

## CURS 15

### 3.5 Echivalența diporturilor

Doi diporturi sunt echivalenți dacă au același model matematic, adică au aceeași matrice  $\mathbf{Z}$  (sau  $\mathbf{Y}$  sau  $\mathbf{A}$ , etc).

**Exemplu.** Fie diportul în T din fig. 48. Să se determine diportul în X (v. fig. 49.a), echivalent cu cel în T. De regulă, un diport echilibrat în X se desenează într-o formă

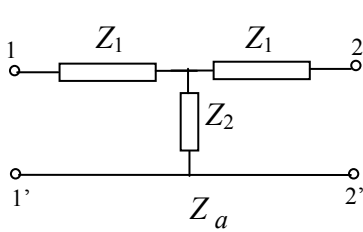


Fig. 48 Diport în T

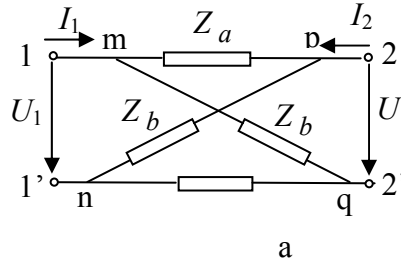
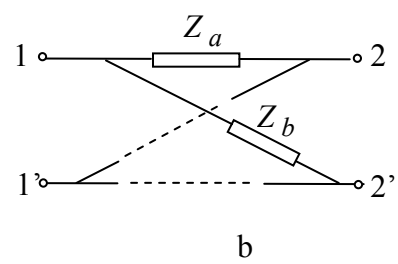


Fig. 49 Diportul în X



simplificată, ca în fig. 49.b.

Pentru diportul în T s-a dedus anterior (subcapitolul 3.2) matricea  $\mathbf{Z}$  sub forma:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} \quad (98)$$

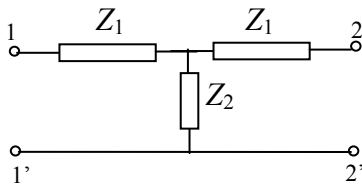


Fig. 38 Exemplul 1

Pentru deducerea *parametrilor de gol* (matricea  $\mathbf{Z}$ ) a diportului în X, se va redesena schema electrică a acestui diport sub forma din fig. 50. Impedanțele de intrare la poarta 1 sau 2, când poarta 2, respectiv 1 sunt în gol, sunt :

$$Z_{11} = \frac{1}{2}(Z_a + Z_b) ; Z_{22} = \frac{1}{2}(Z_a + Z_b) \quad (100)$$

Deci, diportul este simetric.

Pentru deducerea impedanței  $Z_{21}$ , se consideră că la poarta 1-1' este cuplată o sursă de curent  $I_1$ . Cele două ramuri din fig. 50, fiind identice, vor fi parcurse, fiecare, de câte un curent egal cu  $I_1/2$ . Tensiunea  $U_2$  este diferența căderilor de tensiune pe  $Z_b$  și  $Z_a$  :

$$U_2 = \frac{I_1}{2}(Z_b - Z_a) \quad (101)$$

Se obține :

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1} = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a) \quad (102)$$

Orice diport pasiv simetric este și reciproc. Deci  $Z_{12} = Z_{21}$ .

În concluzie, matricea  $\mathbf{Z}$  a diportului în X este

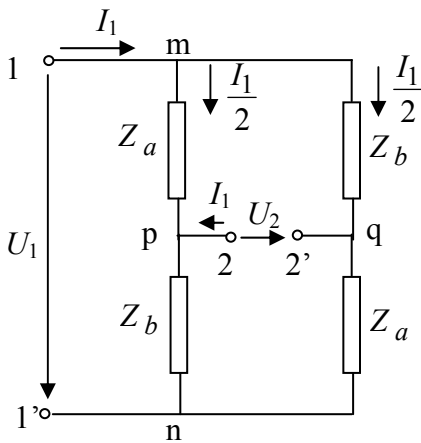


Fig. 50 Diportul în X redesenat

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Z_a + Z_b & Z_b - Z_a \\ Z_b - Z_a & Z_a + Z_b \end{bmatrix} \quad (103)$$

Din relațiile (98) și (103) rezultă relațiile de echivalență între dioprtii T și X:

$$Z_1 + Z_2 = \frac{1}{2}(Z_a + Z_b) \quad (104)$$

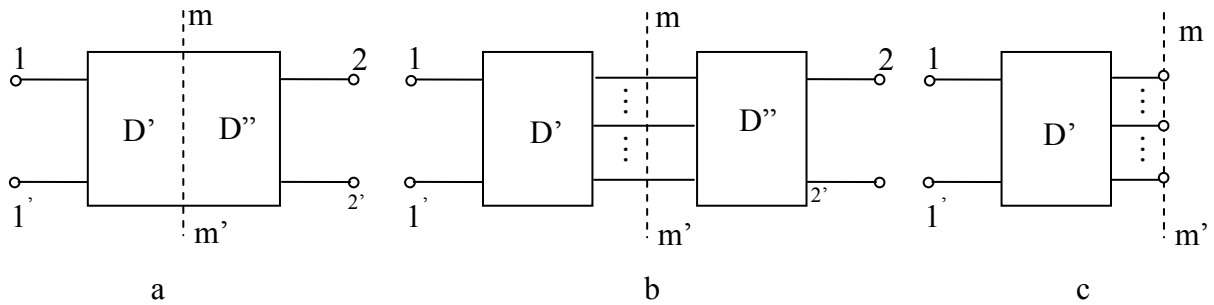
$$Z_2 = \frac{1}{2}(Z_b - Z_a) \quad (105)$$

Prin rezolvarea acestui sistem de ecuații, într-un sens sau altul, se poate trece de la un diport în T la un diport în X echivalent, sau invers.

**Observație** Chiar dacă dioprtii au aceleași proprietăți între porți, observăm că porțile diportului în T sunt formate dintr-o bornă „caldă” și una „rece”, pe când porțile diportului în X sunt formate din 2 borne „calde”.

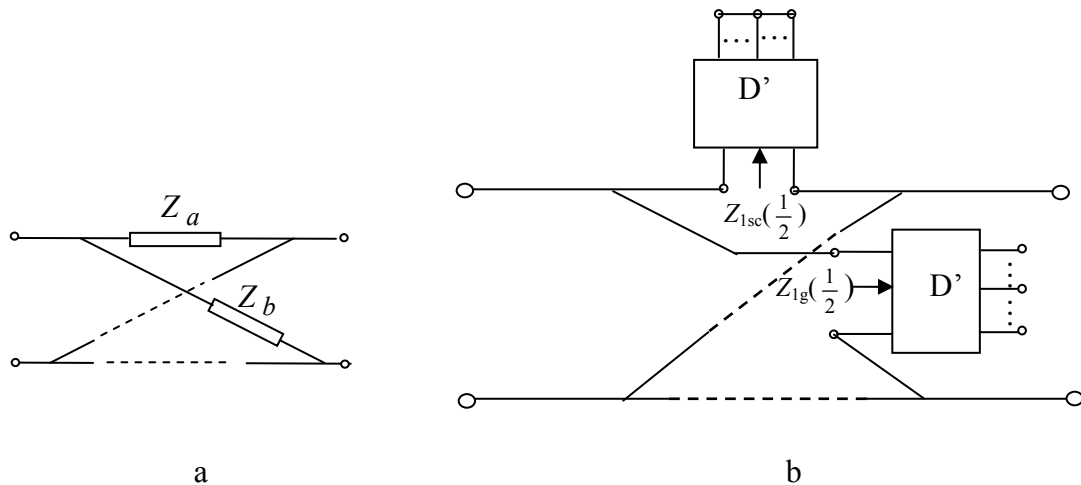
### 3.5 Teorema lui Bartlett

Prin intermediul teoremei lui Bartlett, numită și **teorema bisectionii**, se poate realiza corespondența între un diport **simetric** și un diport în X. Fie un diport simetric ce urmează a fi bisectat (divizat) după axa mediană verticală m-m' (fig. 51.a). Diportul se



**Fig. 51** Bisectarea unui diport: diportul inițial (a); separarea în semicelule (b); decuparea unei semicelule (c)

structurează în două semicelule identice, simetrice în raport cu axa mediană (fig. 51.b), după care se extrage o semicelulă, de exemplu, semicelula D' (fig. 51.c). In confo rmitate



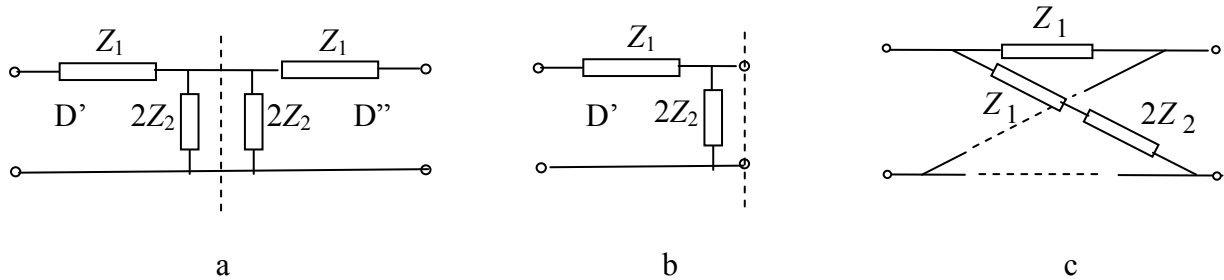
**Fig.52** Ilustrarea teoremei lui Bartlett

cu teorema lui Bartlett, diportul inițial, dat în fig. 51.a, poate fi prezentat sub forma unui diport echivalent în X, având impedanțele

$$Z_a = Z_{1sc(1/2)}; \quad Z_b = Z_{1g(1/2)}$$

în care  $Z_a = Z_{1sc(1/2)}$  și  $Z_{1g(1/2)}$  sunt impedanțele semicelulei D', văzute la poarta 1-1', atunci când poarta opusă (rezultată prin bisectare) este în scurtcircuit, respectiv în gol. În consecință, schema diportului în X echivalent este cea din fig. 52.b.

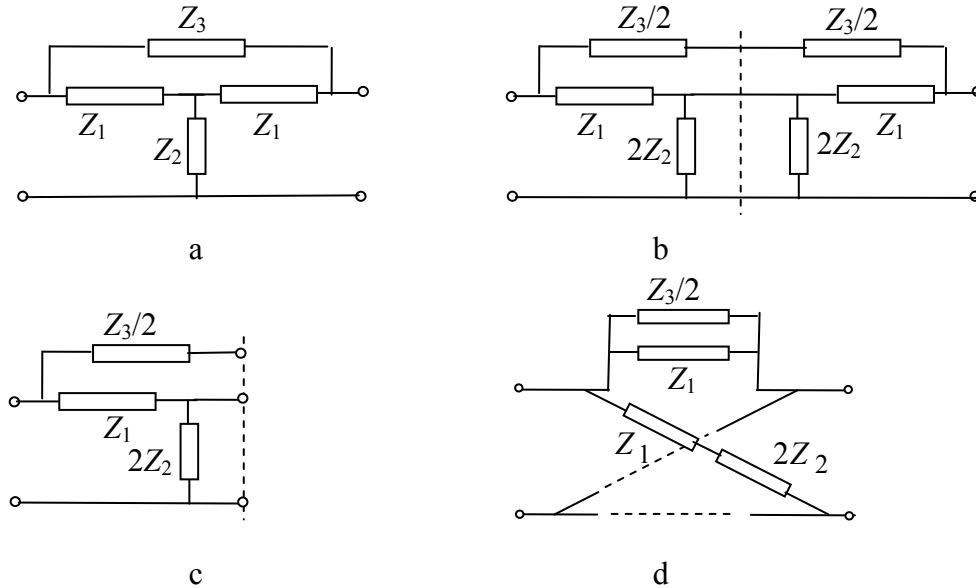
**Aplicație 1.** Să se transforme într-un diport în X diportul în T din fig. 38. Pentru bisectare, diportul se re-desenează ca în fig. 53.a, după care se decupează semicelula D' (fig. 53.b). Rezultă  $Z_{1sc(1/2)} = Z_1$  și  $Z_{1g(1/2)} = Z_1 + 2Z_2$ . Se obține schema în X din fig.



**Fig. 53** Transformarea unui diport în T prin teorema bisecțiunii

53.c. Același rezultat s-ar obține dacă sistemul de ecuații (105) și (105) s-ar rezolva în raport cu  $Z_a$  și  $Z_b$ .

2. Să se transforme într-un diport în X diportul în TP din fig. 54.a. Bisectarea



**Fig 54** Aplicarea teoremei bisecțiunii la un diport în TP

diportului în TP este ilustrată în fig. 54.b, de unde rezultă structura semicelulei din fig. 54.c. Se observă că  $Z_{1sc(1/2)}$  este impedanța echivalentă a impedanțelor  $Z_1$  și  $Z_3/2$  conectate în paralel, iar  $Z_{1g(1/2)} = Z_1 + 2Z_2$ . Schema diportului echivalent în X este dată în fig. 54.d.

### 3.6 Parametrii imagine ai unui diport

#### 3.6.1 Adaptarea la o poartă

Fie un uniport de impedanță  $Z_s$ , conectat la un generator de tensiune electromotoare  $E$  și impedanță internă  $Z_g$  (fig. 55). Impedanța  $Z_s$  este sarcina generatorului considerat. În conformitate cu **teorema transferului maxim de putere**, în sarcina  $Z_s$  se obține puterea maximă atunci când

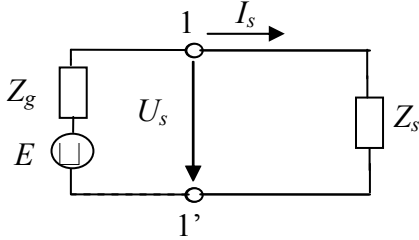


Fig.55 Uniport conectat la un generator

$$Z_s(j\omega) = Z_g(j\omega) \quad (106)$$

Această relație definește condiția de **adaptare la poarta 1-1'**: fiind dat generatorul, **sarcina este adaptată la generator** (deci, va primi puterea maximă) atunci când este îndeplinită condiția (106). Având în vedere faptul că:

$$Z_g(j\omega) = R_g(\omega) + jX_g(\omega) \quad (107)$$

$$Z_s(j\omega) = R_s(\omega) + jX_s(\omega) \quad (108)$$

condiția de adaptare constă, de fapt, în egalitatea a două funcții de frecvență:

$$R_s(\omega) = R_g(\omega) \quad (109)$$

$$X_s(\omega) = X_g(\omega)$$

ceea ce este dificil de îndeplinit. Dacă la unele frecvențe se îndeplinesc aceste condiții, iar la alte frecvențe nu, înseamnă că transferul semnalului de la generator la sarcină nu se realizează uniform la toate frecvențele, având drept consecință apariția *distorsiunilor de frecvență*.

În continuare, pentru simplificarea scrierii, se va renunța la precizarea argumentului  $j\omega$ , în cazul mărimilor electrice (de ex.,  $Z_s(j\omega)$  se va scrie, simplu,  $Z_s$ ).

**In condiții de adaptare**, curentul în circuit este

$$I_s \equiv I_0 = \frac{E}{2Z_g} \quad (110)$$

iar tensiunea la bornele sarcinii este

$$U_0 = Z_s I_0 = Z_g I_0 \quad (111)$$

În condiții de adaptare, puterea aparentă în sarcină este

$$S_0 \equiv P_{0a} = U_0 I_0 = \frac{E^2}{4Z_g} \quad (112)$$

**In condiții de neadaptare**, puterea aparentă în sarcină este

$$S_s \equiv P_{sa} = U_s I_s \quad (113)$$

unde

$$I_s = \frac{E}{Z_g + Z_s}; \quad U_s = Z_s I_s \quad (114)$$

deci,

$$S_s \equiv P_{sa} = \left[ \frac{E}{Z_g + Z_s} \right]^2 Z_s \quad (115)$$

Fie  $t$  **coeficientul de transmisie la poartă**, definit prin relația

$$t^2 = \frac{P_{sa}}{P_{0a}} = \frac{U_s I_s}{U_0 I_0} \quad (116)$$

Ținând cont de (112) și (115), se obține

$$t^2 = \frac{4Z_s Z_g}{(Z_s + Z_g)^2} \quad (117)$$

deci,

$$t = \frac{2\sqrt{Z_s Z_g}}{Z_s + Z_g} \quad (118)$$

Se definește, de asemenea, **coeficientul de neadaptare la poartă**,  $\rho$ , legat de coeficientul de transmisie la poartă, prin relația

$$\rho^2 = 1 - t^2 \quad (119)$$

Substituind  $t^2$  prin (117), se obține

$$\rho^2 = 1 - \frac{4Z_s Z_g}{(Z_g + Z_s)^2} = \frac{(Z_g - Z_s)^2}{(Z_g + Z_s)^2}$$

deci,

$$\rho = \frac{Z_g - Z_s}{Z_g + Z_s} \quad (120)$$

În cazul când există neadaptare la poartă, se definește **atenuarea de neadaptare** numită și **atenuare de reflexie**, dată de

$$a_r = 10 \lg \left( \frac{1}{t^2} \right) = 10 \lg \left| \frac{U_0 I_0}{U_s I_s} \right| [dB]; \quad a_r = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1}{t^2} \right) = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{U_0 I_0}{U_s I_s} \right| [Np] \quad (121)$$

unde  $[Np]$  înseamnă **neperi**. Ținând cont de expresia coeficientului de neadaptare la poartă (118), rezultă

$$a_r = 20 \lg \left| \frac{1}{t} \right| = 20 \lg \left| \frac{Z_s + Z_g}{2\sqrt{Z_s Z_g}} \right| [dB]; \quad a_r = \ln \left| \frac{1}{t} \right| = \ln \left| \frac{Z_s + Z_g}{2\sqrt{Z_s Z_g}} \right| [Np] \quad (122)$$

În condiții de adaptare,  $t = 1$ ,  $\rho = 0$ ,  $a_r = 0[dB] = 0[Np]$ .

În cazul simplu, când  $Z_g(j\omega) = R_g$  și  $Z_s(j\omega) = R_s$ , rezultă

$$t = \frac{2\sqrt{R_s R_g}}{R_s + R_g}; \quad \rho = \frac{R_g - R_s}{R_g + R_s}$$

### 3.6.2 Parametrii imagine

Parametrii imagine sunt definiți în situația ideală, când se realizează **adaptarea la ambele porți ale diportului**. Ei se referă la două aspecte:

1. caracterizarea porților, prin impedanțele imagine ;
2. transferul semnalului între porți, caracterizat prin exponentul de transfer.

#### I. Impedanțe imagine

Fie un diport care are conectat la poarta 1 un generator cu impedanța  $Z_g$ , iar la poarta 2 – o sarcină,  $Z_s$  (fig. 56). Impedanța imagine la poarta 1 este notată prin  $Z_{01}$ , iar

impedanța imagine la poarta 2 este notată prin  $Z_{02}$ . Dacă  $Z_g = Z_{01}$ , atunci este îndeplinită condiția de adaptare la poarta 1, iar dacă  $Z_s = Z_{02}$  - este îndeplinită condiția de adaptare la poarta 2. La bornele 1-1' și 2-2', impedanțele se “văd în oglindă”, fapt care se reflectă în denumirea lor.



Fig. 56 Diport adaptat pe imagini

Impedanța imagine  $Z_{01}$  este definită prin relația

$$Z_{01} = \frac{U_1}{I_1} \bigg|_{\frac{U_2}{-I_2} = Z_{02}} \quad (123)$$

și este ilustrată prin fig. 57.a. Impedanța imagine  $Z_{02}$ , ilustrată prin fig. 57.b, este

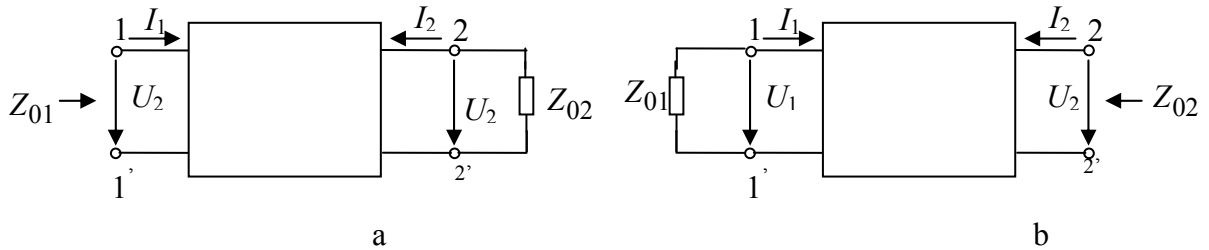


Fig. 57 Definirea impedanțelor imagine  $Z_{01}$  (a) și  $Z_{02}$  (b)

definită prin relația

$$Z_{02} = \frac{U_2}{I_2} \bigg|_{\frac{U_1}{-I_1} = Z_{01}} \quad (124)$$

Se constată că cele două impedanțe imagine se definesc în mod unitar, una cu ajutorul celeilalte. Ele depind strict de proprietățile intrinseci ale diportului.

Dacă diportul este simetric, atunci

$$Z_{01} = Z_{02} = Z_c \quad (125)$$

unde  $Z_c$  se numește **impedanță caracteristică**.

## II Exponentul de transfer

Se numește *funcție de transfer pe imagini* de la poarta 1 la poarta 2, radicalul raportului dintre puterile aparente la cele două porți :

$$\Gamma_{12} = \sqrt{\frac{P_{a1}}{P_{a2}}} = \sqrt{\frac{U_1 I_1}{-U_2 I_2}} \quad (126)$$

în care, în cazul general, mărimile din relația (126) se definesc în planul  $s$ . Noțiunea de funcție de transfer pe imagine se utilizează rar. În practică,  $\Gamma_{12}$  se pune sub forma

$$\Gamma_{12} = e^{g_{12}} \quad (127)$$

unde  $g_{12}$  se numește **exponent de transfer pe imagini** de la poarta 1 la poarta 2. Din relațiile (126) și (127) rezultă

$$g_{12} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_1 I_1}{-U_2 I_2} \quad (128)$$

În mod similar se definește exponentul de transfer pe imagini de la poarta 2 la poarta 1 :

$$g_{21} = \frac{1}{2} \ln \frac{U_2 I_2}{-U_1 I_1} \quad (129)$$

Dacă diportul este reciproc (ceea ce se întâmplă în marea majoritate a cazurilor),

$$g_{12} = g_{21} = g \quad (130)$$

Considerând sensul de propagare de la stânga la dreapta (fig. 52), se poate scrie

$$U_1 = Z_{01} I_1, \quad U_2 = -Z_{02} I_2 \quad (131)$$

astfel încât exponentul de transfer pe imagini este

$$g = \ln \frac{U_1}{U_2} \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} = \ln \frac{I_1}{-I_2} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \quad (132)$$

Dacă diportul este simetric,

$$g = \ln \frac{U_1}{U_2} \quad (133)$$

De regulă interesează analiza frecvențială a diportului, caz în care – pentru mărimile reprezentate în domeniul  $s$  – se face substituția  $s = j\omega$ . În acest caz,  $(U_1 I_1)$  și  $(-U_2 I_2)$  capătă semnificația unor puteri aparente, iar tensiunile  $U_1$  și  $U_2$  sunt reprezentări în complex, de forma :

$$\underline{U}_1(j\omega) = |U_1(j\omega)| e^{j\varphi_1(\omega)} = U_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}; \quad U_1(\omega) = |\underline{U}_1(\omega)| \quad (134)$$

$$\underline{U}_2(j\omega) = |U_2(j\omega)| e^{j\varphi_2(\omega)} = U_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}; \quad U_2(\omega) = |\underline{U}_2(\omega)| \quad (135)$$

și relația (133) se poate scrie astfel :

$$g(j\omega) = \ln \frac{\underline{U}_1(j\omega)}{\underline{U}_2(j\omega)} \quad (136)$$

Fiind o mărime complexă, exponentul de transfer pe imagini se scrie sub forma

$$g(j\omega) = \ln \frac{U_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)}}{U_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)}} = a(\omega) + jb(\omega) \quad (137)$$

unde :

$a(\omega)$  se numește **atenuare pe imagini** și se măsoară în Neperi [Np],

$$a(\omega) = \ln \frac{U_1(\omega)}{U_2(\omega)} \quad (138)$$

$b(\omega)$  este defazajul pe imagini,

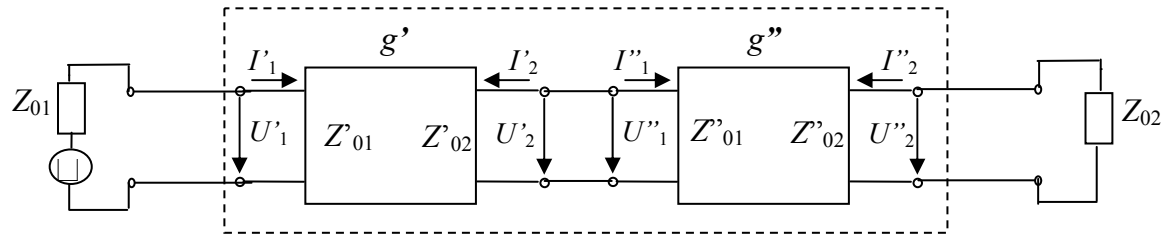
$$b(\omega) = \varphi_1(\omega) - \varphi_2(\omega) \quad (139)$$

**Observații.** 1. În teoria sistemelor, caracteristica de defazaj este  $\varphi(\omega) = \varphi_2(\omega) - \varphi_1(\omega)$ , deci  $b(\omega) = -\varphi(\omega)$ .

2. Atenuarea pe imagini se poate exprima și **în decibeli**, cu expresia cunoscută:  $a_{dB} = 20 \log(U_1 / U_2)$ . În raport cu amplificarea definită în teoria sistemelor, avem relația  $a_{dB} = -A_{dB}$ .

### 3.6.3 Lanțuri de diporți adaptați pe imagini

Fie doi diporți având parametrii imagine  $Z'_{01}, Z'_{02}, g'$  și, respectiv,  $Z''_{01}, Z''_{02}, g''$ , conectați în cascadă (fig. 58). Adaptarea pe imagini presupune îndeplinirea următoarelor



**Fig. 58** Lanț de diporți adaptați pe imagini

condiții:

$$Z_{01} = Z'_{01}; \quad Z'_{02} = Z''_{01}; \quad Z''_{02} = Z_{02} \quad (140)$$

Exponentul de transfer pe imagini pentru întregul lanț este

$$g = \frac{1}{2} \ln \frac{U'_1 I'_1}{(-U'_2 I'_2)} = \frac{1}{2} \ln \frac{U'_1 I'_1}{(-U'_2 I'_2)} \cdot \frac{U''_1 I''_1}{(-U''_2 I''_2)} \quad (141)$$

deoarece

$$U'_2 = U''_1; \quad I'_1 = -I''_2 \quad (142)$$

Din relația (141) se obține :

$$g = g' + g'' \quad (143)$$

deci

$$a(\omega) = a'(\omega) + a''(\omega); \quad b(\omega) = b'(\omega) + b''(\omega) \quad (144)$$

### 3.6.4 Calculul parametrilor imagine

Fiind dată schema detaliată a unui diport, se pune problema determinării parametrilor imagine ai diportului:  $Z_{01}, Z_{02}, g$ . Pentru atingerea acestui scop, este necesar să se stabilească legătura dintre parametrii imagine și parametrii fundamentali.

#### I. Relația dintre parametrii imagine și parametrii fundamentali

Fie

$$U_1 = A_{11}U_2 - A_{12}I_2 \quad (145)$$

$$I_1 = A_{21}U_2 - A_{22}I_2 \quad (146)$$

relațiile de definiție a parametrilor fundamentali. Impedanța imagine la poarta 1 este

$$Z_{01} = \frac{U_1}{I_1} \bigg|_{\substack{U_2=Z_{02} \\ -I_2}} = \frac{A_{11}U_2 - A_{12}I_2}{A_{21}U_2 - A_{22}I_2} \bigg|_{\substack{U_2=Z_{02} \\ -I_2}} = \frac{A_{11}Z_{02} + A_{12}}{A_{21}Z_{02} + A_{22}} \quad (147)$$



In mod similar se obține

$$Z_{02} = \frac{A_{22}Z_{01} + A_{12}}{A_{21}Z_{01} + A_{11}} \quad (148)$$

Din (147) și (148) rezultă relațiile :

$$A_{21}Z_{01}Z_{02} - A_{11}Z_{02} + A_{22}Z_{01} - A_{12} = 0 \quad (149)$$

$$A_{21}Z_{01}Z_{02} - A_{22}Z_{01} + A_{11}Z_{02} - A_{12} = 0 \quad (150)$$

Prin adunarea relațiilor (149) și (150) și prin scăderea lor rezultă

$$Z_{01}Z_{02} = \frac{A_{12}}{A_{21}} \quad (151)$$

respectiv,

$$\frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \frac{A_{22}}{A_{11}} \quad (152)$$

Făcând înmulțirea și împărțirea relațiilor (151) și (152) se obțin legăturile dintre impedanțele imagine și parametrii fundamentali :

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}; \quad Z_{02} = \sqrt{\frac{A_{22}A_{12}}{A_{11}A_{21}}} \quad (153)$$

In relația (132), adică

$$g = \ln \frac{I_1}{-I_2} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}, \quad (154)$$

se înlocuiește raportul  $I_1/(-I_2)$  prin expresia obținută din (146):

$$\frac{I_1}{-I_2} = A_{21} \frac{U_2}{-I_2} + A_{22} = A_{21}Z_{02} + A_{22} \quad (155)$$

Rezultă

$$g = \ln \frac{I_1}{-I_2} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = \ln \left[ (A_{21}Z_{02} + A_{22}) \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right] = \ln \left( A_{21} \sqrt{Z_{01}Z_{02}} + A_{22} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \right) \quad (156)$$

In continuare, se înlocuiesc aici  $Z_{01}Z_{02}$  și  $\frac{Z_{02}}{Z_{01}}$  cu expresiile (151), respectiv (152):

$$g = \ln \left( \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} \right) \quad (157)$$

Această relație se mai poate pune sub forma

$$e^g = \sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}} \quad (158)$$

Prin inversarea relației (158) obținem

$$e^{-g} = \frac{1}{\sqrt{A_{11}A_{22}} + \sqrt{A_{12}A_{21}}} = \frac{\sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}}}{A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}} = \sqrt{A_{11}A_{22}} - \sqrt{A_{12}A_{21}} \quad (159)$$

deoarece  $A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = \Delta A = 1$  la diportii reciproci.

Din relațiile (157) și (158) rezultă:

$$\sqrt{A_{11}A_{22}} = \text{ch}g; \quad \sqrt{A_{12}A_{21}} = \text{sh}g \quad (160)$$

iar din relațiile (153) rezultă

$$\frac{A_{12}}{A_{21}} = Z_{01}Z_{02}; \quad \frac{A_{11}}{A_{22}} = \frac{Z_{01}}{Z_{02}} \quad (161)$$

În sfârșit, din (160) și (161) obținem relațiile finale :

$$\begin{aligned} A_{11} &= \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \operatorname{ch} g; & A_{12} &= \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \operatorname{sh} g \\ A_{21} &= \frac{\operatorname{sh} g}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}}; & A_{22} &= \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \operatorname{ch} g \end{aligned} \quad (162)$$

Ecuatiile de lanț, în care parametrii fundamentali sunt exprimați prin paramerii imagine, sunt:

$$U_1 = U_2 \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \operatorname{ch} g - I_2 \sqrt{Z_{01}Z_{02}} \operatorname{sh} g \quad (163)$$

$$I_1 = U_2 \frac{\operatorname{sh} g}{\sqrt{Z_{01}Z_{02}}} - I_2 \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} \operatorname{ch} g \quad (164)$$

## II – Relațiile de calcul pentru parametrii imagine

Utilizând relațiile (163) și (164), se calculează impedanțele la poarta 1, când poarta 2 este în scurt, respectiv în gol:

$$Z_{1sc} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{U_2=0} = Z_{01} \operatorname{th} g; \quad Z_{1g} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = Z_{01} \operatorname{cth} g \quad (165)$$

În continuare, se calculează impedanțele la poarta 2, când poarta 1 este în scurt, respectiv în gol :

$$Z_{2sc} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{U_1=0} = Z_{02} \operatorname{th} g; \quad Z_{2g} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = Z_{02} \operatorname{cth} g \quad (166)$$

Din relațiile (165) și (166) rezultă relațiile de calcul pentru parametrii imagine ai unui diport reciproc :

$$Z_{01} = \sqrt{Z_{1sc}Z_{1g}}; \quad Z_{02} = \sqrt{Z_{2sc}Z_{2g}} \quad (167)$$

$$\operatorname{th} g = \sqrt{\frac{Z_{1sc}}{Z_{1g}}} = \sqrt{\frac{Z_{2sc}}{Z_{2g}}} \quad (168)$$

### Aplicații

**Aplicația 1** Pentru diportul din fig. 59, să se determine parametrii imagine. Se calculează :

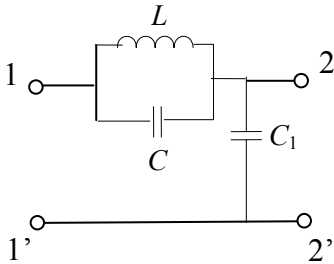


Fig. 59 Exemplu

$$Z_{1sc}(s) = \frac{Ls \frac{1}{Cs}}{Ls + \frac{1}{Cs}} = \frac{Ls}{1 + LCs^2}$$

$$Z_{1sc}(s) = \frac{Ls}{1 + LCs^2} + \frac{1}{C_1 s} = \frac{1 + L(C + C_1)s^2}{C_1 s(1 + LCs^2)}$$

$$Z_{2sc}(s) = \frac{Ls \frac{1}{(C+C_1)s}}{Ls + \frac{1}{(C+C_1)s}} = \frac{Ls}{1+L(C+C_1)s^2}; \quad Z_{2g}(s) = \frac{1}{C_1s}$$

Parametrii imagine sunt :

$$Z_{01}(s) = \sqrt{Z_{1sc}Z_{1g}} = \sqrt{\frac{L}{C_1} \frac{\sqrt{1+L(C+C_1)s^2}}{1+LCs^2}}; \quad Z_{02}(s) = \sqrt{Z_{2sc}Z_{2g}} = \sqrt{\frac{L}{C_1} \frac{1}{\sqrt{1+L(C+C_1)s^2}}}$$

$$\text{th } g(s) = \sqrt{\frac{Z_{1sc}}{Z_{1g}}} = \sqrt{\frac{Z_{2sc}}{Z_{2g}}} = \sqrt{\frac{LC_1s^2}{1+L(C+C_1)s^2}}$$

Punând  $s=j\omega$ , rezultă :

$$Z_{01}(j\omega) = \sqrt{\frac{L}{C_1} \frac{\sqrt{1-L(C+C_1)\omega^2}}{1-LC\omega^2}}; \quad Z_{02}(j\omega) = \sqrt{\frac{L}{C_1} \frac{1}{\sqrt{1-L(C+C_1)\omega^2}}}$$

$$\text{th } g(j\omega) = \sqrt{\frac{LC_1\omega^2}{L(C+C_1)\omega^2 - 1}}$$

## 2. Normalizarea valorilor parametrilor unui circuit electronic

În aplicațiile practice, valorile parametrilor de circuit sunt incomode pentru calculul numeric : rezistențele au valori de la zeci de ohmi la peste  $10^6$  ohmi ; inductivitățile sunt, de regulă, mici (de ex., de ordinul  $10^{-3}$  H), capacitățile se exprimă prin valori numerice foarte mici (de ex.,  $10^{-9}$  F), pulsațiile se exprimă prin valori foarte mari (de ex.,  $10^6$  rad/s). Firește, valorile indicate sunt orientative, gama de variație fiind foarte mare pentru toate mărimile fizice menționate. Pentru ușurarea calculelor numerice, se prefera normarea valorilor parametrilor de circuit, în așa fel, încât valorile normate să fie exprimate prin numere având același ordin de mărime. În scopul normării, se adoptă două valori de referință :

- **rezistența de referință**,  $R_0$ . Impedanțele se normează la această rezistență de referință :  $z = Z / R_0$  ;
- **pulsația de referință**,  $\omega_0$ . Pulsația normată este  $\omega^* = \omega / \omega_0$ .

Rezistența normată este  $r = R / R_0$ .

Fiind dată o inductivitate  $L$ , reactanța acesteia este  $\omega L$ , iar reactanța normată este  $\omega L / R_0$ . Pentru ca această expresie să conțină pulsația normată și inductivitatea normată, ea se transformă astfel :

$$\frac{\omega L}{R_0} = \frac{\omega}{\omega_0} \cdot \frac{\omega_0 L}{R_0} = \omega^* l$$

unde

$$l = \frac{\omega_0 L}{R_0}$$

este inductivitatea normată.

Pentru o capacitate, se procedează în același mod : reactanța normalată  $\left(\frac{1}{\omega C}\right)/R_0$  se scrie sub forma

$$\left(\frac{1}{\omega C}\right)/R_0 = \frac{\omega_0}{\omega \omega_0 C R_0} = \frac{1}{\omega^* \omega_0 C R_0} = \frac{1}{\omega^* c}$$

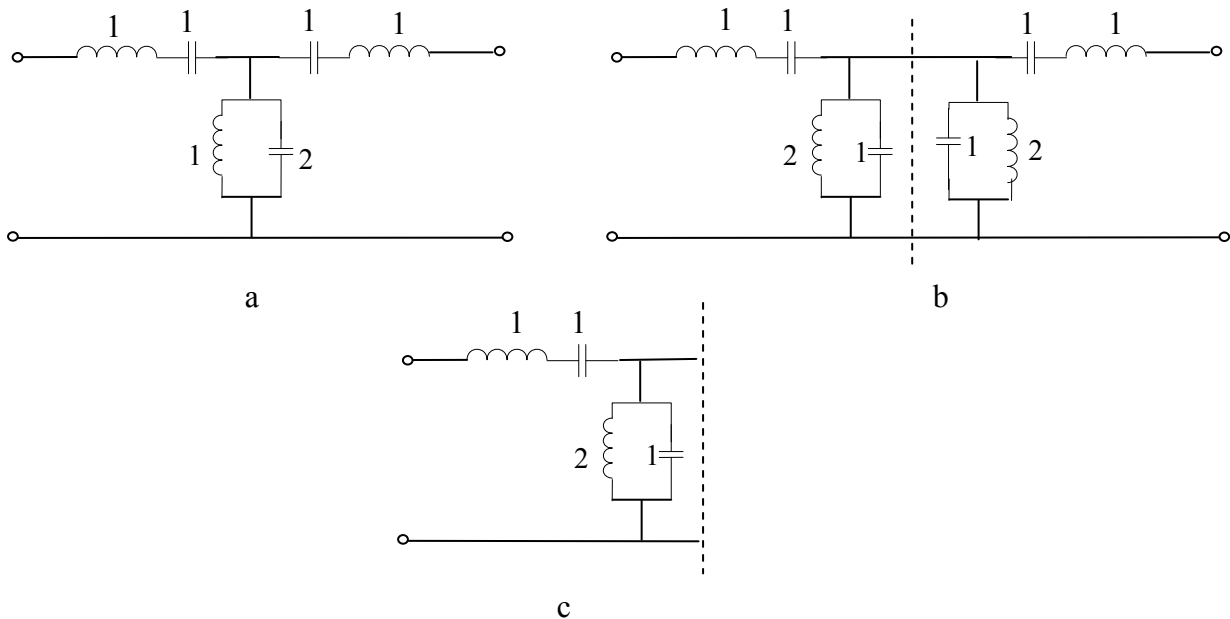
unde

$$c = \omega_0 C R_0$$

este capacitatea normalată.

*Exemplu* : Dacă se adoptă  $\omega_0 = 10^6$  rad/s și  $R_0 = 10^3 \Omega$ , atunci la o inductivitate  $L = 1$  mH, va corespunde o inductivitate normalată  $l = l = \omega_0 L / R_0 = 10^6 \cdot 10^{-3} / 10^3 = 1$ , iar unei capacități  $C = 1$  nF îi va corespunde capacitatea normalată  $c = \omega_0 C R_0 = 10^6 \cdot 10^{-9} \cdot 10^3 = 1$ .

**Aplicația 2** Să se determine parametrii imagine ai diportului din fig. 60.a. Se observă



**Fig 60** . Calculul parametrilor imagine prin bisectarea diportului simetric.

că parametrii circuitului sunt normați. Aplicarea directă a formulelor (167) și (168) implică un volum de calcul relativ mare, pentru determinarea impedanțelor de scurtcircuit. Având în vedere că diportul este simetric, se poate extrage prin bisectare o semicelulă, pentru care se calculează :

$$Z_{01} = Z_{02} = Z_c = \sqrt{Z_{sc(1/2)} Z_{g(1/2)}} \quad (169)$$

$$\text{th}\left(\frac{g}{2}\right) = \sqrt{\frac{Z_{sc(1/2)}}{Z_{g(1/2)}}} \quad (170)$$

În relația (170) se calculează  $\text{th}(g/2)$  deoarece pe o semicelulă, exponentul de transfer pe imagini este  $g/2$ . Realizând bisectarea dipolului (fig. 60.b) se obține semicelula din fig. 60.c, pentru care rezultă :

$$Z_{sc(1/2)} = s + \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 1}{s}; \quad Z_{g(1/2)} = \frac{s^2 + 1}{s} + \frac{2s \frac{1}{s}}{2s + \frac{1}{s}} = \frac{s^2 + 1}{s} + \frac{2s}{2s^2 + 1} = \frac{(s^2 + 1)(2s^2 + 1) + 2s^2}{s(2s^2 + 1)}$$

$$Z_c = \sqrt{Z_{sc(1/2)} Z_{g(1/2)}} = \frac{(s^2 + 1)}{s} \sqrt{\frac{(2s^2 + 1) + 2s^2(s^2 + 1)}{2s^2 + 1}}$$

$$\text{th}\left(\frac{g}{2}\right) = \sqrt{\frac{Z_{sc(1/2)}}{Z_{g(1/2)}}} = \sqrt{\frac{(s^2 + 1)(2s^2 + 1)}{(s^2 + 1)(2s^2 + 1) + 2s^2}}$$