

Curs 3

Recapitulare

5. Filtrul de ordinul unu.

Ecuția intrare-ieșire :

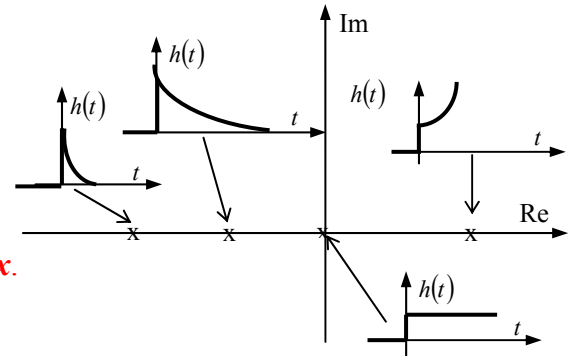
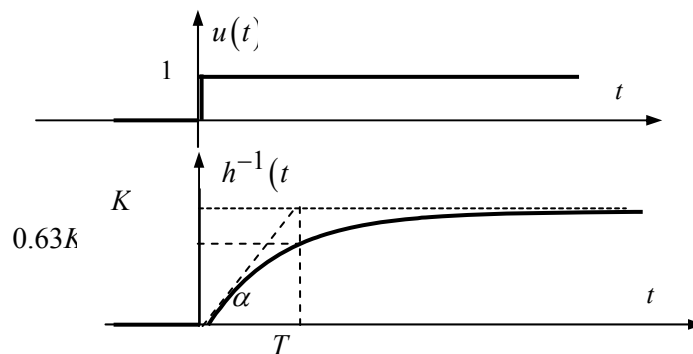
$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$$

Funcția de transfer este

$$H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

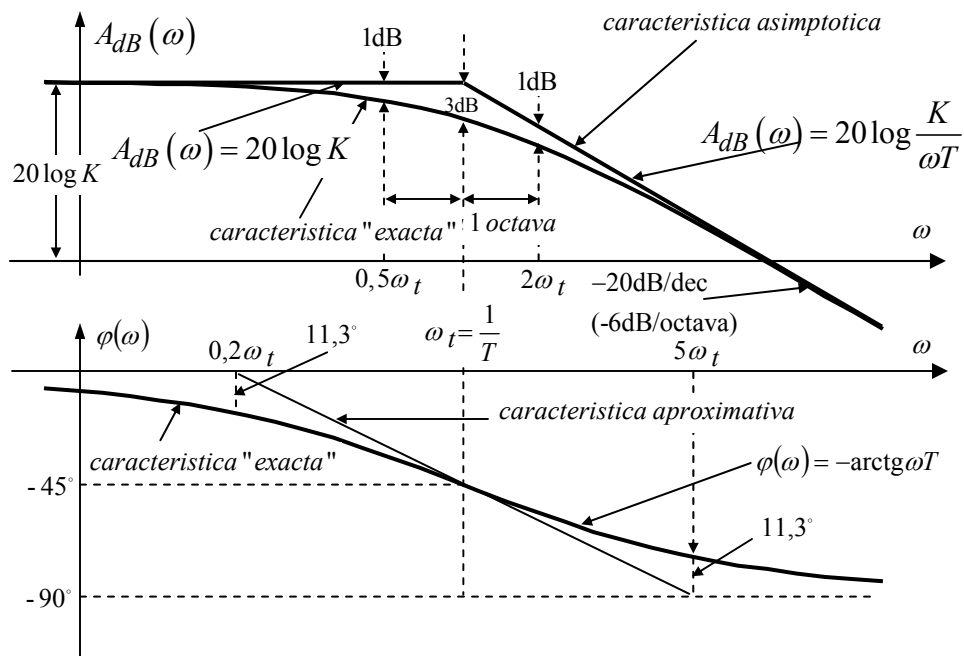
la care corespunde **polul $p = -1/T$ în planul complex.**

Răspunsul la semnal trapă



Forma răspunsului la impuls în funcție de poziția polului

Caracteristicile de frecvență



Caracteristicile Bode pentru un sistem de ordinul unu

5.2 Filtrul de ordinul 1 cu timp discret

Sistemul de ordinul unu cu timp discret are *ecuația intrare-ieșire*

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) \quad (48)$$

la care corespunde *funcția de transfer*

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{b_1}{z - a_1} \quad (49)$$

în care *polul* $z_p = a$ *se consideră a fi în cercul unitar din planul z .*

Pornind de la expresia răapunsului la frecvență,

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{b_1}{e^{j\omega T_e} - a_1} = \frac{b_1}{\cos(\omega T_e) + j\sin(\omega T_e) - a_1}, \quad (50)$$

se obțin caracteristicile de frecvență

$$A(\omega) = \frac{b_1}{\sqrt{(1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \omega T_e)}}; \quad (51)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{\sin \omega T_e}{\cos \omega T_e - a_1}$$

- Fie cazul când polul $z_p = a_1$ este situat în semicercul drept ($0 < a_1 < 1$). Caracteristica $A(\omega)$ (fig.18) are alura celei de la un filtru trece jos (amplificarea scade cu frecvența). Efectul de filtrare este cu atât mai puternic, cu cât parametrul a este mai apropiat de

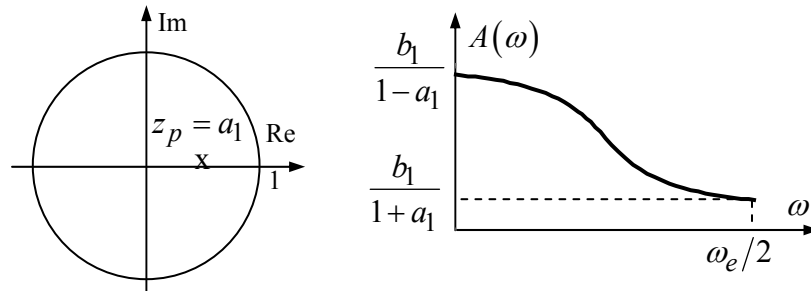


Fig. 18 Caracteristica sistemului pentru $z_p > 0$

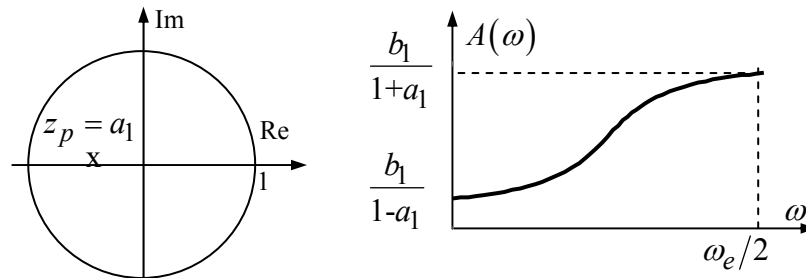


Fig. 19 Caracteristica sistemului pentru $z_p < 0$

valoarea unitară.

- Fie cazul când $z_p = a_1$ este situat în semicercul stâng ($-1 < a_1 < 0$). Caracteristica $A(\omega)$ (fig.19) are, în acest caz, alura celei de la un filtru trece sus (amplificarea crește cu frecvența).

Este importantă **relevarea proprietăților dinamice ale filtrului prin intermediul răspunsului sistemului, pentru diferite poziții ale polului în planul complex.**

Pentru aceasta vom considera că semnalul de intrare este nul în ecuația (48), $u(k-1) = 0$, iar **condiția inițială a sistemului este nenulă**, de exemplu $y(0) = 1$. Vom examina evoluția mărimii de ieșire, $y(k)$, sub acțiunea condiției inițiale nenule. Ecuația ieșirii sistemului este

$$y(k) = a \cdot y(k-1); \quad y(0) = 1; \quad k = 1, 2, \dots$$

Fie un pol aflat în semicercul drept, în apropierea cercului unitar, de exemplu: $a = 0.9$. Succesiunea valorilor mărimii de ieșire, $y(k)$, pentru $k=0, 1, 2, 3, \dots$, este:

$$1, 0.9, 0.81, 0.729, \dots$$

adică evoluția ieșirii este lentă, cu atât mai lentă, cu cât polul a este mai apropiat de cercul unitar (cazul polului 1 din fig. 20). Dacă a este mic (cazul polului 2 din fig. 20), de ex. $a = 0.1$, succesiunea valorilor mărimii de ieșire, $y(k)$, pentru $k=0, 1, 2, 3, \dots$, este:

$$1, 0.1, 0.01, 0.001, \dots$$

adică ieșirea filtrului se stinge foarte rapid.

Deci, atunci când polul este apropiat de cercul unitar, dinamica filtului este lentă (adică, proprietățile de filtrare sunt puternice) iar atunci când polul este apropiat de

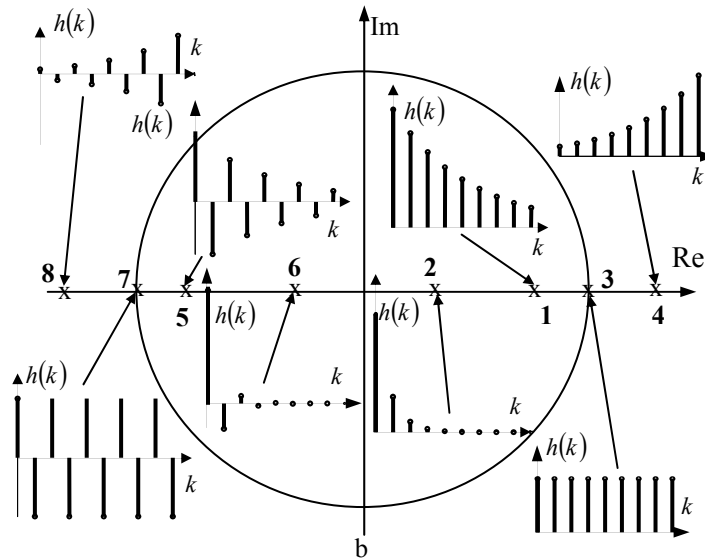


Fig.20 Răspunsul la impuls al unui sistem de ordinul unu cu timp discret, în funcție de poziția polului

origine, dinamica filtului este rapidă, (adică, proprietățile de filtrare sunt reduse). Dacă polul se află pe cercul unitar, $a = 1$, (polul 3 din fig. 20) răspunsul este o treptă unitară, filtrul fiind, de fapt, un integrator. Pentru $a > 1$ (polul 4 din fig. 20), ieșirea $y(k)$ crește nedefinit (de ex., pentru $a=2$, se obțin valorile: 1, 2, 4, 8,...), sistemul fiind instabil.

În mod similar se poate analiza răspunsul sistemului atunci când polul este situat în semiplanul stâng (polii 5,6,7 și 8). Se observă că atunci când polul este în cerul unitar

(polii 5 și 6), răspunsul $y(k)$ este oscilant. El se stinge cu atât mai rapid, cu cât polul este mai aproape de origine. Pentru $a = -1$ răspunsul este o oscilație permanentă $+1 \rightarrow -1 \rightarrow +1 \rightarrow \dots$, iar pentru $a < -1$, răspunsul tinde spre infinit prin oscilații crescătoare.

Observație. Se poate arăta (v. Cap.3) că răspunsul la impuls, $h(k)$, este similar ca evoluție cu răspunsul la condiția inițială nenulă, $y(k)$. Deci, toate evoluțiile ilustrate calitativ în fig. 20 se pot considera ca fiind ale răspunsului la impuls.

6. Filtrul de ordinul doi

Filtrul de ordinul doi se mai numește **sistem cu acțiune proporțională de ordinul doi sau element oscilant**.

6.1 Filtrul de ordinul 2 cu timp continuu

- **Ecuatia diferențială intrare – ieșire** este

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot u(t) \quad (52)$$

unde : K - coeficientul static de amplificare, T – constanta de timp și ξ - factorul de amortizare, a cărei valoare se consideră a fi **subunitară**.

- **Funcția de transfer** rezultă din ecuația diferențială (52) și se exprimă în două moduri :

$$H(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1} = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (53)$$

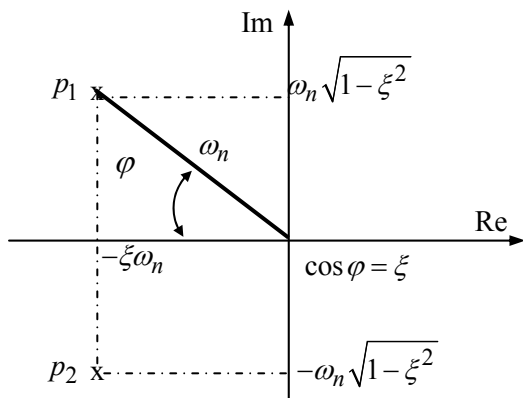


Fig. 21 Polii filtrului de ordinul 2

unde $\omega_n = \frac{1}{T}$ este **pulsăția naturală a sistemului**.

- **Polii sistemului** sunt (fig.21) :

$$p_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \quad (54)$$

Se constată că modulul polilor este egal cu pulsăția naturală ω_n , iar unghiul φ este cu atât mai mare, cu cât coeficientul de amortizare ξ este mai mic.

- **Răspunsul indicial** al filtrului este

$$h^{-1}(t) = K \left(1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \sin \left(\omega_n t \sqrt{1-\xi^2} + \varphi \right) \quad (55)$$

unde $\varphi = \arccos \xi$ (fig.4.90).

Forma răspunsului indicial pentru diferite valori ale coeficientului de amortizare este dată în fig. 22. Aici se pot distinge trei regimuri:

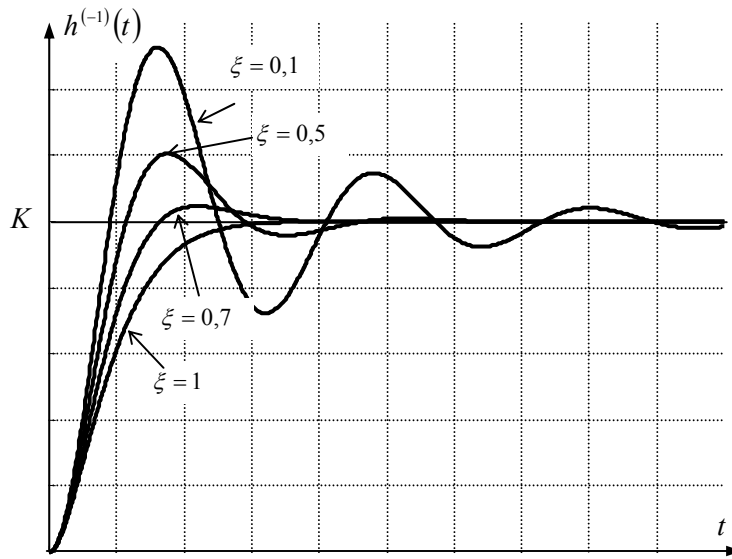


Fig. 22 Răspunsuri indiciale ale sistemului de ordinul doi, pentru diferite valori ale lui coeficientului de amortizare

- *regimul aperiodic*, pentru $\xi > 1$, când răspunsul are o evoluție monotonă;
- *regimul critic*, $\xi = 1$; alura răspunsului este similară celei din cazul anterior ;
- *regimul aferent situației* $\xi < 1$. Acest regim interesează efectiv, deoarece în cazurile anterioare sistemul de ordinul 2 se poate descompune în două sisteme de ordinul unu înseriate (trinomul de la numitorul funcției de transfer (53) se factorizează ca produs de două binoame).

Pentru cazul de interes, când $\xi < 1$, se pot distinge două situații:

a) $1 > \xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7$

caz în care răspunsul indicial are o depășire (suprareglare) diferită de zero, însă în ansamblu răspunsul este fără oscilații. Valoarea maximă a depășirii se obține la $\xi = 1/\sqrt{2} \approx 0,707$ și este $s = 0.043 K$ (sau 4,3%).

b) $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \cong 0,7$

caz în care răspunsul indicial are oscilații amortizate.

În fig. 23 este prezentat răspunsul indicial pentru un coeficient de amortizare $\xi < 1/\sqrt{2}$, care caracterizează așa numitul *regim pseudo-periodic*. Răspunsul evoluează între două curbe, 1 și 2, de ecuații

$$K \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \right) \quad \text{și} \quad K \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \right), \quad (56)$$

care sunt trasate cu linie întreruptă în fig. 23.

Pseudo-perioada oscilației amortizate este numită *perioadă proprie*, fiind dată de expresia:

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \quad (57)$$

unde $\omega_p = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ este *pulsăția proprie*. Când sistemul nu are amortizare ($\xi=0$), perioada oscilațiilor neamortizate ω_p este egală cu pulsăția naturală ω_n : $\omega_p = \omega_n$.

Depășirea s depinde numai de coeficientul de amortizare, fiind exprimată prin

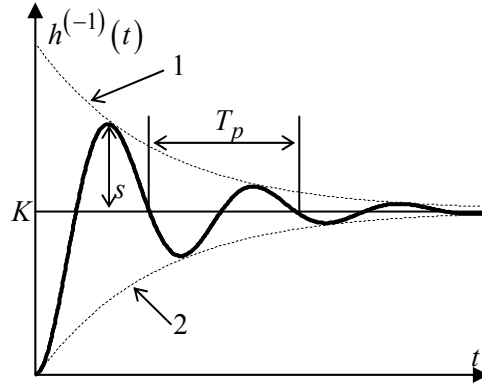


Fig. 23 Regimul pseudo-periodic

relația:

$$s[\%] = 100 \exp\left(-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \quad (58)$$

Durata regimului tranzitoriu, definită ca timpul necesar stabilizării la valoarea staționară, cu o toleranță de $\pm 5\%$, este

$$t_t = -\frac{1}{\xi\omega_n} \ln\left(0,05\sqrt{1-\xi^2}\right) \quad (59)$$

- **Răspunsul la frecvență** al filtrului este

$$H(j\omega) = K \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi\omega_n\omega} = K \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + 2j\xi \frac{\omega}{\omega_n}} \quad (60)$$

Pentru simplificarea scrierii, se va utiliza notația $v = \omega / \omega_n$ (v este pulsăția normată) și expresia răspunsului la frecvență devine:

$$H(j\omega) = K \frac{1}{1 - v^2 + 2j\xi v} \quad (61)$$

Caracteristica Nyquist este prezentată în fig.24. Pentru $\xi < 1/\sqrt{2} \cong 0,7$, amplificarea $A(\omega) = |H(j\omega)|$ trece printr-un maxim, care se obține la pulsația ω_r ,

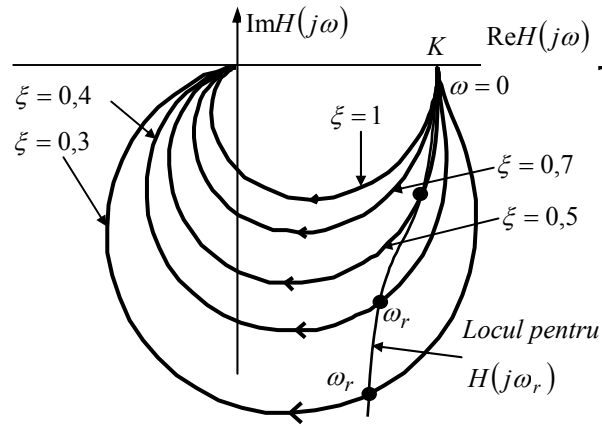


Fig. 24 Caracteristica Nyquist a sistemului de ordinul doi

numită pulsație de rezonanță. Această pulsație depinde de pulsația naturală și de coeficientul de amortizare ξ :

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad (62)$$

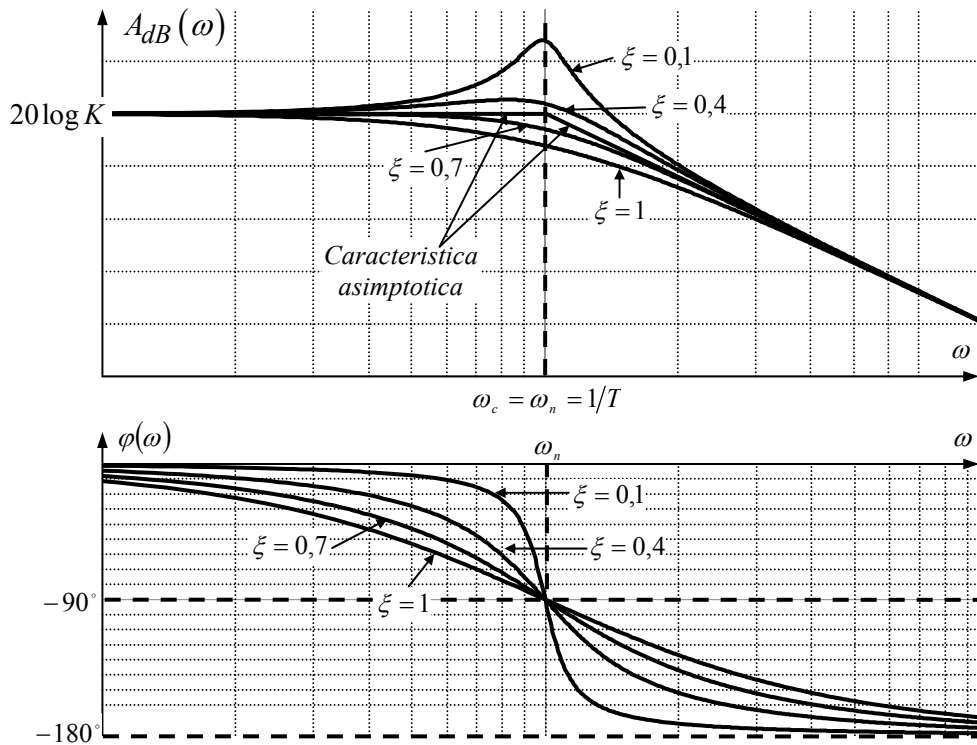


Fig. 25 Caracteristicile Bode ale sistemului de ordinul 2

Atunci când ξ descrește, pornind de la valoarea $1/\sqrt{2}$, se obține – pentru fiecare valoare a parametrului ξ - câte o valoare a pulsației de rezonanță, ω_r , la care corespunde

punctul de pe locul de transfer, corespunzător lui $H(j\omega_r)$. Locul geometric al vârfului vectorului $H(j\omega_r)$ în planul complex este indicat în Fig.24.

-. *Caracteristica Bode.* Din relația (60) se constată că :

1. pentru $\omega < \omega_n$, și deci la valori mici ale lui ν , răspunsul la frecvență este practic egal cu K . Amplificarea în dB se aproximează prin constanta $A_{dB}(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| \cong 20 \log K$, care determină o dreaptă orizontală ce reprezintă asimptota caracteristicii atunci când ω tinde spre zero ;

2. pentru $\omega > \omega_n$, deci la valori ridicate ale lui ν , răspunsul la frecvență se poate aproxima prin $H(j\omega) \cong \frac{K}{T^2(j\omega^2)} = -\frac{K}{(\omega/\omega_n)^2}$, adică răspunsul la frecvență al

unei conexiuni formate din două integratoare înseriate. Amplificarea în dB este aproximată de ecuația

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log K - 40 \log \frac{\omega}{\omega_n} = 20 \log K + 40 \log \omega_n - 40 \log \omega$$

care reprezintă o relație liniară în raport cu $\log \omega$. Rezultă că asimptota caracteristicii, atunci când ω tinde spre infinit, este o dreaptă cu panta de -40dB/dec .

Caracteristica asimptotică, definită prin cele două asimptote, are frecvența de frângere $\omega_f = \omega_n = 1/T$, unde $\nu = 1$. Figura. 25 prezintă caracteristicile Bode pentru diferite valori ale ξ . Caracteristica de amplificare $A_{dB}(\omega)$ prezintă un maxim atunci când $\xi < 1/\sqrt{2} \cong 0,7$, ceea ce semnifică existența **rezonanței**. Acest maxim este cu atât mai pronunțat, cu cât coeficientul de amortizare este mai mic.

Amplificarea la rezonanță are expresia

$$A(\omega_r) = A_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = K \cdot Q, \quad (63)$$

în care

$$Q = \frac{A(\omega_r)}{K} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (64)$$

se numește *factor de rezonanță*.

Caracteristica de fază

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\arctg \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (65)$$

depinde, de asemenea, de factorul de amortizare, așa cum se remarcă în fig.25.