

CURS 1

Sisteme (filtre) elementare

1. Introducere

Un echipament electronic de procesare a semnalelor include un ansamblu de *subsisteme interconectate*. Aceste subsisteme sunt definite prin *funcții de transfer elementare*, în sensul că *acestea nu se pot descompune în funcții de transfer mai simple*. Ele numite *sisteme fundamentale* sau, adesea, *filtre elementare* (denumire utilizată numai în electronică).

Clasificarea sistemelor (filtrelor) elementare se face *după forma modelului matematic care leagă mărimile de intrare și de ieșire*. O bună cunoaștere a acestor elemente este esențială în analiza și sinteza sistemelor de procesare a semnalelor.

Pentru subsistemele prezentate în continuare se vor specifica : ecuația intrare-ieșire ; răspunsul la impuls și funcția indicială, funcția de transfer și distribuția poli-zero-uri ; răspunsul la frecvență și expresiile amplificării și defazajului ; caracteristicile Nyquist și Bode.

Subsistemele liniare fundamentale se prezintă distinct pentru cazurile : timp continuu și, respectiv, timp discret.

2 Sistemul ideal cu acțiune proporțională (amplificatorul ideal)

Relația intrare-ieșire este de forma

$$y(t) = K \cdot u(t), \quad (1)$$

pentru cazul : timp continuu, și

$$y(k) = K \cdot u(k), \quad (2)$$

pentru timp discret. Parametrul K se numește coeficient static de amplificare.

Funcțiile de transfer sunt

$$H(s) = K \text{ - timp continuu, respectiv } H(z) = K \text{ - timp discret} \quad (3)$$

Răspunsul la semnal treaptă al unui element (amplificator) ideal este prezentat în Fig. 1.

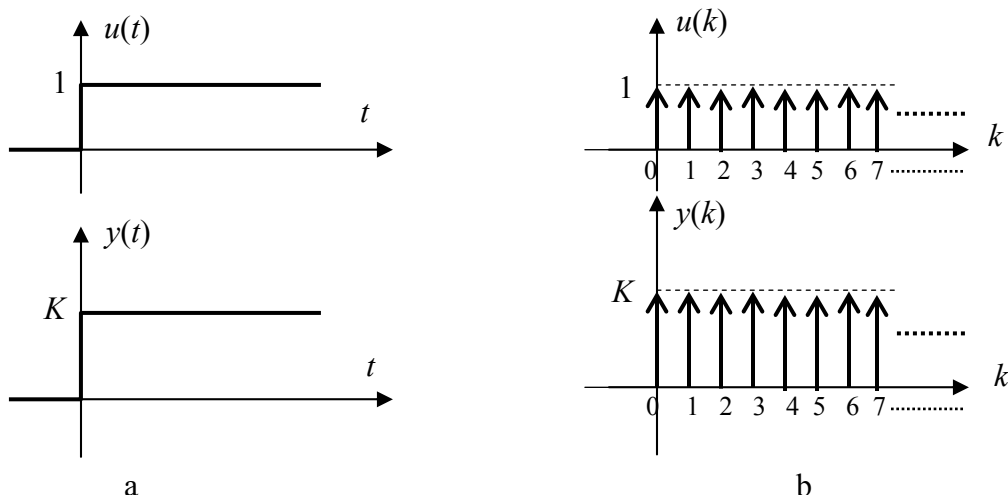


Fig. 1 Răspunsul la semnal treaptă al unui element (amplificator) ideal :
a – timp continuu : b – timp discret

Se constată că se reproduce la ieșire, fără dinamică, forma semnalului de intrare, prin intermediul constantei (coeficientului de amplificare) K .

Caracteristicile de frecvență pentru cazul timp continuu sunt ilustrate în Fig. 2. Amplificarea în dB este :

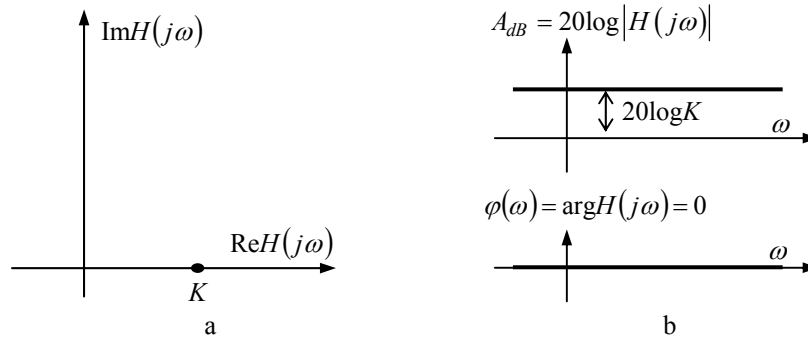


Fig. 2. Caracteristicile Nyquist (a) și Bode (b) ale elementului proporțional ideal

$$A_{dB}(\omega) = 20 \cdot \log |H(j\omega)| = 20 \cdot \log K, \quad (4)$$

iar faza

$$\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = 0 \quad (5)$$

Atunci când timpul este discret, pulsația ω este limitată superior la limita Shannon :

$$\omega_S = \omega_e/2 \quad (6)$$

3 Linia de întârziere ideală

3.1 Cazul timpului continuu

1 - *Ecuatia intrare-ieșire* este

$$y(t) = u(t - \tau) \quad (7)$$

unde τ este întârzierea.

2 - *Răspunsul la semnal treaptă* este prezentat în Fig. 3. Semnalul aplicat la intrare este reprodus la ieșire cu întârzierea τ .

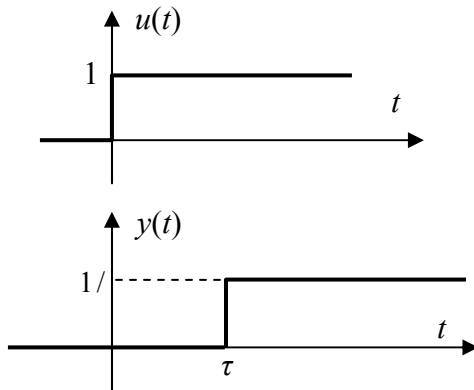


Fig. 3 Răspunsul la semnal treaptă al unei linii de întârziere ideale

3. *Funcția de transfer* se obține aplicând transformata Laplace ecuației (7):

$$Y(s) = U(s) \cdot e^{-\tau s}$$

de unde rezultă

$$H(s) = e^{-\tau s} \quad (8)$$

4. *Răspunsul la frecvență* este

$$H(j\omega) = e^{-\tau j\omega} \quad (9)$$

de unde se obțin:

- caracteristica de amplificare

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = |e^{-j\omega\tau}| = 1 ; \quad A_{dB} = 20 \cdot \log A = 0 \quad (10)$$

- caracteristica de fază $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega) = -\omega\tau$. (11)

Caracteristicile Nyquist (locul de transfer) și Bode sunt prezentate în Fig. 4. Locul de transfer este un cerc, deoarece $A(\omega) = 1$ și $\varphi(\omega)$ este variabilă. În diagramele Bode, unde pulsația din abscisă este în scară logaritmică, caracteristica de amplificare este nulă, $A_{dB} = 20 \log A(\omega) = 0$, iar caracteristica de fază este liniară în raport cu $\log \omega$, însă este

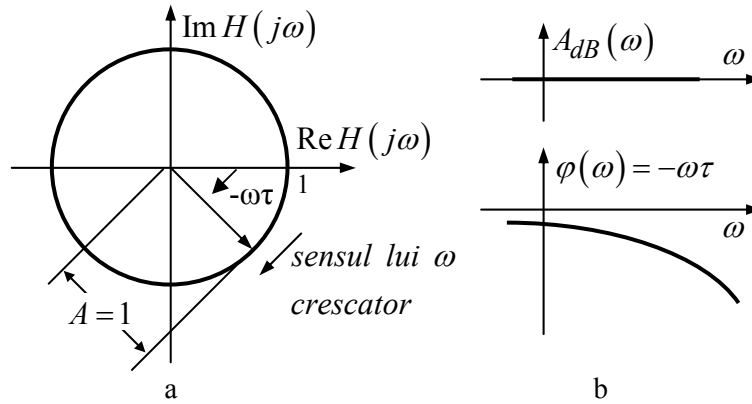


Fig. 4 Linia de întârziere ideală - cazul timp continuu :caracteristica Nyquist (a), caracteristicile Bode (b)

neliniară în raport cu ω .

Observație. Dintre elementele fundamentale, linia de întârziere cu timp continuu este singurul element cu **funcție de transfer nerațională (exponențială)**. Toate celelalte elemente (filtre) elementare au funcția de transfer rațională, adică funcția de transfer este un raport de polinoame în s , în care gradul numărătorului este inferior sau la limită egal cu cel al numitorului (pentru sistemele strict cauzale, respectiv sisteme la limită cauzale). Pentru a aproxima funcția de transfer exponențială cu o funcție de transfer rațională, se scrie expresia (8) sub forma:

$$H(s) = \frac{e^{-\frac{s\tau}{2}}}{e^{\frac{s\tau}{2}}} = \frac{1 - \frac{s\tau}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{s\tau}{2} \right)^2 - \dots}{1 + \frac{s\tau}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{s\tau}{2} \right)^2 + \dots} \quad (12)$$

Dacă se utilizează primii doi termeni din dezvoltările în serie, se obține

$$H(s) \cong \frac{2 - \tau s}{2 + \tau s} \quad (13)$$

Dacă se utilizează 3 termeni, atunci

$$H(s) \cong \frac{8-4\tau s + \tau^2 s^2}{8+4\tau s + \tau^2 s^2} \quad (14)$$

Funcțiile de transfer (13), (14) formează seria Padé, pentru aproximarea funcției de transfer (8).

Utilizarea mediului Matlab. Aproximarea prin serie Padé se realizează cu funcția `pade(tau,n)`, în care `tau` este întârzierea, iar `n` – ordiunul funcției de transfer raționale.

Exemplu de utilizare:

```
tau=0.5; n=4; [num,den]=pade(tau,n); sys=tf(num,den)
```

Transfer function:

$$\frac{s^4 - 40s^3 + 720s^2 - 6720s + 2.688e004}{s^4 + 40s^3 + 720s^2 + 6720s + 2.688e004}$$

3.2 Cazul : timp discret

Ecuția intrare-ieșire este

$$y(k) = u(k - k_\tau) \quad (15)$$

unde k_τ este un parametru întreg, reprezentând întârzierea exprimată în număr de pași de eșantionare.

Aplicând în (15) transformata z , în condiții inițiale nule, rezultă :

$$Y(z) = z^{-k_\tau} U(z)$$

de unde se obține **funcția de transfer** :

$$H(z) = z^{-k_\tau} \quad (16)$$

Răspunsul la frecvență este

$$H(e^{j\omega T_e}) = e^{-j\omega k_\tau T_e} \quad (17)$$

din care rezultă caracteristicile de frecvență :

$$A(\omega) = |H(e^{j\omega T_e})| = 1;$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(e^{-j\omega T_e}) = -\omega k_\tau T_e; \quad (18)$$

$$0 \leq \omega \leq \frac{1}{2} \omega_e$$

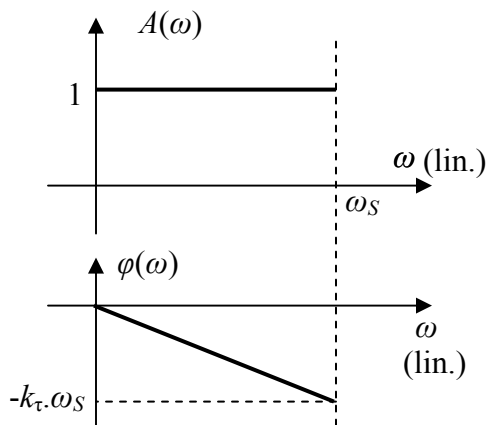


Fig. 5 Caracteristicile de frecvență ale liniei de întârziere cu timp discret

În Fig. 5 sunt date caracteristicile $A(\omega)$ și $\varphi(\omega)$, unde pulsația s-a considerat în scară liniară

4. Integratorul

4.1 Cazul integratorului cu timpul continuu

Ecuția intrare-ieșire a unui integrator ideal este

$$y(t) = k_v \int_0^t u(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^t u(\tau) d\tau \quad (19)$$

unde : T este *constanta de timp de integrare* [s], $k_v = 1/T$ - *coeficientul de viteză* [s^{-1}].

- **Răspunsul la impuls și funcția indicială** sunt prezentate în fig. 6. Se observă că integratorul cu ecuația (19) transformă impulsul Dirac într-o treaptă de amplitudine k_v , iar treapta unitară este transformată într-un semnal de tip rampă, cu panta k_v .

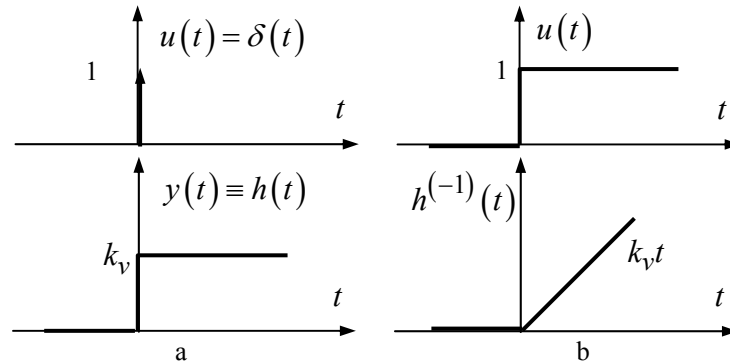


Fig. 6 Răspunsul la impuls (a) și răspunsul indicial (b) ale unui integrator

- **Funcția de transfer** se obține aplicând transformata Laplace ecuației (19), în condiții inițiale nule:

$$Y(s) = k_v \frac{1}{s} U(s) = \frac{1}{T} \frac{1}{s} U(s)$$

de unde rezultă

$$H(s) = \frac{k_v}{s} = \frac{1}{Ts} \quad (20)$$

Se observă că **integratorul introduce un pol în originea planului "s"**.

- **Răspunsul la frecvență,**

$$- H(j\omega) = \frac{k_v}{j\omega} = -j \cdot \frac{k_v}{\omega} \quad (21)$$

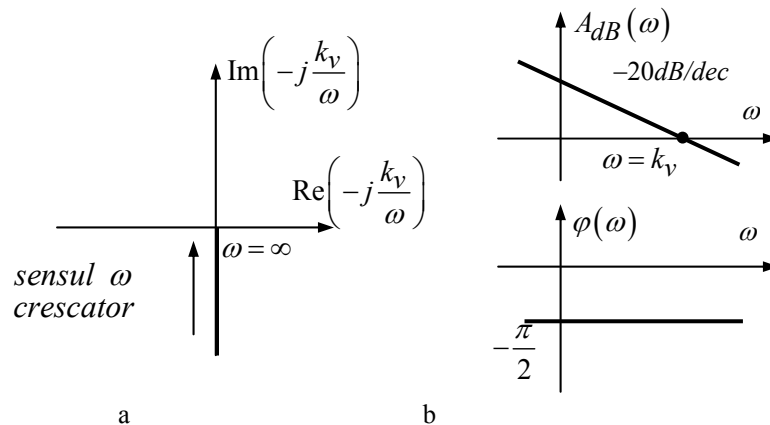


Fig. 7 Caracteristicile Nyquist (a) și Bode (b) ale unui integrator

conduce la expresiile amplificării și defazajului :

$$A(\omega) = \frac{k_v}{\omega}; \quad A_{dB} = 20 \log k_v - 20 \log \omega, \quad (22)$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$$

Caracteristicile Nyquist și Bode sunt date în fig.7. Se observă din relația (21) că răspunsul la frecvență este mereu imaginar negativ, deci locul de transfer coincide cu semiaxa negativă imaginară. Atunci când $\omega \rightarrow 0$, răspunsul la frecvență tinde spre $-j\infty$.

În diagramele Bode (unde în abscisă avem $\log \omega$), caracteristica amplificării în dB variază **liniar** cu $\log \omega$ (v. rel. (22)), **cu panta de -20 dB/dec** . Tăietura la abscisă se obține la $\omega = k_v = 1/T$. Deci, caracteristica $A_{dB}(\omega)$ a integratorului este o dreaptă cu **panta de -20 dB/dec** și **tăietura la abscisă egală cu $k_v = 1/T$** . Caracteristica de defazaj este de $-\pi/2$, la orice frecvență.

4.2 Cazul integratorului cu timp discret.

Ecuția intrare-ieșire. În expresia (19) se adoptă timpul discret $t = kT_e$ (T_e este perioada de eșantionare) și se consideră, pentru simplitate, $k_v = 1$. Mărimea de ieșire la momentul discret kT_e se obține din (19) sub forma:

$$y(kT_e) = y[(k-1)T_e] + \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} u(\tau) d\tau \quad (23)$$

Dacă se aplică cea mai simplă metodă de integrare – metoda dreptunghiurilor – se obțin ecuațiile:

$$y(kT_e) = y[(k-1)T_e] + T_e u[(k-1)T_e] \quad (24)$$

$$y(kT_e) = y[(k-1)T_e] + T_e u[kT_e] \quad (25)$$

după tipul de aproximare adoptat. În cele ce urmează se va admite ecuația (24), care se va scrie mai simplu :

$$y(k) = y(k-1) + T_e u(k-1) \quad (26)$$

Funcția de transfer rezultă prin aplicarea transformatei z ecuației (26):

$$H(z) = \frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T_e}{z - 1} \quad (27)$$

Se constată că integratorul cu timp discret are un pol pe cercul unitar, la $z_p = 1$.

Răspunsul la frecvență este

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{T_e}{e^{j\omega T_e} - 1} \quad (28)$$

și se poate pune sub forma,

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{T_e}{e^{\frac{j\omega T_e}{2}} \left(e^{\frac{j\omega T_e}{2}} - e^{-\frac{j\omega T_e}{2}} \right)} = \frac{T_e e^{-\frac{j\omega T_e}{2}}}{2j \left(\frac{e^{\frac{j\omega T_e}{2}} - e^{-\frac{j\omega T_e}{2}}}{2j} \right)} = \frac{T_e e^{-\frac{j\omega T_e}{2}}}{2j} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} \quad (29)$$

Din această expresie se deduc caracteristicile de amplificare și de defazaj :

$$A(\omega) = \left| H(e^{j\omega T_e}) \right| = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} \quad ; \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_e}{2} \quad (30)$$

$$\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega T_e}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_e T_e}{2}$$

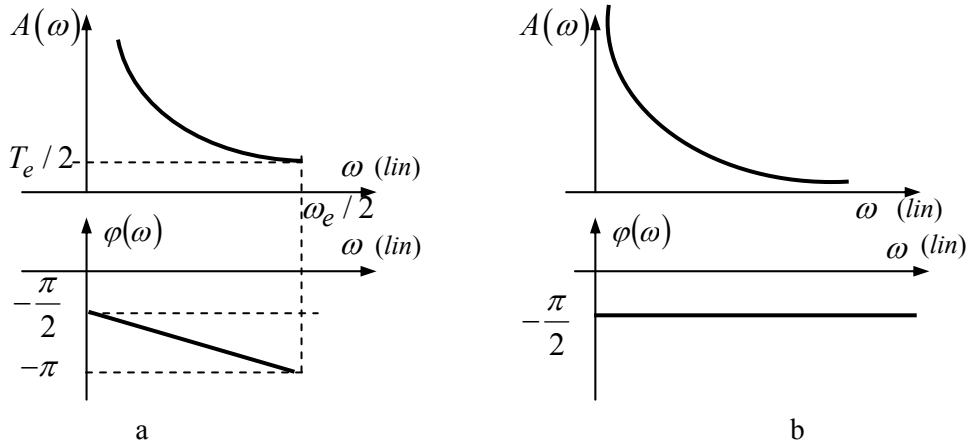


Fig. 8 Caracteristicile de frecvență ale integratorului cu timp discret (a) și cu timp continuu (b)

Cele două caracteristici de frecvență, cu ω în scară liniară, sunt reprezentate în fig.8.a. Dacă se compară caracteristicile de frecvență (30) ale integratorului cu timp discret (27) cu caracteristicile :

$$A(\omega) = 1/\omega, \quad \varphi(\omega) = -\pi/2 \quad (31)$$

ale integratorului ideal cu timp continuu (v. fig. 8.b), se constată că, prin discretizarea timpului, se introduc erori importante, după cum urmează :

- caracteristica de amplificare tinde spre zero, când $\omega \rightarrow \infty$, la integratorul cu timp continuu, pe când caracteristica de amplificare a integratorului cu timp discret tinde spre $T_e/2$, atunci când ω atinge valoarea limită $\omega_S = \omega_e/2$;
- caracteristica de fază este constantă, la valoarea $-\pi/2$, la integratorul ideal cu timp continuu, pe când, la integratorul cu timp discret, faza variază liniar de la $-\pi/2$ la $-\pi$.

Deci, diferențele pot fi importante, în special la caracteristica de fază. Aceste erori pot fi considerate ca fiind acceptabile numai la valori reduse ale pulsației ω , cu alte

cuvinte – numai dacă domeniul spectral al semnalului integrat este situat în zona de joasă frecvență a benzii de frecvență a integratorului (frecvența maximă din spectrul semnalului de intrare se consideră mult mai mică decât frecvența Shannon). Pentru valori mici ale pulsației ω , relațiile (30) devin :

$$A(\omega) = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} \cong \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\omega T_e}{2}} = \frac{1}{\omega},$$

$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T_e}{2} \cong -\frac{\pi}{2}$$
(32)

deci integratorul cu timp discret (27) are proprietăți foarte apropiate de cele ale integratorului ideal cu timp continuu.