

CURS 20

Proiectarea filtrului Cebâșev

Datele de proiectare sunt furnizate prin gabaritul filtrului. Acesta este definit de două pulsații, $\omega_e = \omega_t$ și ω_b , și de amplificările în dB respective: A_M , și A_m . Caracteristica de frecvență a filtrului trebuie să se „strecoare” prin canalul neînegrit din Fig. 12.

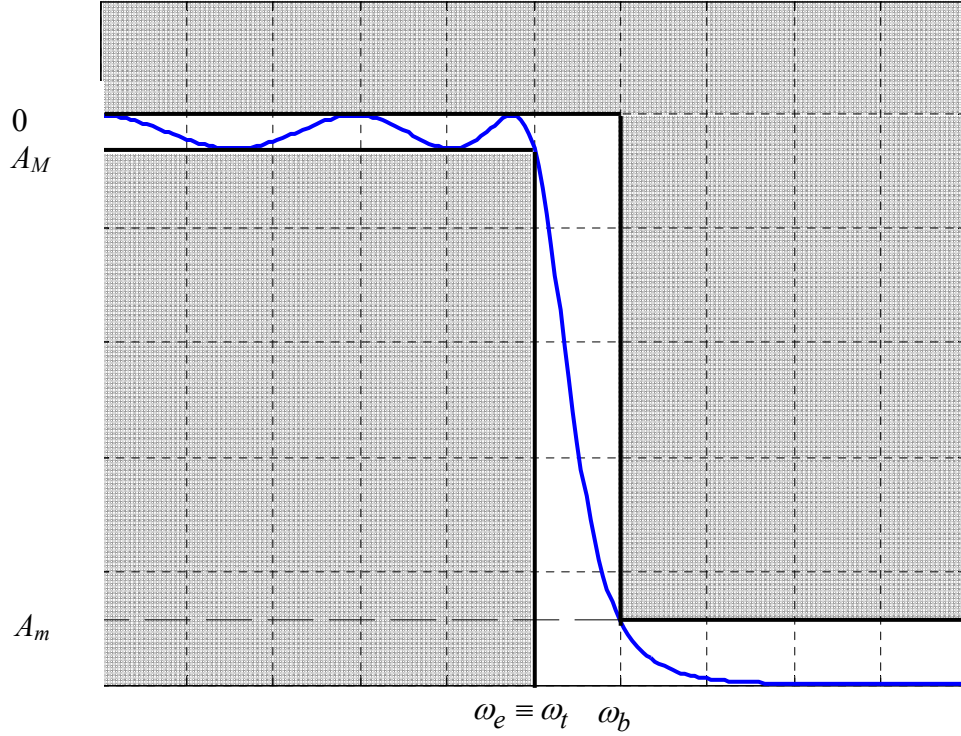


Fig. 12 Gabaritul impus la proiectarea filtrului Cebâșev

Pașii de proiectare a filtrului Cebâșev sunt următorii:

1. **Determinarea parametrului ε și a ordinului n al filtrului**, în funcție de cei 4 parametri de gabarit.

Amplificarea A_M se obține atunci când, în relația (43), funcția $C_n(\omega)$ are valoarea maximă, egală cu 1:

$$A_M = -10 \log(1 + \varepsilon^2) \quad (53)$$

de unde rezultă **prima relație de dimensionare** a filtrului:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{-A_M/10} - 1} \quad (54)$$

La pulsația ω_b se impune amplificarea $A_m = -10 \log \left[1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega_b) \right]$ sau

$$A_m = -10 \log \left[1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left(\frac{\omega_b}{\omega_t} \right) \right] = -10 \log \left[1 + \varepsilon^2 C_n^2 \left(\frac{\omega_b}{\omega_e} \right) \right] \quad (55)$$

deoarece $\omega_t = 1$ și $\omega_e = \omega_t$ (v. fig. 12). Din relația (55) rezultă:

$$C_n\left(\frac{\omega_b}{\omega_e}\right) = \sqrt{\frac{10^{-A_m/10} - 1}{\varepsilon}} \quad (56)$$

Inlocuind parametrul ε cu expresia (54), se obține

$$C_n\left(\frac{\omega_b}{\omega_e}\right) = \sqrt{\frac{10^{-A_m/10} - 1}{10^{-A_M/10} - 1}} \quad (57)$$

Utilizând notațiile:

$$k_f = \frac{\omega_b}{\omega_e} \quad ; \quad k_a = \sqrt{\frac{10^{-A_m/10} - 1}{10^{-A_M/10} - 1}} \quad (58)$$

rezultă ecuația

$$C_n(k_f) = k_a \quad (59)$$

care trebuie rezolvată în raport cu necunoscuta n (mărimile k_f și k_a se calculează pe baza parametrilor gabariturii). În conformitate cu relațiile (46) și (47) de definiție a polinomului Cebâșev (pentru cazul $\omega > 1$), ecuația (59) se poate scrie sub forma

$$\text{ch}(n\Phi) = k_a \quad (60)$$

unde

$$\text{ch}(\Phi) = k_f \quad (61)$$

Rezultă $\Phi = \arg \text{ch}(k_f)$; $n\Phi = \arg \text{ch}(k_a)$, de unde se obține

$$n \geq \frac{\arg \text{ch}(k_a)}{\arg \text{ch}(k_f)} \quad (62)$$

Aceasta este **cea de a doua relație de dimensionare** a filtrului Cebâșev, care furnizează ordinul filtrului (se ia valoarea întreaga cea mai apropiată a raportului din relația (62)).

2. Deducerea funcției de transfer a filtrului.

Filtrul Cebâșev de ordinul n are funcția de transfer de forma:

$$H(s) = \frac{1}{P_n(s)} = \frac{1}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n} \quad (63)$$

Deoarece $|H(j\omega)|^2 = H(s) \cdot H(-s) \Big|_{s^2 = -\omega^2}$, rezultă că polii funcției $H(s) \cdot H(-s)$ sunt zerourile polinomului $P_n(s)P_n(-s) = 1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega^2) \Big|_{\omega^2 = -s^2}$. Deducerea acestor zerouri implica rezolvarea unei ecuații de forma

$$C_n^2(\omega^2) \Big|_{\omega^2 = -s^2} = -\frac{1}{\varepsilon^2} \quad (64)$$

Se observă că $C_n(s)$ rezultă ca o funcție complexă

$$C_n(s) = \pm j \frac{1}{\varepsilon} \quad (65)$$

deci rezultă că și variabila Φ din relațiile (46) și (47) este complexă, de forma $\Phi = \Phi_r + j\Phi_i$.

Scriind ecuația (65) sub forma

$$\cos n(\Phi_r + j\Phi_i) = \pm j \frac{1}{\varepsilon} \quad (66)$$

sau

$$\cos(n\Phi_r) \cdot \text{ch}(n\Phi_i) + j \sin(n\Phi_r) \cdot \text{sh}(n\Phi_i) = \pm j \frac{1}{\varepsilon} \quad (67)$$

se constată că partea reală este zero, deci avem:

$$\cos(n\Phi_r) \cdot \text{ch}(n\Phi_i) = 0 \quad (68)$$

Întrucât cosinusul hiperbolic nu poate fi nul, rezultă $\cos(n\Phi_r) = 0$, de unde se obține:

$$\Phi_r = \frac{2k+1}{2n} \pi \quad (69)$$

De asemenea, din relația (67) rezultă: $\sin(n\Phi_r) \cdot \text{sh}(n\Phi_i) = \pm \frac{1}{\varepsilon}$, adică $\text{sh}(n\Phi_i) = \pm \frac{1}{\varepsilon}$, deoarece $\sin(n\Phi_r) = 1$. Ecuația obținută se scrie

$$\frac{e^{n\Phi_i} - e^{-n\Phi_i}}{2} = \pm \frac{1}{\varepsilon} \quad (70)$$

Rezolvarea acestei ecuații în raport cu Φ_i ne conduce la expresia

$$\Phi_i = \frac{1}{n} \ln \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (71)$$

Conform relației (14), pentru banda de trecere avem $\Phi = \arccos \omega$, deci $\cos(\Phi) = \omega$. Prin substituția $j\omega = s$, se obține $j \cos(\Phi) = s$, în care $\cos \Phi = \cos(\Phi_r + j\Phi_i)$, iar $s = \sigma + j\omega$.

Dezvoltând relația $j \cos(\Phi) = s$, rezultă:

$$-\sin(\Phi_r) \cdot \text{sh}(\Phi_i) + j \cos(\Phi_r) \cdot \text{ch}(\Phi_i) = \sigma + j\omega \quad (72)$$

Înlocuind în această relație pe Φ_r prin expresia (69), se obțin rădăcinile ecuației (64), adică polii funcției $H(s) \cdot H(-s)$:

$$\begin{cases} \sigma_k = -\text{sh}(\Phi_i) \cdot \sin\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \\ \omega_k = \text{ch}(\Phi_i) \cdot \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \end{cases} ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1 \quad (73)$$

în care Φ_i este dat de relația (71).

Constelația polilor funcției $H(s) \cdot H(-s)$ se află pe o elipsă, având semiaxele egale cu $\text{sh}(\Phi_i)$, respectiv $\text{ch}(\Phi_i)$. Ecuația elipsei este:

$$\frac{\sigma_k^2}{\text{sh}^2 \Phi_i} + \frac{\omega_k^2}{\text{ch}^2 \Phi_i} = 1 \quad (74)$$

În fig. 5 este ilustrată calitativ constelația polilor pentru $n=3$.

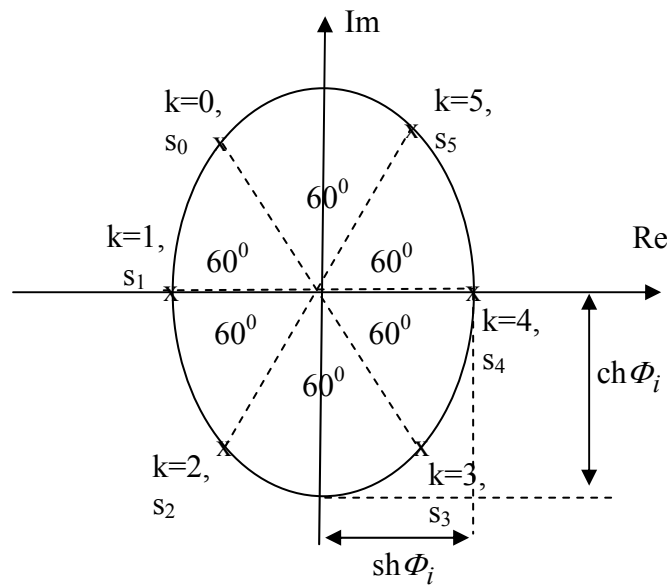


Fig. 13 Constelația polilor funcției $H(s)H(-s)$ pentru $n=3$

Ceilalți pași de proiectare, adică: 3) **ajustarea parametrilor funcției de transfer, astfel încât să se obțină pulsația de tăiere ω_t impusă în aplicație**; 4) **discretizarea funcției de transfer**, se realizează în același mod ca la filtrul Butterworth.

Aplicație Să se realizeze programul Matlab prin care se sintetizează un filtru Cebâșev 1, de un ordin oarecare, n și cu parametrul ε oarecare. Să se obțină filtrul de ordinul $n = 4$, cu $\varepsilon = 0.2$ și cu pulsația de tăiere $\omega_t = 100 \text{ s}^{-1}$, precum și varianta discretizată, cu perioada de eșantionare $T_e = 0.001 \text{ s}$.

Programului Matlab este:

```
clear all; close all;
% ordinul filtrului
n=4;
% pulsatiia reala din aplicatie si parametrul ε
wt=100;eps=0.2;
% calculul constelatiei polilor
fi2=log(sqrt(1/eps^2+1)+1/eps)/n;
for k=1:n,
    re(k)=-sinh(fi2)*sin((2*(k-1)+1)/(2*n)*pi);
    imag(k)=cosh(fi2)*cos((2*(k-1)+1)/(2*n)*pi);
    s(k)=re(k)+i*imag(k);
end;
% eliminarea partii reziduale imaginare (rezultate din erorile
% de rotunjire) a polilor reali
s=1e6*s;s=round(s);s=s/1e6;
% definirea functiei de transfer a filtrului cu pulsatie de
% taiere unitara si trasarea caracteristicii Bode
k=abs(real(prod(s(1:n)))));
sys=zpk([],s,k);
sys=tf(sys)
[m,p,w]=bode(sys);
mdb=20*log10(m(1,:));
figure(1)
```

```

semilogx(w,mdb);hold on;axis([0.01 1000 -160 10]);
    % ajustarea parametrilor functiei de transfer, pentru obtinerea
    % pulsatiei de taiere din aplicatie
[num,den]=tfdata(sys,'v');
for i=1:n,
    a1=1/wt^(n-i+1);
    den1(i)=den(i)*a1;
end;
den1(n+1)=den(n+1);
sys1=tf(num,den1)
    % trasarea caracteristicii Bode
w=0.1:0.1:10000;
[m,p]=bode(sys1,w);
mdb=20*log10(m(1,:));
semilogx(w1,mdb);grid;hold off;
    % deducerea functiilor indiciale
figure(2);
t=[0:0.01:30];
y=step(sys,t);
y1=step(sys1,t);
figure(3);
plot(t,y);grid; hold on;plot(t,y1);
    % discretizarea functiei de transfer si trasarea caracteristicii
    %Bode
sys1d=c2d(sys1,0.001,'tustin');
figure(4);
[m1d,p1d,wd]=bode(sys1d);
m1ddb=20*log10(m1d(1,:));
semilogx(wd,m1ddb);grid;axis([1e-2 1e4 -160 20]);

```

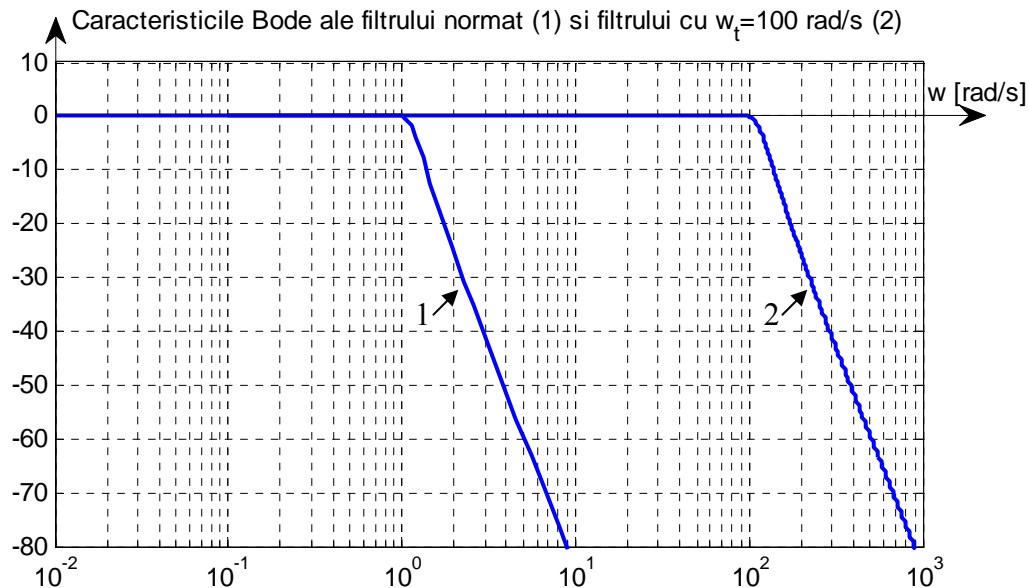


Fig. 14. Caracteristicile Bode pentru FTJ Cebășev 1 normal (1) și pentru FTJ cu frecvența de tăiere $\omega_t = 100$ rad/s (2)

Principalele rezultate obținute de program sunt:

- caracteristicile Bode pentru FTJ normat (1) și pentru FTJ cu frecvența de tăiere $\omega_t = 100$ rad/s (2) (fig. 14). Se observă că în zona de blocare, panta caracteristicii de amplificarea este de $-80[\text{dB}/\text{dec}]$, însă în vecinătatea frecvenței de tăiere panta este mai mare decât la filtrul Butterworth. Un zoom din această caracteristică, unde este pus în evidență riplul din banda

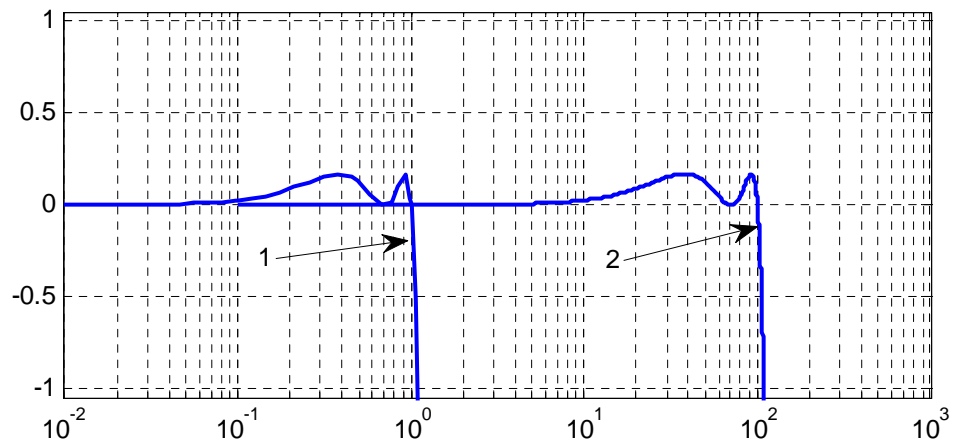


Fig. 15. Zoom din caracteristica filtrului Cebâșev dată în fig. 14

de trecere, este dat în fig. 15;

- Funcția de transfer a filtrului cu timp continuu

$$H(s) = \frac{0.6374}{10^{-8}s^4 + 1.596 \cdot 10^{-6}s^3 + 0.0002274s^2 + 0.01628s + 0.6374}$$

- Funcția de transfer a filtrului cu timp discret

$$H(z) = \frac{3.669 \cdot 10^{-6}z^4 + 1.468 \cdot 10^{-5}z^3 + 2.201 \cdot 10^{-5}z^2 + 1.468 \cdot 10^{-5}z + 3.669 \cdot 10^{-6}}{z^4 - 3.831z^3 + 5.516z^2 - 3.538z + 0.8526}$$

Sinteza filtrelor numerice (FIR)

Principiul de realizare

Filtrele intrinsec numerice sunt filtre FIR. Ca și în cazul filtrelor de tip IIR, în sinteză se pornește de la caracteristica ideală a unui filtru trece jos (FTJ), prezentată în fig. 1. Răspunsul la

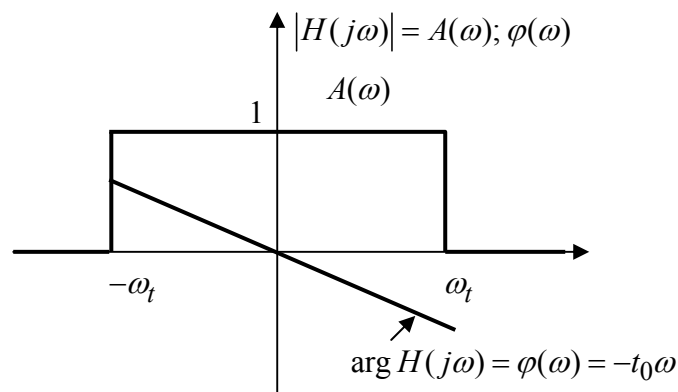


Fig. 16 Caracteristica de frecvență a unui FTJ ideal

impuls al acestui filtru se obține prin transformata Fourier inversă a răspunsului la frecvență $H(j\omega)$, care are modulul $A(\omega)$ și argumentul $\varphi(\omega)$, reprezentate în fig. 16:

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_t}^{\omega_t} |H(j\omega)| e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_t}^{\omega_t} 1 \cdot e^{j\omega(t-t_0)} d\omega = \frac{1}{\pi} \frac{e^{j\omega_t(t-t_0)} - e^{-j\omega_t(t-t_0)}}{2 \cdot j(t-t_0)} = \frac{\omega_t}{\pi} \text{sinc}(\omega_t(t-t_0)) \end{aligned} \quad (75)$$

Pentru ilustrarea principiului de realizare al filtrului FIR, se consideră situația când $\omega_t = 1$ și $t_0 = 2.5$. Răspunsul la impuls, pentru aceste date, este reprezentat grafic în fig. 2. Se constată

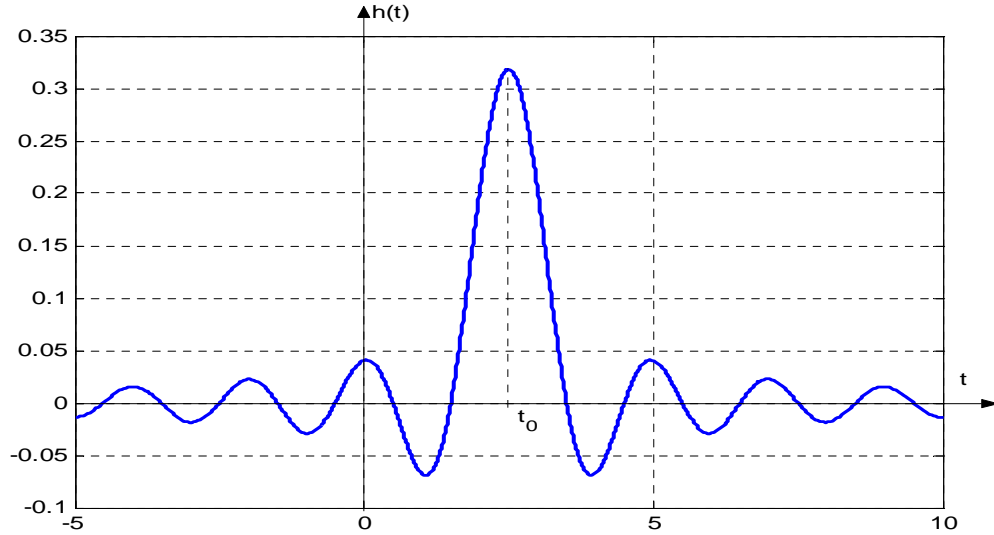


Fig. 17 Răspunsul la impuls al FTJ ideal

că FTJ este nerealizabil fizic, întrucât este necauzal: începe să răspundă la impuls înainte de momentul $t=0$, când se aplică impulsul la intrare. Pentru a obține un răspuns la impuls la limită cauzal (deci, realizabil fizic), vom considera că funcția $h(t)$ este « văzută » printr-o fereastră de timp rectangulară, pornind din momentul $t = 0$. În fig. 18 sunt desenate răspunsul la impuls și

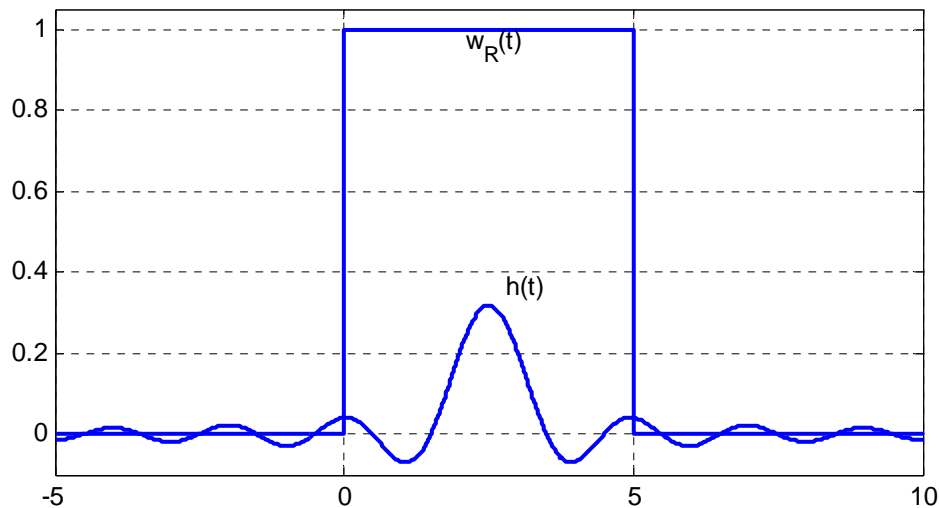


Fig. 18 Răspunsul la impuls și fereastra de timp rectangulară

fereastra de timp $w_R(t)$, cu lărgimea de 5 s. Prin această fereastră de timp se obține **răspunsul la impuls finit în timp** (FIR):

$$h_R(t) = w_R(t).h(t) \quad (76)$$

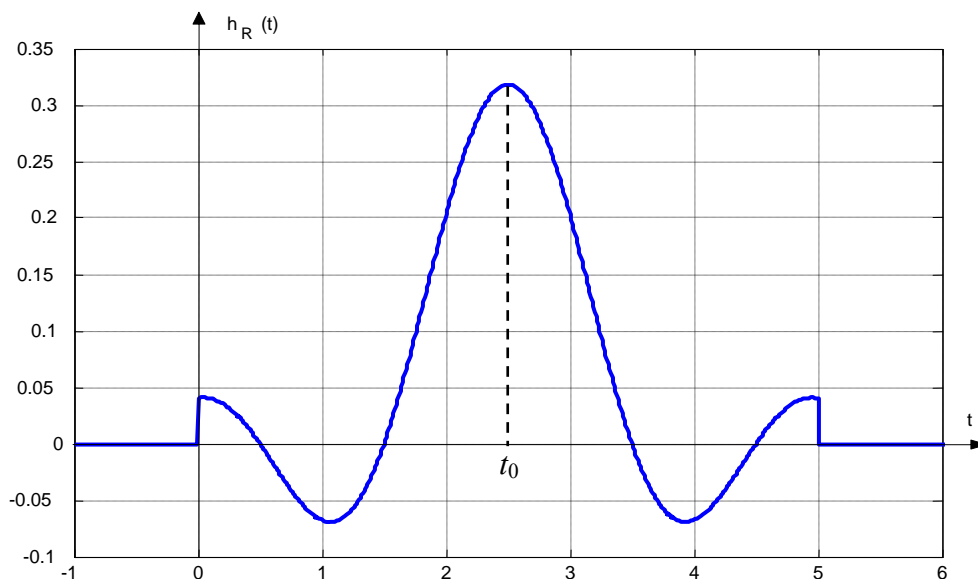


Fig. 19 Răspunsul la impuls văzut printr-o fereastră rectangulară

reprezentat în fig. 19. Sistemul care ar genera un asemenea răspuns la impuls **trebuie să fie cu timp discret**, deoarece numai sistemele numerice pot realiza răspunsuri finite la impuls. Pentru

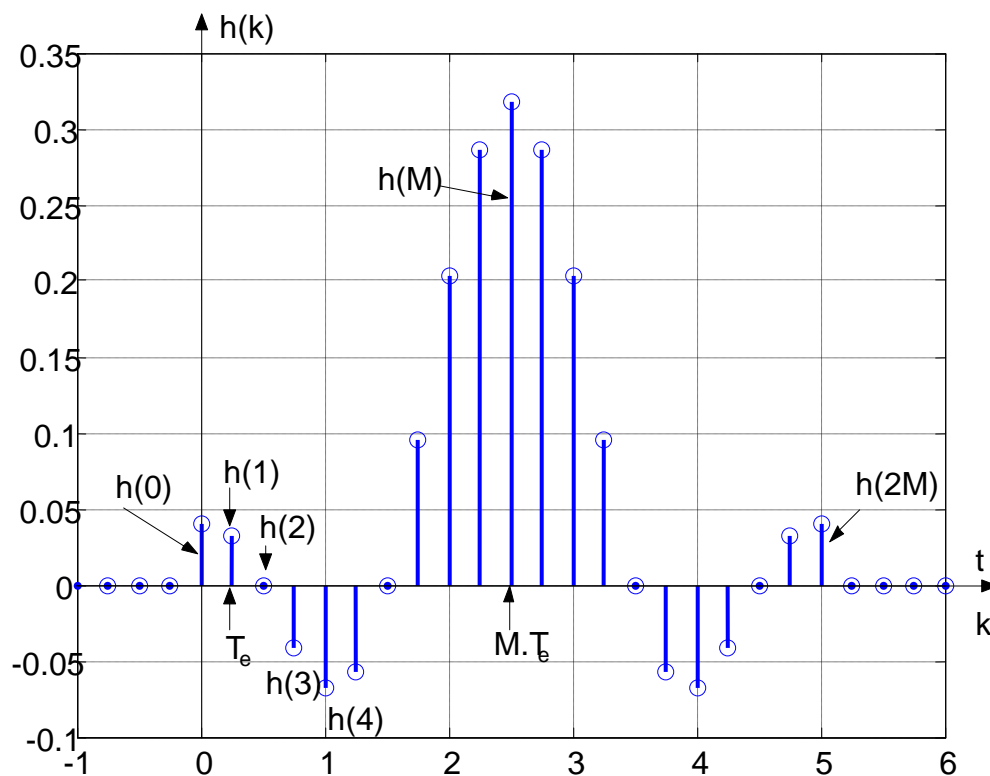


Fig. 20 Răspunsul la impuls al filtrului FIR, pentru $M=10$

obținerea sistemului FIR, se eșantionează răspunsul la impuls din fig. 19, cu perioada de

eșantionare T_e . Fie cazul când se alege $T_e = 0.25$ s. În această situație, valoarea maximă a răspunsului la impuls se obține după $M = t_0 / T_e = 10$ perioade de eșantionare, iar răspunsul la impuls al filtrului FIR care implementează filtrul trece jos este dat în fig. 20.

Funcția de transfer și caracteristicile de frecvență

Funcția de transfer a filtrului FIR este:

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots + h(M)z^{-M} + \dots + h(2M)z^{-2M} = \sum_{k=0}^{2M} h(k)z^{-k} \quad (77)$$

Considerând M par, ca în exemplul considerat, avem:

$$h(0) = h(2M); h(1) = h(2M-1); \dots, h(M-1) = h(M+1) \quad (78)$$

Schema filtrului FIR se poate reprezenta ca în fig. 21.

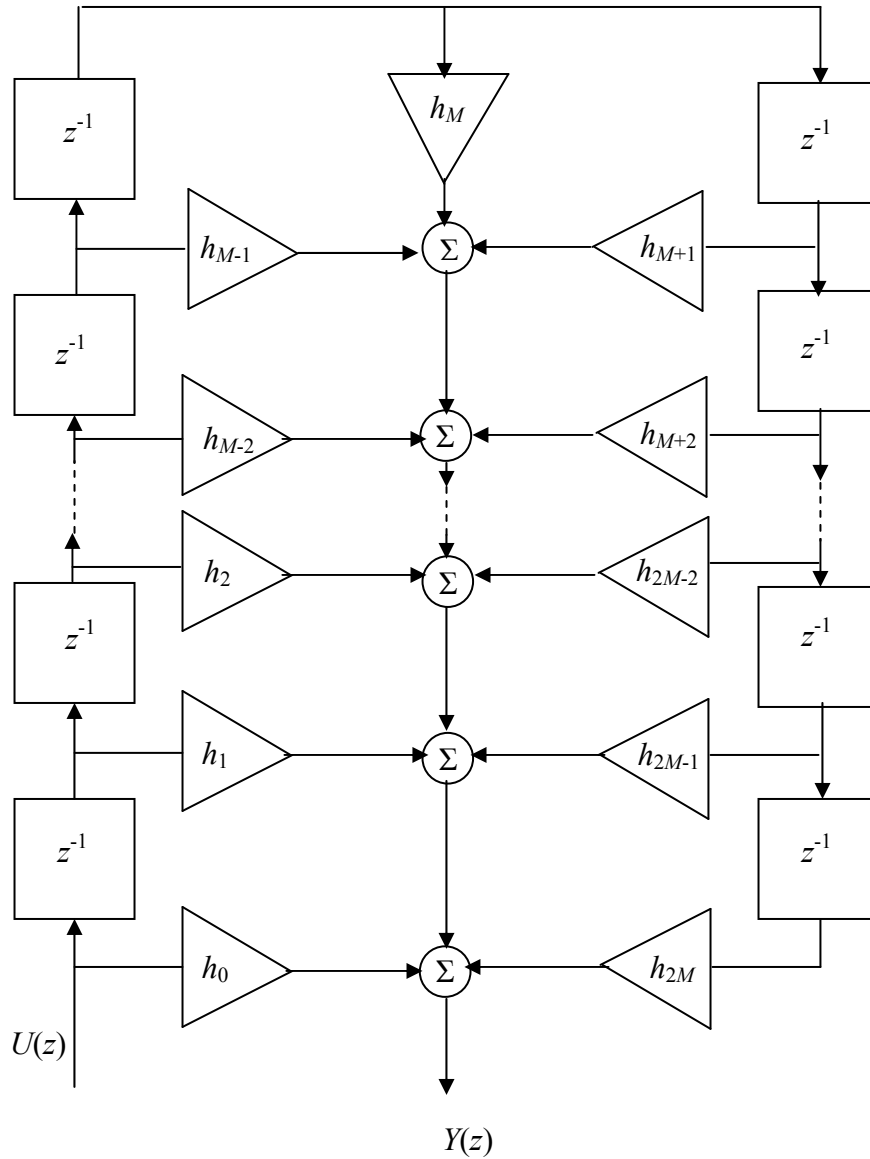


Fig. 21. Schema bloc a filtrului FIR

Răspunsul la frecvență al filtrului FIR este

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega T_e}) &= \sum_{k=0}^{2M} h(k) e^{-jk\omega T_e} = \\
&= h(0) + h(1)e^{-j\omega T_e} + \dots + h(M-1)e^{-j(M-1)\omega T_e} + h(M)e^{-jM\omega T_e} + h(M+1)e^{-j(M+1)\omega T_e} + \dots + h(2M-1)e^{-j(2M-1)\omega T_e} + h(2M)e^{-j2M\omega T_e} = \\
&= e^{-jM\omega T_e} \left(h(0)e^{jM\omega T_e} + h(1)e^{j(M-1)\omega T_e} + \dots + h(M-1)e^{j\omega T_e} + h(M) + h(M+1)e^{-j\omega T_e} + \dots + h(2M)e^{-jM\omega T_e} \right)
\end{aligned} \tag{79}$$

Având în vedere egalitățile (78), răspunsul la frecvență se poate scrie sub forma

$$H(e^{j\omega T_e}) = e^{-jM\omega T_e} \left(h(0)(e^{jM\omega T_e} + e^{-jM\omega T_e}) + h(1)(e^{j(M-1)\omega T_e} + e^{-j(M-1)\omega T_e}) + \dots + h(M-1)(e^{j\omega T_e} + e^{-j\omega T_e}) + h(M) \right) \tag{80}$$

sau

$$H(e^{j\omega T_e}) = e^{-jM\omega T_e} \left(2 \sum_{i=0}^{M-1} h(i) \cos(M-i)\omega T_e + h(M) \right) \tag{81}$$

Amplificarea filtrului este

$$|H(j\omega)| = \left| 2 \sum_{i=0}^{M-1} h(i) \cos(M-i)\omega T_e + h(M) \right| \tag{82}$$

iar defazajul

$$\varphi(\omega) = -M\omega T_e \tag{83}$$

Se observă că adoptând o valoare mare a întârzierii t_0 , rezultă un parametru M mare și un defazaj important introdus de filtrul FIR. Caracteristica de fază este liniară, ceea ce înseamnă că filtrul produce o întârziere (proporțională cu M) a semnalului aplicat la intrare.

Funcții fereastră

Fie $h(t)$ și $H(j\omega)$ răspunsul la impuls și, respectiv, răspunsul la frecvență ale unui FTJ ideal. Legătura dintre aceste două funcții este dată de transformata Fourier:

$$h(t) \xrightarrow{F} H(j\omega) \tag{84}$$

Din considerente de realizabilitate fizică, răspunsul la impuls considerat în sinteză **nu** este $h(t)$, ci este **funcția răspunsului la impuls văzută printr-o fereastră de timp**. Această abordare face să dispară componenta necauzală a răspunsului la impuls, rezultând realizabilitatea fizică a filtrului. În același timp, abordarea determină caracterul de răspuns la impuls **finiț în timp**, care impune realizabilitatea doar în implementare numerică.

În secțiunile anterioare s-a lucrat cu fereastra de timp rectangulară, $w_R(t)$. În aceste condiții, funcția răspunsului la impuls considerată în sinteză este $h_R(t)$, având expresia (76). Vom nota în continuare cu $w_F(t)$ o funcție fereastră oarecare și prin $h_F(t)$ răspunsul la impuls văzut prin această fereastră. Caracteristicile de frecvență ale filtrului sintetizat sunt date de transformata Fourier a funcției răspunsului la impuls $h_F(t)$:

$$h_F(t) = w_F(t) \cdot h(t) \xrightarrow{F} H_F(j\omega) = \frac{1}{2\pi} F \{ w_F(t) \} * H(j\omega) \tag{85}$$

Scopul urmărit este de a obține caracteristici de frecvență cât mai apropiate de cele ale FTJ ideal. Deci, transformata Fourier $H_F(j\omega) = F \{ w_F(t) \} * H(j\omega)$ trebuie să difere cât mai puțin (ca modul și ca argument) de transformata Fourier ideală $H(j\omega)$. Evident, diferențele dintre cele două transformate Fourier depind de forma ferestrei de timp. În secțiunea anterioară s-a adoptat fereastra rectangulară, deoarece aceasta oferă o fundamentare intuitivă a problematicei

filtrelor FIR. Există însă și alte tipuri de ferestre de timp, care determină caracteristici performante ale filtrului FIR. Funcțiile fereastă uzuale sunt:

Fereastra rectangulară

$$w_R(i) = \begin{cases} 1 & i = 0, 1, 2, \dots, 2M \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (86)$$

Fereastra Hamming

$$w_H(k) = \begin{cases} \alpha + (1 - \alpha) \cos\left((i - M) \frac{\pi}{M}\right) & i = 0, 1, 2, \dots, 2M \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (87)$$

în care $\alpha = 0.54$ ($\alpha = 0.5$ – varianta Hanning)

Fereastra Kaiser

$$w_K = \begin{cases} \frac{I_0\left[2\pi\sqrt{1 - ((i - M)/M)^2}\right]}{2\pi} & i = 0, 1, 2, \dots, 2M \\ 0 & \text{in rest} \end{cases} \quad (88)$$

în care $I_0(.)$ este funcția Bessel modificată de ordin zero.