{x}(k)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-1)+\boldsymbol{b}u(k-1)$

$$y(k)=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k)\ ;\qquad y(k)=\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(k)+du(k)$$

Principiul liniarizării modelelor matematice



Liniarizarea unui model static neliniar

$$Дy = k\cdot Дu$$

$$k=\mathrm{tg}\alpha=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)_{\substack{u=\bar{u}\\ y=\bar{y}}}\equiv\overline{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}}$$

Modele intrare-ieşire de tip ecuaţie diferenţială (în diferenţe) pentru sisteme monovariabile

Sisteme cu timp continuu

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+a_0y=b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}u}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots+b_0u$$

Conditii initiale

$$y(0);\quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{t=0};\ldots;\quad \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)\Big|_{t=0}$$

Sisteme cu timp discret

$$y(k)+a_1y(k-1)+a_2y(k-2)+\ldots+a_ny(k-n)=b_1u(k-1)+\ldots+b_nu(k-n)$$

Conditii initiale

$$y(0),\ y(-1),\ldots,y(-n+1)$$

6. Funcția de transfer

Funcția de transfer este un model ***intrare-ieşire***, ***parametric***, în ***domeniul s*** (pentru sistemele cu timp continuu) sau în ***domeniul z*** (pentru sistemele cu timp discret).

6.1 Sisteme cu timp continuu

Se aplică transformata Laplace ecuației (40), considerând condițiile inițiale nule :

$$s^n Y(s) + a_{n-1}s^{n-1}Y(s) + \ldots + a_0 Y(s) = b_{n-1}s^{n-1}U(s) + \ldots + b_0 U(s) \tag{45}$$

Prin definiție,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \tag{46}$$

unde $Y(s)$ şi $U(s)$ sunt deduse în condiții inițiale nule. Din relațiile (45) şi (46) se obține

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} \tag{47}$$

Modelul (47) este definit de $2n$ parametri, ca şi ecuația diferențială (40): $a_i, b_i; i = \overline{0, n-1}$.

6.2 Sisteme cu timp discret

In mod similar, pentru un sistem cu timp discret, funcția de transfer este raportul transformatelor z ale variabilelor de ieşire şi de intrare, deduse în condiții inițiale nule :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} \tag{48}$$

Pornind de la ecuația în diferențe (43), prin aplicarea transformatei z în condiții inițiale nule, se obține:

$$Y(z) + a_1 z^{-1}Y(z) + a_2 z^{-2}Y(z) \ldots + a_n z^{-n}Y(z) = b_1 z^{-1}U(z) + b_2 z^{-2}U(z) \ldots + b_n z^{-n}U(z) \tag{49}$$

de unde rezultă :

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \ldots + b_n z^{-n}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_n z^{-n}} \tag{50}$$

sau, în raport cu variabila z, :

$$H(z) = \frac{b_1 z^{n-1} + b_2 z^{n-2} \ldots + b_{n-1} z + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z^{-1} + a_n} \tag{51}$$

Observații

1. In cazul sistemelor *la limită cauzale*, funcțiile de transfer (47) şi (50) vor conține la numărător şi termenii $b_n s^n$, respectiv, b_0 (în cazul formei (51) - termenul $b_0 z^n$).
2. Caracterul cauzal al unui sistem se remarcă uşor, după cum urmează. Dacă se notează cu n şi m gradele polinoamelor de la numitorul, respectiv numărătorul funcțiilor de transfer în s sau în z, se disting trei situații :

- $n<m$: sistemul este *necauzal* (strict necauzal), deci nerealizabil fizic;
- $n=m$: sistemul este *la limită cauzal*; în modelul de stare, ecuația de ieşire are matricea $\boldsymbol{D} \neq \mathbf{0}$;
- $n>m$: sistemul este est *cauzal* (strict cauzal); ecuația de ieşire din modelul de stare are $\boldsymbol{D} = \mathbf{0}$.

7. Distribuția poli-zerouri

Considerând că toți coeficienții din funcția de transfer (40) sunt nenuli, modelul intrare-ieşire al unui sistem cu timp continuu strict cauzal de ordinul n se pune sub forma:

$$H(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} = K \cdot \frac{s^{n-1} + b'_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b'_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0} = K \cdot \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{52}$$

unde $K = b_{n-1}$. Notând prin $z_i, i = \overline{1, n-1}$, zerourile şi prin $p_i, i = \overline{1, n}$, polii lui $H(s)$, modelul intrare-ieşire în domeniul s se poate exprima, până la constanta K, prin mulțimea polilor şi zerourilor sistemului. In mod similar, funcția de transfer a sistemului strict causal cu timp discret poate fi poate fi descrisă, până la o constantă, de distribuția poli-zerouri în planul z. Reprezentările prin distribuții poli-zerouri în planul s sau în planul z (fig. 4.25) presupune utilizarea funcțiilor de transfer de tipul :

$$H(s) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)}, \text{ respectiv } H(z) = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^{n-1}(z - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(z - p_i)} \tag{53}$$

în care cei $2n$ parametri ce definesc modelul sistemului strict cauzal sunt : $p_i, i = \overline{1, n}$, $z_i, i = \overline{1, n-1}$ şi K.

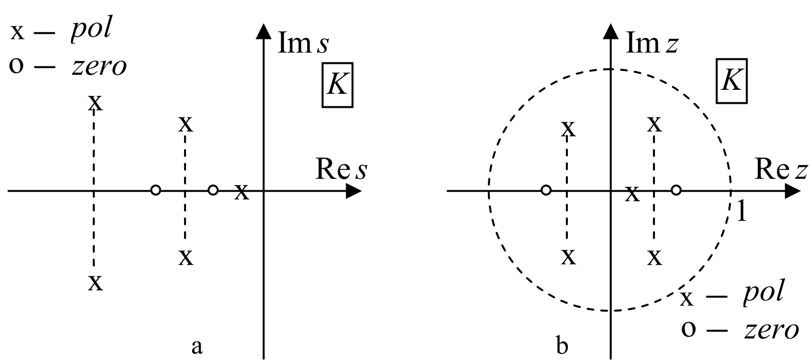


Fig. 6 Distribuția poli-zerouri pentru sisteme cu timp continuu (a) şi cu timp discret (b)

Comenzi Matlab pentru reprezentarea sistemelor prin funcții de transfer.
Funcția Matlab utilizată este `tf` :
`sys=tf(num,den)` – pentru sisteme cu timp continuu,

`sys=tf(num,den,Te)` – pentru sisteme cu timp discret, cu perioada de eşantionare `Te`. Dacă se pune `Te=-1`, perioada de eşantionare nu este definită (practic, se consideră `Te=1`).

Prin enunţul

```
[num,den]=tfdata(sys,'v')
```

se transferă în vectorii `num` şi `den`, coeficienţii polinoamelor de la numărător şi de la numitor, pentru funcţia de transfer a sistemului `sys`.

Exemplul 1:

```
num=[2 1];
den=[0.3 -1.1 1];
sys=tf(num,den,-1)
```

Rezultat :

$$\frac{2z + 1}{0.3z\hat{}2 - 1.1z + 1}$$

```
Sampling time: unspecified
```

Exemplul 2: Programul

```
num=5*[0.2 1];
den=conv([1 1.5 1],[0.25 2.3 1]);
sys=tf(num,den);
[n,d]=tfdata(sys,'v')
```

are rezultatele:

```
n =      0      0      0      1      5
d =    0.2500    2.6750    4.7000    3.8000    1.0000
```

Comenzi Matlab pentru reprezentarea sistemelor prin distribuţia poli zerouri.

Funcţia Matlab utilizată este `zpk`:

`sys=zpk(z,p,k)` – pentru sisteme cu timp continuu,

`sys=zpk(z,p,k,Te)` – – pentru sisteme cu timp discret, cu perioada de eşantionare `Te`. Dacă se pune `Te=-1`, perioada de eşantionare nu este definită (practic, se consideră `Te=1`).

Exemplul 3 Fie $K = 20; z_1 = -1; p_1 = -4; p_2 = -5$

```
%se generează sistemul cu funcţia zpk
     z=[-1]; p=[-4 -5]; sys=zpk(z,p,20)
```

Rezultat : `Zero/pole/gain:`

$$\frac{20(s + 1)}{(s + 4)(s + 5)}$$

```
% se converteşte modelul sys din forma zpk in forma
          sys1=tf(sys)
```

Rezultat : `Transfer function:`

$$\frac{20s + 20}{s\hat{}2 + 9s + 20}$$

Exemplul 4. Se consideră sistemul din exemplul 2. Se doreşte determinarea funcţiei de transfer sub forma zpk, afişarea parametrilor respectivi şi reprezentarea distribuţiei poli-zerouri. Se continuă programul din exemplul 2 cu:

```
sys=zpk(sys)
```

```
[z,p,k]=zpkdata(sys,'v')
pzmap(sys)
```
Rezultate:
```
            Zero/pole/gain:
             4 (s+5)
 ---------------------------------------
 (s+8.742) (s+0.4575) (s^2 + 1.5s + 1)

 z = -5
 p =   -8.7425
       -0.7500 + 0.6614i
       -0.7500 - 0.6614i
       -0.4575
 k =    4
```

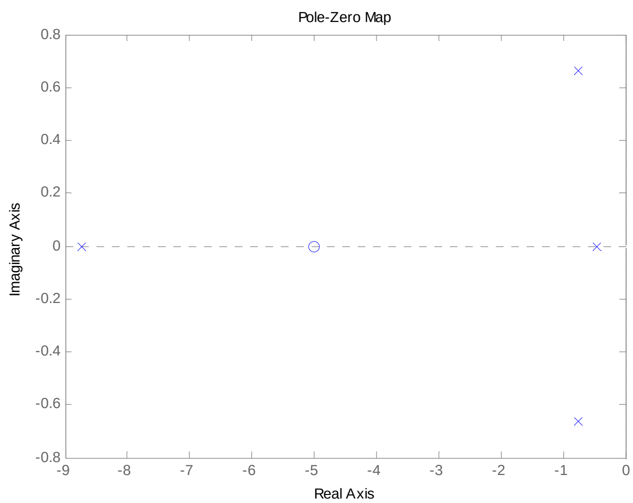


Fig. 7 Diagrama poli-zerouri

8. Reprezentarea modelelor prin scheme bloc

Structura unui sistem conține, de regulă, un ansamblu de elemente (subsisteme) conectate sau interconectate. Se pune problema deducerii modelului întregului sistem, pe baza cunoaşterii schemei de structură şi a modelelor elementelor componente. In general, problema pusă are rezolvări care depind de natura modelului utilizat. Ea va fi tratată, în cele ce urmează, pentru cazul particular, cel mai simplu, al sistemelor liniare monovariabile descrise prin funcții de transfer. In esență, este necesară cunoaşterea regulilor de simplificare a schemelor bloc, astfel încât să se determine funcția de transfer a întregului sistem, pe baza funcțiilor de transfer ale elementelor/subsistemelor componente. Regulile de tratare a schemelor bloc sunt aceleaşi pentru sistemele cu timp continuu şi cele cu timp discret, de aceea, în cele ce urmează se vor considera doar funcțiile de transfer în domeniul "*s*".

In schemele de strucură a sistemelor pot interveni:

- elemente/subsisteme descrise prin funcții de transfer date,
- elemente de însumare spre care converg două sau mai multe mărimi/semnale, iar la ieşire rezultă suma algebrică a intrărilor, cu semnul aferent intrării respective,

- noduri, reprezentând puncte din care mărimile/semnalele se ramifică spre alte elemente din sistem.

Conexiunile fundamentale ale elementelor, cu funcțiile de transfer echivalente, sunt prezentate în cele ce urmează.

1. ***Conexiunea serie*** (fig. 8)

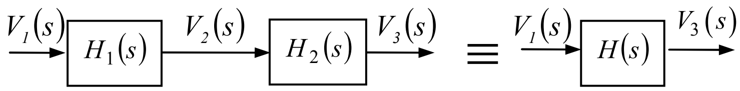


Fig. 8 **Conexiunea serie**

$$H(s)=H_1(s)\cdot H_2(s) \tag{54}$$

2. ***Conexiunea paralel*** (fig. 9) implică prezența unui element de însumare.

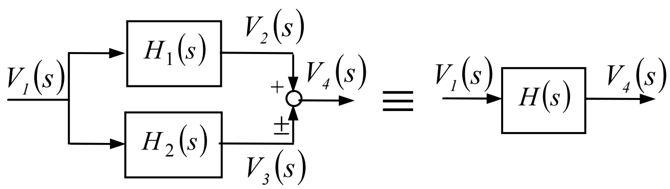


Fig. 9 **Conexiunea in paralel**

$$H(s)=H(s)\pm H(s) \tag{55}$$

3. ***Conexiunea cu reacție*** (***în buclă închisă***) este ilustrată în fig. 10, în care $H_d(s)$

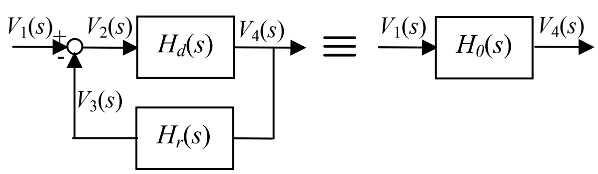


Fig. 10 Conexiune cu reacție (în buclă închisă)

este funcția de transfer a căii directe şi $H_r(s)$ este funcția de transfer a căii de reacție. La ieşirea căii directe se consideră un nod, din care $V_4(s)$ se ramifică spre ieşire şi la intrarea căii de reacție. Funcția de transfer a sistemului în buclă închisă rezultă de forma

$$H_0(s)=\frac{H_d(s)}{1+H_d(s)H_r(s)} \tag{56}$$

Considerând bucla deschisă la nivelul elementului de însumare, calea directă apare conectată în serie cu calea de reacție (fig. 11). Funcția de transfer a buclei deschise,

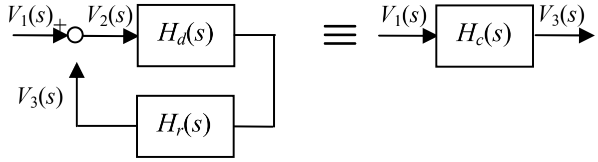


Fig. 11 Conexiunea în buclă deschisă

cu intrarea este $V_1(s)$ şi ieşirea $V_3(s)$, este:

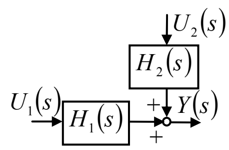
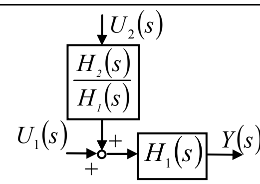
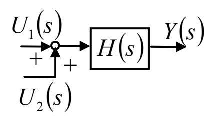
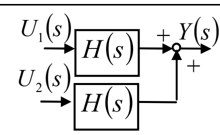
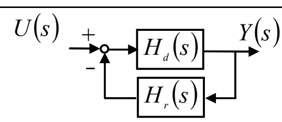
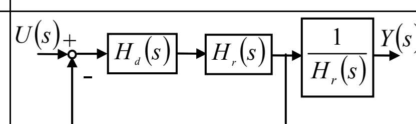
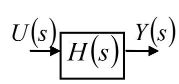
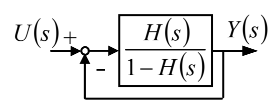
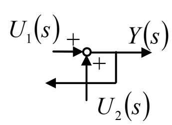
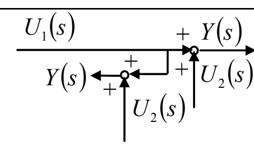
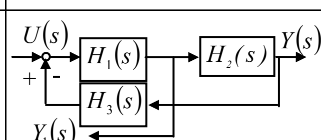
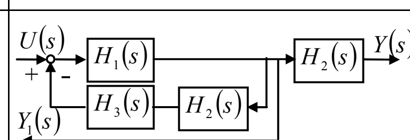
$$H_c(s) = H_d(s) H_r(s) \tag{57}$$

iar funcţia de transfer a buclei închise se poate scrie :

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1 + H_c(s)} \tag{58}$$

Schemele bloc pot fi transformate pe baza relaţiile fundamentale prezentate, dar şi prin utilizarea ecuaţiilor care derivă din stuctura conexiunilor implicate, rezultând diverse reguli de transformare a schemelor bloc. Câteva din acestea sunt sintetizate în Tabelul 1

Tabelul 1 Transformări ale schemelor bloc

Nr crt	Transformarea	Schema initială	Schema echivalentă
1.	Deplasarea unui element de însumare de la ieşirea unui element, la intrarea		
2.	Deplasarea unui element de însumare de la intrarea unui element, la ieşirea		
3.	Obţinerea unei bucle cu reacţie unitară		
4.	Inlocuirea unui element printr-o conexiune în buclă închisă		
5.	Deplasarea unui nod de la ieşirea unui element de		
6.	Eliminarea legăturilor încrucişate		

Observaţie Mediul Matlab®, pentru obţinerea funcţiilor de transfer la conexiunile serie şi derivaţie se utilizează operatorii *, respectiv + şi -, iar pentru conexiunea în circuit închis se apelează funcţia `feedback`, astfel: `sys0=feedback(sysd,sysr)`, în care `sys0`, `sysd` şi `sysr` definesc sistemul închis, respectiv calea directă şi calea de reacție.

Exemplu. Pentru sistemul din fig. 12 se deduc :

Funcția de transfer a căii directe şi a căii de reacție:

$$H_d(s) = (H_1(s)+1).H_2(s)\cdot\frac{H_3(s)}{1+H_3(s).H_4(s)}.H_5(s) = \frac{4(5s+1)}{5s(s+1)(10s+1)};\ H_r(s) = \frac{2,5}{0,5s+1}$$

Funcția de transfer a sistemului în buclă deschisă :

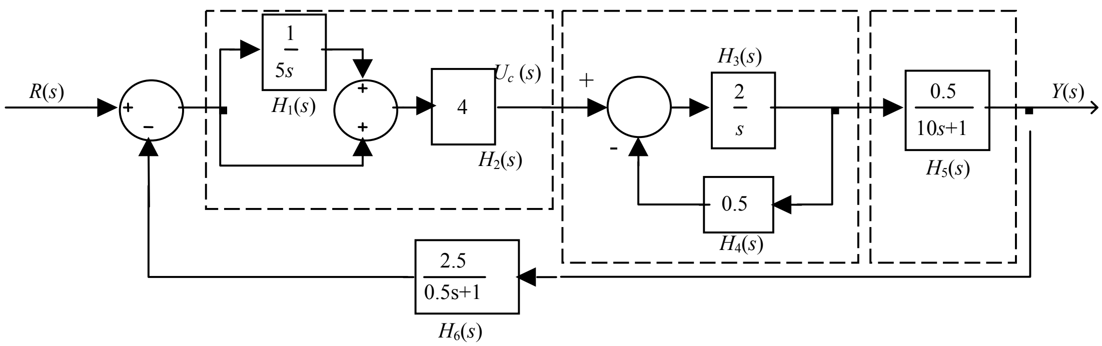


Fig. 12 Sistem– exemplu

$$H_c(s) = H_d(s)H_r(s) = \frac{10(5s+1)}{5s(s+1)(10s+1)(0,5s+1)}$$

Funcția de transfer a sistemului în buclă închisă:

$$H_o(s) = \frac{H_d(s)}{1+H_c(s)} = \frac{10s^2+22s+4}{25s^4+77,5s^3+57,5s^2+55s+10} \tag{59}$$

Calculul in Matlab® a funcției de transfer a sistemului, $H_0(s)$, se poate face prin enunțurile :

```
Hd=(tf(1,[5 0])+1)*4*feedback(tf(2,[1 0]),0.5)*tf(0.5,[10 1]);
Hr=tf(2.5,[0.5 1]);
H0=feedback(Hd,Hr)
```

rezultatul fiind:

```
         10 s^2 + 22 s + 4
-----------------------------------
25 s^4 + 77.5 s^3 + 57.5 s^2 + 55 s + 10
```

9. Răspunsul la impuls şi răspunsul indicial

9. 1. Sisteme cu timp continuu

Fie un sistem cauzal de ordinul n, având funcția de transfer $H(s)$. Prin definiție, transformatele Laplace ale variabilelor de intrare şi de ieşire, deduse în condiții inițiale nule, sunt legate prin relația

$$Y(s) = H(s)U(s) \tag{60}$$

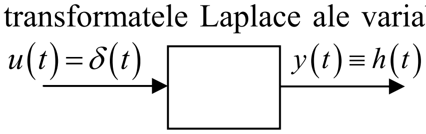


Fig. 13 Definirea răspunsului la impuls

Considerând **sistemul în condiții inițiale nule**, se vor analiza, consecutiv, răspunsurile sistemului la trei tipuri de semnale aplicate la intrare.

I. Cazul când la intrare se aplică un impuls unitar, $u(t) = \delta(t)$ (fig. 13). Intrucât $U(s) = \mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$, imaginea Laplace a răspunsului la impuls este $Y(s) = H(s)$, iar răspunsul la impuls se obține prin transformata Laplace inversă a funcției de transfer :

$$y(t) \equiv h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \tag{61}$$

Pentru deducerea expresiei analitice a răspunsului la impuls, $h(t)$, se va admite, pentru început, că funcția de transfer are poli distincți. În acest caz, $H(s)$ se poate pune sub forma:

$$H(s) = \sum_{k=1}^{n} \frac{r_k}{s - p_k} \tag{62}$$

în care p_k şi r_k sunt polii funcției de transfer şi reziduurile aferente. Răspunsul la impuls are expresia analitică :

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{r_k}{s - p_k}\right\} = \sum_{k=1}^{n} r_k \cdot \mathrm{e}^{p_k t} \tag{63}$$

fiind **definit prin 2*n* parametri, ca şi funcția de transfer** (47) (în funcția de transfer se consideră şi coeficienții nuli). ***Sub această formă, răspunsul la impuls se încadrează în clasa modelelor parametrice.***

Dacă între cei n poli simpli, există poli complecşi conjugați, de forma $p_{k,k+1} = \alpha_k \pm j\omega_k$, atunci reziduurile aferente vor fi complexe conjugate : $r_{k,k+1} = a_k \pm jb_k$, iar termenii aferenți din expresia (62) pot fi puşi sub forma :

$$\frac{r_k}{s - s_k} + \frac{r_{k+1}}{s - s_{k+1}} = \frac{A_k s + B_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k{}^2} \tag{64}$$

Polii $p_{k,k+1}$ introduc următoarea componentă în răspunsul la impuls :

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A_k s + B_k}{(s - \alpha_k)^2 + \omega_k{}^2}\right\} = D_k \cdot \mathrm{e}^{\alpha_k t} \cdot \sin(\omega_k t + \varphi_k) \tag{65}$$

în care

$$D_k = \frac{A_k}{\sin\varphi_k}; \varphi_k = \operatorname{arctg}\frac{\omega_k}{B_k / A_k - \alpha_k} \tag{66}$$

Răspunsul la impuls a cărei formă parametrică este dată de relația (63) este complet definită prin $2n$ parametri: $r_i, s_i, i = \overline{1,n}$. Acest model poate fi convertit conform metodologiei schematizate în graficul următor:

$$h(t) \underset{\mathrm{L}}{\overset{\mathrm{L}^{-1}}{\leftrightarrows}} H(s) \underset{\mathrm{L}^{-1}}{\overset{\mathrm{L}}{\leftrightarrows}} \begin{array}{l}\text{Ecuatie}\\ \text{diferentiala}\end{array}$$

Exemplul 1. Fie sistemul cu funcția de transfer

$$H(s) = \frac{2s+1}{s^3 + 2.5s^2 + 3s + 1}$$

Prin enunțul Matlab® `[r,p,k]=residue(num,den)`, rezultă polii funcției de transfer şi reziduurile aferente:

```
p =[-1.3761   -0.5620 + 1.0666i  -0.5620 - 1.0666i];
r =[-0.9732   0.4866 - 0.5661i    0.4866 + 0.5661i];
```

Intrucât polii sunt simpli, se poate utilize relația (63), chiar dacă există poli complecşi conjugați. In consecință, determinarea răspunsului la impuls se poate face prin următoarea secvență de program :

```
num=[2 1];den=[1 2.5 3 1];
[r,p,k]=residue(num,den);
n=3;t=0:0.01:10; h=zeros(1,length(t));
   for i=1:n
      h=h+r(i)*exp(p(i)*t);
   end;
   figure(1);plot(t,h);grid;title('raspuns
la impuls');
```

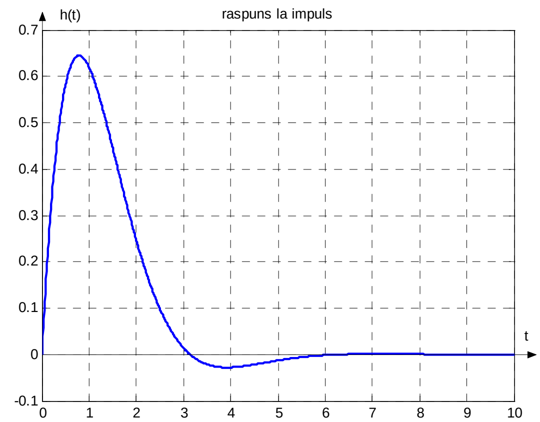


Fig. 14 rRspuns la impuls

Exemplul 2

Fie un sistem cu distribuția poli-zerouri:

```
p=[-0.5+i*0.8 -0.5-i*0.8 -1 -6 -10];
z=[-12 -2];k=12;
```

Se cere să se determine componentele răspunsului la impuls, având în vedere că polii sunt distincți.

```
clear all; close all;
n=5;p=[-0.5+i*0.8 -0.5-i*0.8 -1 -6 -10];
z=[-12 -2];k=12;
sys=zpk(z,p,k)
sys1=tf(sys)
figure(1);pzmap(sys);axis([-21 2 -1 1]);
[num,den]=tfdata(sys1,'v');
[r,p,k]=residue(num,den)
t=0:0.01:10;
figure(2);
h(4,:)=r(4)*exp(p(4)*t)+r(5)*exp(p(5)*t);
plot(t,h(4,:));grid
for i=1:3
     h(i,:)=r(i)*exp(p(i)*t);
     figure(i+2);
     plot(t,h(i,:));grid
end
ht=h(1,:)+h(2,:)+h(3,:)+h(4,:);
figure(6);
for i=1:4
     plot(t,h(i,:));hold on;
end
plot(t,ht,'k');grid;
ht1=h(3,:)+h(4,:);
plot(t,ht1,'r')
```

Distribuția poli-zerouri este dată în fig. 15. Se observă că 3 poli (p_3, p_4 şi p_5) sunt apropiați de axa imaginară, pe când polii p_1 şi p_2 sunt relative depărtați de axa imaginară.

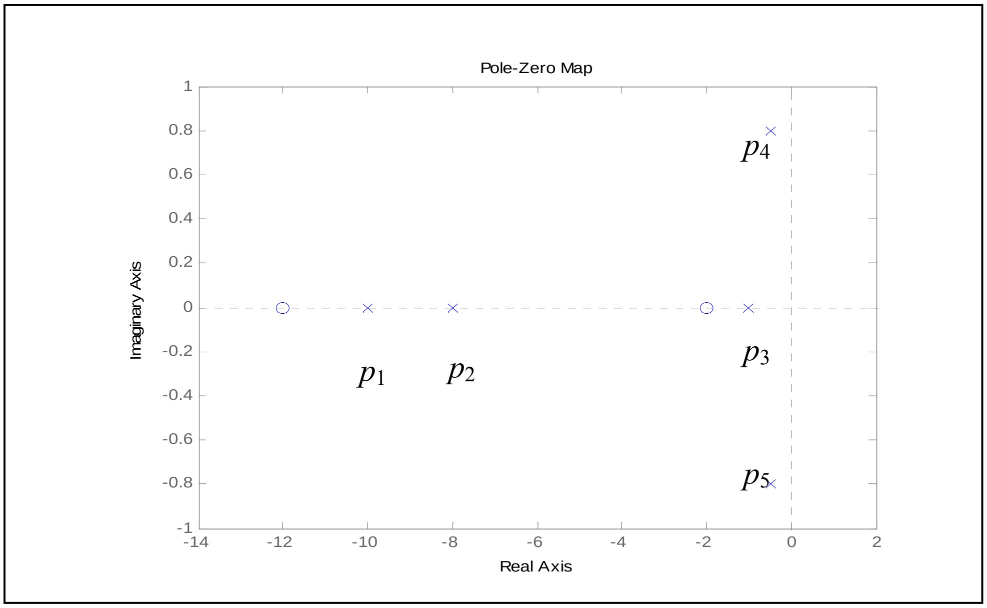


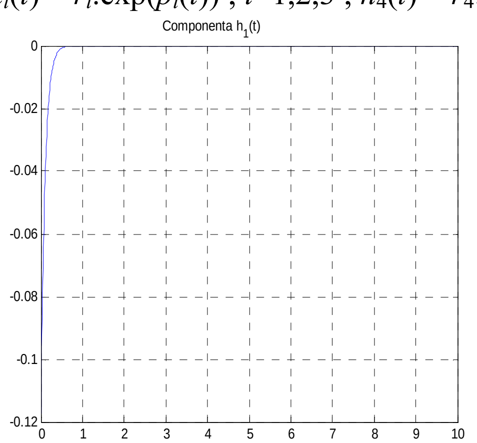
Fig. 15 Distribuția poli-zerouri

Funcțiile de transfer în formele `zpk` şi `tf` sunt

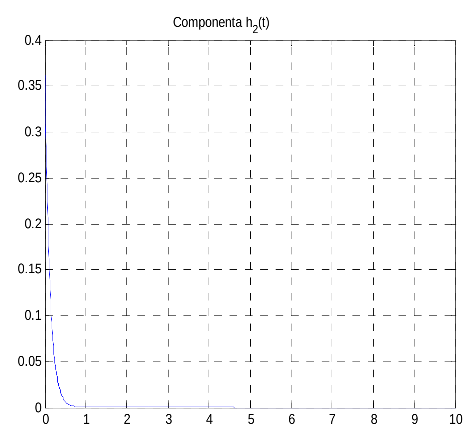
```
              Zero/pole/gain:
              12 (s+12) (s+2)
       ----------------------------------
       (s+1) (s+8) (s+10) (s^2  + s + 0.89)
             Transfer function:
             12 s^2 + 168 s + 288
--------------------------------------------------
s^5 + 20 s^4 + 117.9 s^3 + 194.9 s^2 + 167.2 s + 71.2
```

In cadrul programului se calculează coponentele răspunsului la impuls:

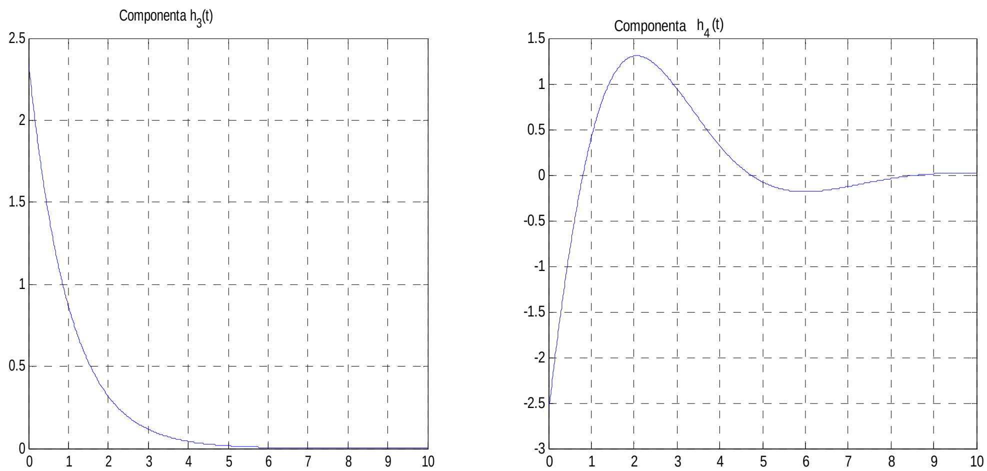
$h_i(t) = r_i.\exp(p_i(t))$; i=1,2,3 ; $h_4(t) = r_4.\exp(p_4(t)) + r_5.\exp(p_5(t))$. Aceste componente



a



b



c d

Fig. 16 Componentele răspunsului la impuls

sunt reprezentate în fig. 16.a...d. Se observă că primelor două componente, corespunzătoare polilor depărtați de axa imaginară, le corespund componente dinamice care se sting foarte repede (în cazul considerat, sub 1 s), pe când polului real p_3 şi perechii de poli complecşi conjugați (p_4 şi p_5) le corespund o componentă dinamică aperiodică (cu variație monotonă), şi, respectiv, o componentă cu variație oscilatorie amortizată. Acestea au durate mult mai mari dacât în cazul primilor 2 poli. Pentru comparare, în fig. 17 sunt date toate componentele $h_i(t)$, împreună cu întregul răspuns

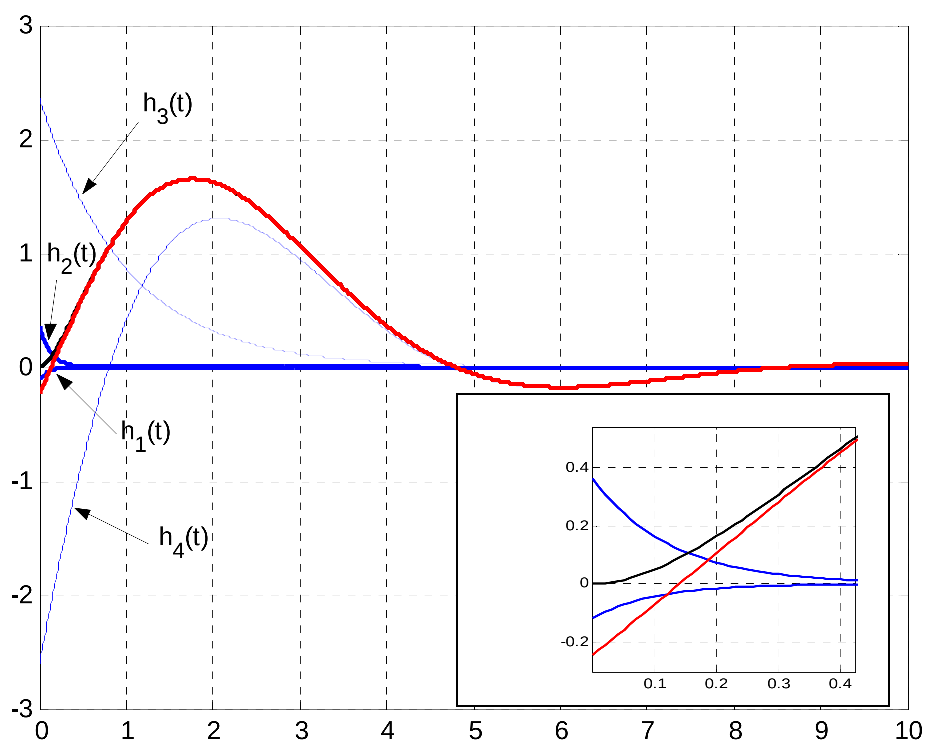


Fig. 17 Răspunsul la impuls complet (negru), aproximativ (roşu) şi componentele $h_i(t)$

la impuls, $h(t)$. Se observă că $h_1(t)$ şi $h_2(t)$ sunt mult mai mici decât $h_3(t)$ şi $h_4(t)$. Dacă se neglijează componentele $h_1(t)$ şi $h_2(t)$, răspunsul la impuls este cel reprezentat cu linie roşie în fig. 17. Se observă că, exceptând porțiunea inițială (prezentată sepatat în zoom) , răspunsul aproximativ coincide practic cu cel exact.

Concluzii

1. Importanța polilor unui sistem depinde de distanța lor față de axa imaginară. Cu cât această distanță este mai mare, cu atât componenta corespunzătoare din răspunsul la impuls se stinge mai repede, deci ponderea acestei componente este mai mică. Dacă această pondere este foarte redusă, componenta dinamică respectivă poate fi neglijată.
2. In cazul unui pol real, p_k, situat în semiplanul stâng al planului complex, mărimea:

$$T_k = \frac{1}{-p_k} \tag{67}$$

se numeşte **constantă de timp**. Este evident că polilor reali depărtați de axa imaginară le corespund constante de timp mici, la care componentele dinamice se sting rapid. Niglijarea polilor depărtați de axa imaginară este echivalentă cu neglijarea constantelor de timp mici din cadrul sistemului respectiv.

Se va admite acum că funcția de transfer are poli multipli. Dacă p_k este un pol cu ordin de multiplicitate m_k, atunci suma termenilor k, k+1,…,k+m_k-1 in (63) devine : $\sum_{j=1}^{m_k} \frac{r_{k,j}}{s-p_k}$, iar componenta aferentă din răspunsul la impuls este

$$L^{-1}\left\{\sum_{j=1}^{m_k} \frac{r_{k,j}}{s-p_k}\right\} = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{r_{k,j}}{(j-1)!} . t^{(j-1)} . e^{-p_k t} \tag{68}$$

II. Cazul când la intrare se aplică o traptă unitară, $u(t)=\sigma(t)$ (fig. 18). Deoarece

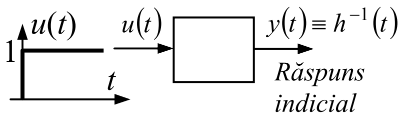


Fig. 18 Definiția răspunsului indicial

$$U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s}$$

rezultă că $Y(s) = H(s)/s$ iar răspunsul sistemului, numit *răspuns indicial*, se poate deduce analitic cu relația

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot H(s)\right\} \tag{69}$$

Intrucât factorul $1/s$ are semnificație operațională de integrare, rezultă relația dintre răspunsul indicial şi răspunsul la impuls:

$$y(t) \equiv h^{(-1)}(t) = \int_0^t h(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{70}$$

Ca şi răspunsul indicial dedus analitic din funcția de transfer, funcția indicială astfel definită este un model parametric. Acest model poate fi convertit conform metodologiei schematizate în graficul următor:

$$h^{(-1)}(t) \underset{\int(\cdot)\mathrm{d}t}{\overset{\mathrm{d}/\mathrm{d}t}{\rightleftarrows}} h(t) \underset{\mathcal{L}^{-1}}{\overset{\mathcal{L}}{\rightleftarrows}} H(s) \underset{\mathcal{L}}{\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\rightleftarrows}} \begin{array}{l}\textit{Ecuatie}\\ \textit{diferentiala}\end{array}$$

III. Cazul când la intrare se aplică un semnal oarecare, $u(t)$. Transformata Laplace a răspunsului este dată de relația generală $Y(s)=H(s)U(s)$ şi rezultă

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)U(s)\} \tag{71}$$

iar relația intrare-ieşire a sistemului este exprimată prin produsul de convoluție :

$$y(t)=h(t)*u(t) \tag{72}$$

Având în vedere că $h(t)$ şi $u(t)$ sunt egale cu zero pentru $t<0$, rezultă:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{0}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$y(t)=\int_{0}^{t} h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{73}$$