

CURS 6

Recapitulare

REPREZENTARI STRUCTURALE SI CONVERSIA MODELELOR

1 Introducere

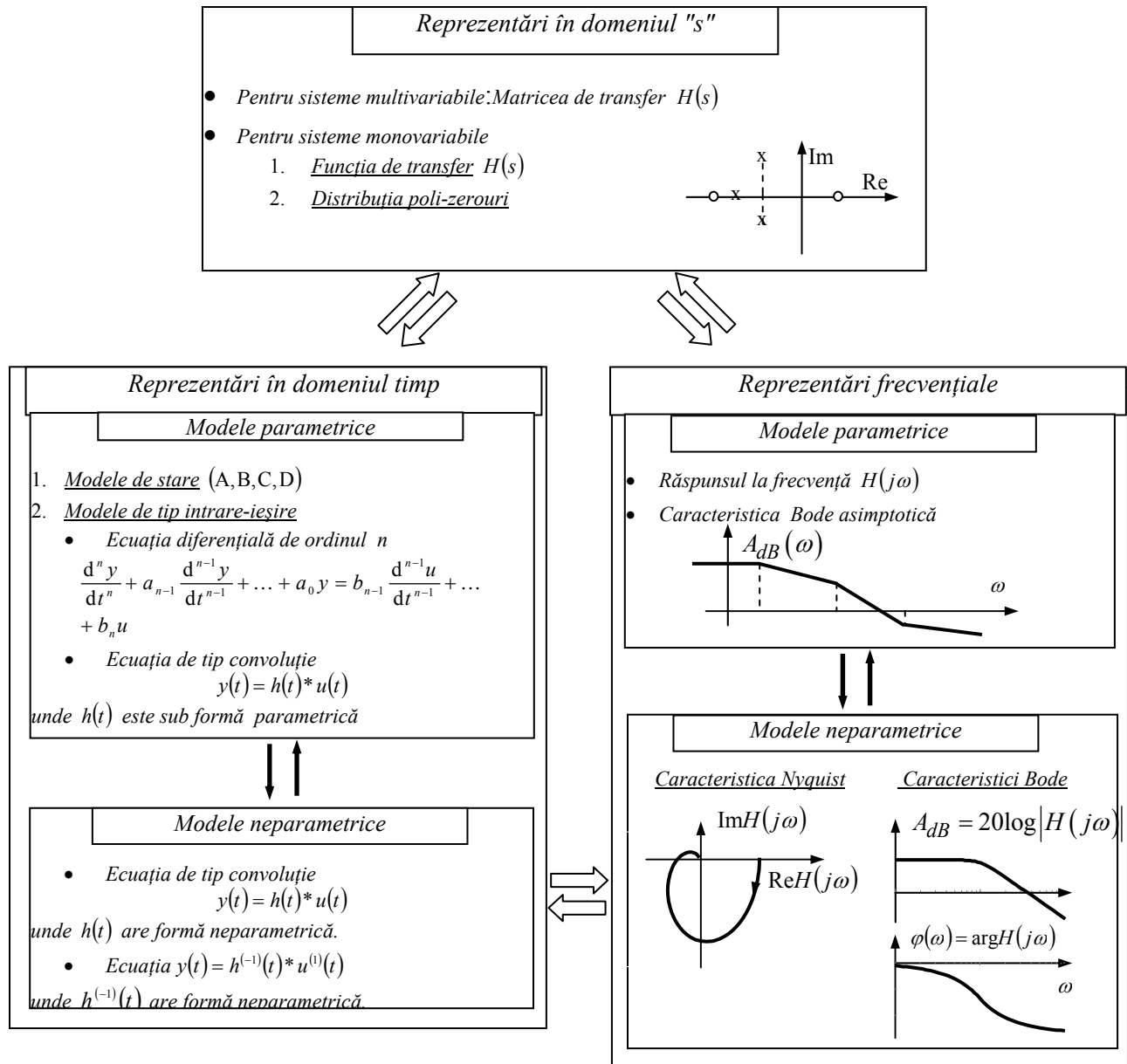


Fig. 1 Reprezentări matematice ale sistemelor cu timp continuu

- In acest capitol se vor examina conversiile:
- funcție de transfer ↔ caracteristica Bode asimptotică;
 - funcție de transfer ↔ ecuație de stare în formă canonică;
 - conversia modelelor neparametrice;
 - conversia : funcție de transfer cu timp continuu → funcție de transfer cu timp discret.

2. Analiza sistemelor și circuitelor prin grafuri de semnal (grafuri de fluentă)

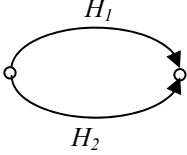
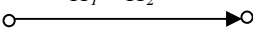
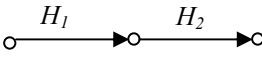
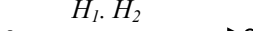
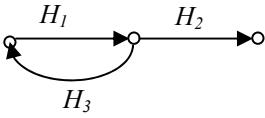
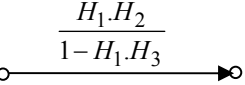
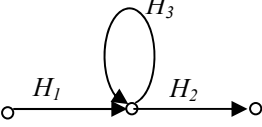
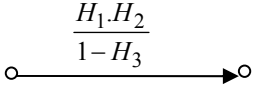
Analiza și simplificarea unei scheme bloc poate fi ușurată simțitor prin utilizarea grafurilor de semnal. Acestea sunt grafuri orientate, numite și grafuri de fluentă, având în componența lor **noduri** și **arce** (laturi).

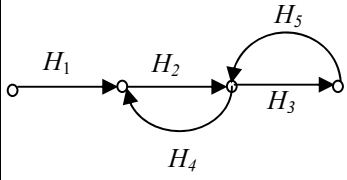
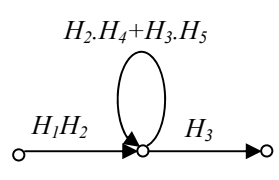
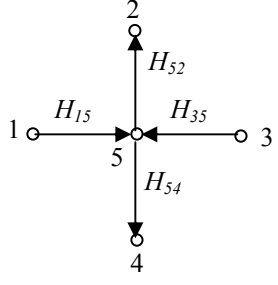
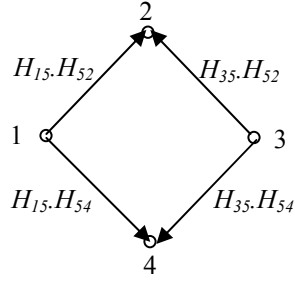
Nodurilor le sunt atașate semnale din schema bloc. Se numește nod **sursă** nodul căruia i se asociază (care generează) semnalul de intrare în sistem. Semnalului de ieșire din sistem îi corespunde nodul **sarcină**. În structura unui sistem reprezentat prin grafuri de fluentă intervin și noduri **mixte**. Un nod mixt poate avea unul sau mai multe semnale care converg spre nod. **Suma semnalelor ce converg în nod se consideră a fi semnalul aferent nodului**. El poate fi direcționat, prin arce, spre unul sau mai multe noduri din schemă.

Arcele definesc transferul între noduri, având asociat *sensul de transfer* al semnalelor. Fiecare arc este caracterizat prin *funcția de transfer*, care exprimă legătura între semnalele aferente nodurilor. O succesiune de arce parcurse de semnal formează o *cale*. Dacă într-o cale toate nodurile sunt parcurse o singură dată, calea se numește *cale deschisă*. Se numește *bucă* sau *cale închisă*, calea care pornește și se termină în același nod. O buclă cu o singură latură se numește *bucă proprie*.

Ca și în cazul schemelor bloc, la care s-au definit reguli de simplificare bazate pe transformări elementare (conexiunile serie, derivație și în circuit închis), reducerea grafurilor de fluentă are ca obiectiv obținerea unui *graf soluție*, compus din arce simple, care fac legătura dintre nodurile sursă și nodurile sarcină. În Tabelul 1. sunt sintetizate câteva reguli elementare de transformare a grafurilor de fluentă.

Tabelul 1 Reguli elementare de transformare a grafurilor de fluentă

Nr. crt	Denumirea transformării	Graful inițial	Graful echivalent
1	Inlocuirea arcelor conectate în paralel		
2	Inlocuirea arcelor conectate în serie		
3	Inlocuirea unei bucle		
4	Inlocuirea unei bucle proprii		

5	Inlocuirea unor bucle înseriate		
6	Transformarea stea-triunghi		

Exemplul 1 Pentru sistemul din fig. 2, graful de semnal corespunzător este prezentat în fig. 3. Graful aferent acestui sistem este dat în fig. 3. Urmând regulile de simplificare date în tabelul 1, se obține :

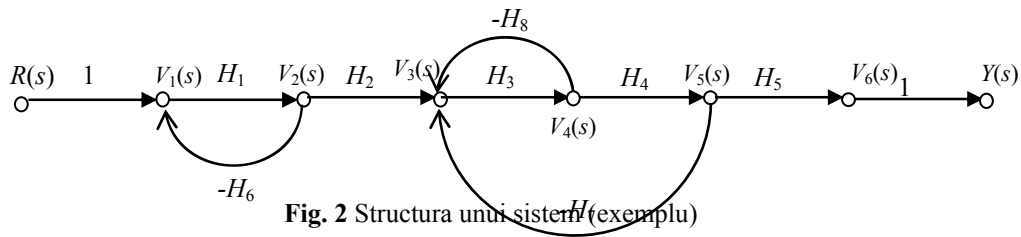
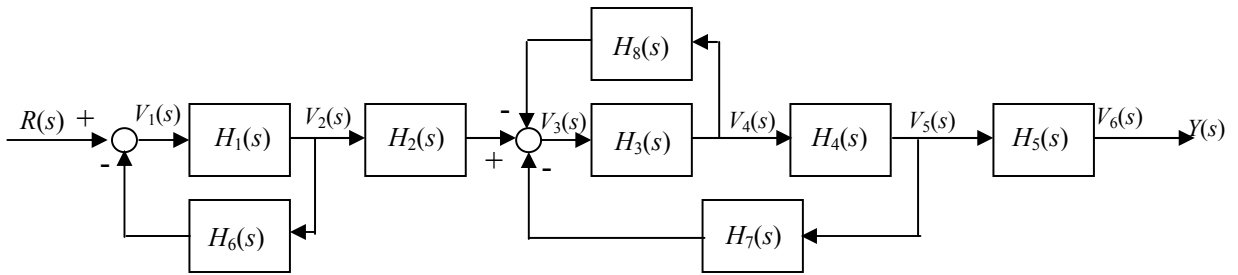


Fig. 2 Structura unui sistem (exemplu)

Fig. 3 Graful de semnal pentru exemplul din fig. 2

$$H(s) = 1 \cdot \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s)(-H_6(s))} H_2(s) \frac{\frac{H_3(s)}{1 - H_3(s)(-H_8(s))} H_4(s)}{1 - \frac{H_3(s)}{1 - H_3(s)(-H_8(s))} H_4(s)(-H_7(s))} H_5(s) \cdot 1$$

sau, după simplificări,

$$H(s) = \frac{H_1(s)H_2(s)H_3(s)H_4(s)H_5(s)}{(1 + H_1(s)H_6(s))(1 + H_3(s)H_8(s) + H_3(s)H_4(s)H_7(s))} \quad (1)$$

Același rezultat se obține utilizând regulile clasice de simplificarea schemelor bloc.

Exemplul 2 Fie graful unui sistem cu timp discret, prezentat în fig. 4. Dacă se

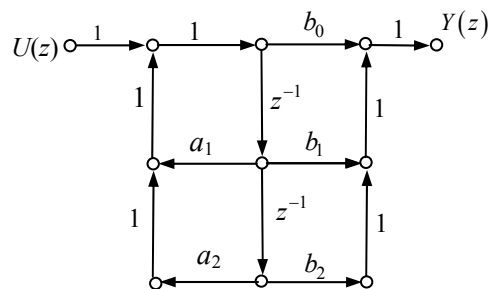


Fig.4 Sistem cu timp discret (exemplu)

elimină arcele cu transfer unitar, atunci acest graf poate fi desenat și sub forma din fig 5.a. Se aplică transformarea stea-triunghi la steaua care conține arcele cu transfer z^{-1} , a_2 și

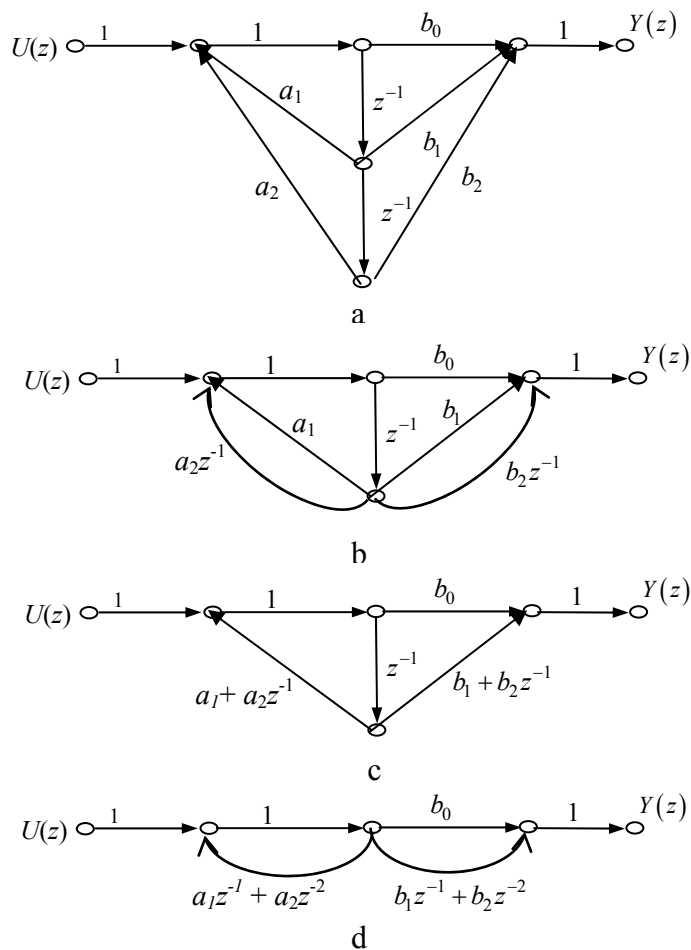


Fig.5 Transformări ale grafului din fig.4

b_2 , obținându-se schema din fig. 5.b. Aici, avem două perechi de arce conectate în paralel: cele cu transfer a_1 și $a_2 z^{-1}$, și respectiv cele cu transfer b_1 și $b_2 z^{-1}$. În consecință, graful poate fi redesenat ca în fig. 5.c. În continuare, se aplică din nou transformarea stea-triunghi, la steaua care conține arcele cu funcțiile de transfer z^{-1} , $a_1 + a_2 z^{-1}$ și $b_1 + b_2 z^{-1}$, obținându-se graful din fig. 5.d. Aici sunt două conexiuni:

- o buclă care are pe calea directă transfer unitar și pe calea inversă funcția de transfer $a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$;
- două arce în paralel, cu funcțiile de transfer b_0 și $b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$.

Funcția de transfer a întregului sistem este

$$H(z) = 1 \cdot \frac{1}{1 - (a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})} (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) \cdot 1 = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (2)$$

Exemplul 3 Fie circuitul din fig. 6, care se analizează prin metoda curenților ciclici. Se

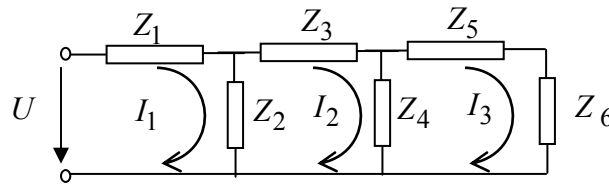


Fig. 6 Circuit de analizat (exemplu)

cere să se rezolve circuitul în raport cu curentul ciclic I_3 , utilizând grafuri de fluență.

Utilizând notațiile :

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2 \quad ; \quad Z_{22} = Z_2 + Z_3 + Z_4 \quad ; \quad Z_{33} = Z_4 + Z_5 + Z_6 \quad (3)$$

se pot scrie ecuațiile tensiunilor pe cele 3 contururi :

$$\begin{aligned} U &= I_1 Z_{11} - I_2 Z_2 \\ 0 &= I_2 Z_{22} - I_1 Z_2 - I_3 Z_4 \\ 0 &= I_3 Z_{33} - I_2 Z_4 \end{aligned} \quad (4)$$

se unde se scot ecuațiile curenților pe contur :

$$I_1 = \frac{U}{Z_{11}} + \frac{Z_2}{Z_{11}} I_2 \quad ; \quad I_2 = \frac{Z_2}{Z_{22}} I_1 + \frac{Z_4}{Z_{22}} I_3 \quad ; \quad I_3 = \frac{Z_4}{Z_{33}} I_2 \quad (5)$$

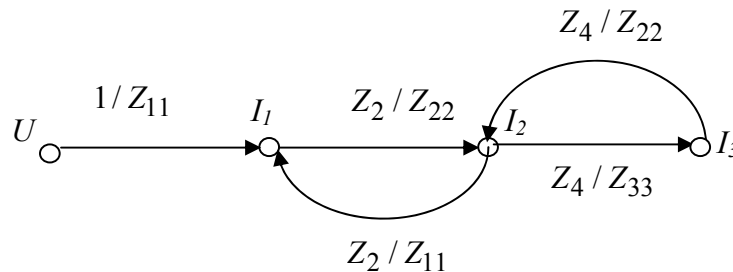


Fig. 7 Graful de fluență pentru rezolvarea circuitului din fig. 6

Graful de fluență pentru rezolvarea circuitului este dat în fig. 7. În nodul sursă se asociază tensiunea aplicată, U , iar celorlalte noduri li se asociază curenții I_1 , I_2 și I_3 . Deoarece se

cere rezolvarea circuitului în raport cu I_3 , ultimul nod va fi considerat nod-sarcină. În conformitate cu transformarea de la poziția 5 din Tabelul 1, graful din fig. 7 se poate prezenta sub forma din fig. 8. Acum, expresia curentului se poate scrie direct :

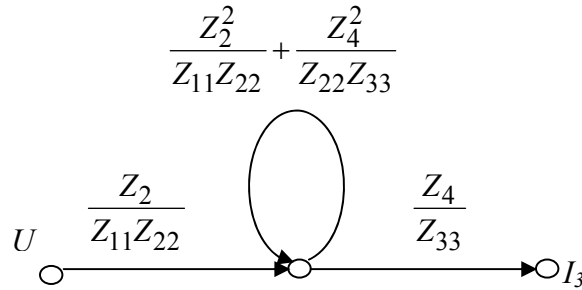


Fig. 8 Transformarea f* grafului din fig. 7

$$I_3 = \frac{\frac{Z_2 Z_4}{Z_{11} Z_{22} Z_{33}}}{1 - \left(\frac{Z_2^2}{Z_{11} Z_{22}} + \frac{Z_4^2}{Z_{22} Z_{33}} \right)} \quad (6)$$

3 Conversia : funcție de transfert – caracteristica Bode asimptotică

Fie o funcție de transfer sub forma generală:

$$H(s) = M(s) \frac{\prod_i B_{1i}(s) \prod_j T_{1j}(s)}{\prod_i B_i(s) \prod_j T_j(s)} \quad (7)$$

unde:

- $B_i(s), B_{1i}(s)$ sunt factori de tip binom, având forma

$$B(s) = Ts + 1 \quad (8)$$

- $T_j(s), T_{1j}(s)$ sunt factori de tip trinom, de forma

$$T(s) = T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1 \quad (9)$$

- $M(s)$ este un factor monome:

$$M(s) = ks^\alpha \quad (10)$$

Dacă $\alpha = 0$, sistemul are caracter proporțional; dacă $\alpha = -1, -2, \dots$ sistemul are caracter integrator, dublu integrator, ...; dacă $\alpha = 1, 2, \dots$ sistemul are caracter derivator, dublu derivator, ...

Amplificarea în dB este:

$$A_{dB}(\omega) = 20\log|M(j\omega)| + \sum_i 20\log|B_{li}(j\omega)| + \sum_j 20\log|T_{lj}(j\omega)| - \sum_i 20\log|B_i(j\omega)| - \sum_j 20\log|T_j(j\omega)| \quad (11)$$

Deci, caracteristica Bode $A_{dB}(\omega)$ se obține însumând caracteristicile Bode aferente termenilor din expresia (11). Aceste caracteristici pot avea formele următoare:

1. Pentru factorii de tip binom sau trinom din funcția de transfer (7), caracteristicile asimptotice sunt nule până la pulsația de frângere $1/T$, după care urmează o asimptotă cu

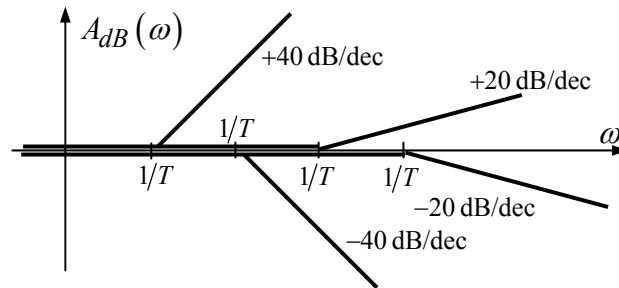


Fig. 9 Caracteristicile asimptotice aferente factorilor de tip binom și de tip trinom din funcția de transfer (7)

panta :

- $\pm 20 \text{ dB/dec}$ – pentru binoame situate la numărătorul/numitorul funcției de transfer ;
- $\pm 40 \text{ dB/dec}$ – pentru trinoame situate la numărătorul/numitorul funcției de transfer (fig. 9);

2. pentru factorul monom, caracteristica de amplificarea în dB este o dreaptă cu panta

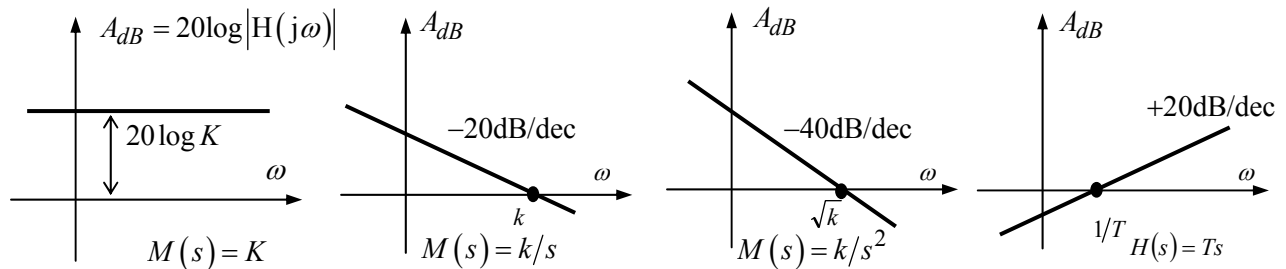


Fig. 10 Caracteristici Bode posibile pentru factorul de tip monom

de $\alpha 20 \text{ dB/dec}$. Figura 10 prezintă caracteristicile Bode aferente factorilor monom cei mai des întâlniți.

Se remarcă faptul că, pentru o funcția de transfer de forma (7), amplificarea A_{dB} a sistemului este egală cu amplificarea introdusă de factorul monom, până la cea mai mică frecvență de frângere. În continuare, crescând pulsația ω , la fiecare pulsație de frângere, panta caracteristicii se schimbă, după natura factorului care introduce pulsația respectivă de frângere. Pentru binom, respectiv trinom, schimbarea de pantă este de $\pm 20 \text{ dB/dec}$, respectiv $\pm 40 \text{ dB/dec}$ (semnul minus corespunde cazului când factorul se află la numitor).

Exemplu. Fie funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{20(s+0.2)}{s(10s+1)(s+2)} \quad (12)$$

Se pune această funcție de transfer sub forma în care factorii binom/trinome au forma (8) / (9), adică termenul liber este egal cu 1 :

$$H(s) = \frac{2(5s+1)}{s(10s+1)(0.5s+1)} \quad (13)$$

Pulsațiile de frângere și schimbările de pantă corespunzătoare acestora sunt :

$$\omega_{f1} = 1/10 = 0.1 \left[s^{-1} \right] (-20\text{dB/dec})$$

$$\omega_{f2} = 1/5 = 0.2 \left[s^{-1} \right] (+20\text{dB/dec})$$

$$\omega_{f3} = 1/0.5 = 2 \left[s^{-1} \right] (-20\text{dB/dec})$$

Caracteristica asimptotică $A_{dB}(\omega)$ a sistemului este dată în fig. 11 (caracteristica factorului monom $2/s$ este trasată cu linie întreruptă).

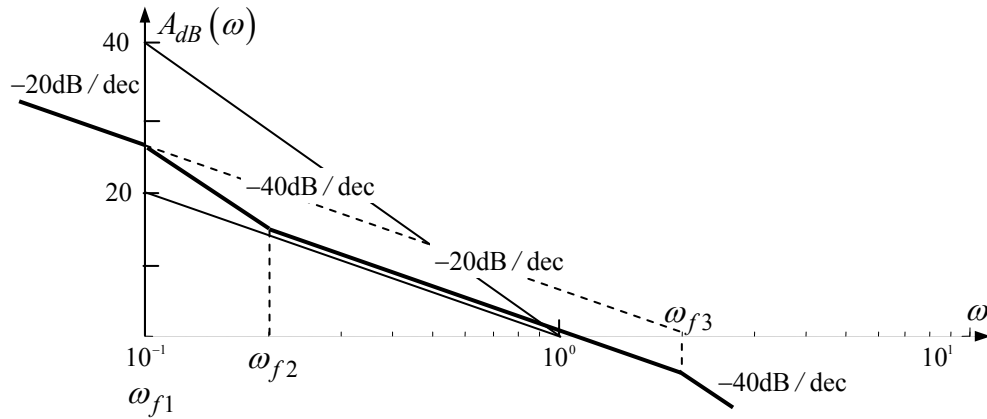


Fig. 11 Caracteristica Bode asimptotică pentru sistemul (12)

4 Conversia: funcție de transfer – ecuație de stare în formă canonică

4.1 Reprezentări canonice

Fie sistemul monovariabil cauzal de ordinul n , descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (14)$$

Aici intervin $2n$ parametri: $a_{n-1}, \dots, a_0; b_{n-1}, \dots, b_0$. Intr-un model de stare al sistemului strict cauzal, de forma,

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (15)$$

$$y = c^T x \quad (16)$$

matricea A este de dimensiune $n \times n$, b și c sunt vectori coloana n -dimensionali, deci pot interveni $(n^2 + 2n)$ parametri. Se pune problema reprezentării modelului de stare într-o formă în care numărul de parametri este $2n$, ca și în cazul funcției de transfer. Aceasta se numește **formă canonică** a modelului de stare.

4.2. Reprezentări canonice pentru sisteme cu timp continuu

4.2.1. Reprezentarea modală a sistemului (forma canonică Jordan).

Fie $H(s)$ funcția de transfer

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (17)$$

$$\text{și} \quad Q(s) = 0; \quad s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \quad (18)$$

ecuația caracteristică a sistemului.

Considerăm că rădăcinile ecuației caracteristice sunt distincte și reale. Funcția de transfer se descompune sub forma

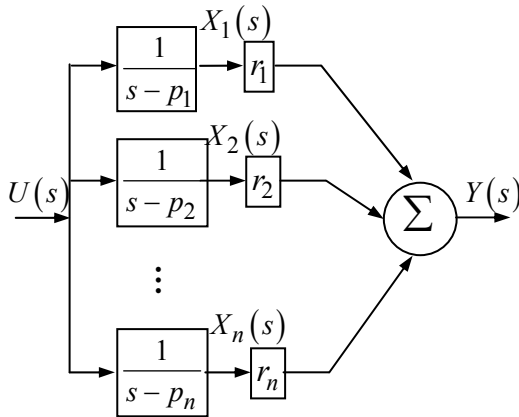


Fig. 12 Descompunerea modală a unui sistem cu poli distincți și reali

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{s - p_k} \quad (19)$$

unde $p_k; r_k, k = \overline{1, n}$ sunt polii, respectiv reziduurile funcției $H(s)$. Conform relației (19), sistemul se descompune în n sisteme de ordinul 1, conectate în paralel (fig.12). Notând cu $X_i(s)$, $i = \overline{1, n}$, ieșirile acestor filtre elementare, se poate scrie

$$\begin{cases} sX_1(s) = p_1X_1(s) + U(s) \\ sX_2(s) = p_2X_2(s) + U(s) \\ \vdots \\ sX_n(s) = p_nX_n(s) + U(s) \end{cases} \quad (20)$$

$$Y(s) = \sum_{k=1}^n r_k X_k(s) \quad (21)$$

și se obțin ecuațiile de stare și de ieșire ale sistemului :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = p_1x_1 + u \\ \dot{x}_2 = p_2x_2 + u \\ \vdots \\ \dot{x}_n = p_nx_n + u \end{cases} ; \quad y = \sum_{k=1}^n r_k x_k \quad (22)$$

Sub formă matriceală, sistemul este

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n] \mathbf{x} \quad (23)$$

astfel încât modelul de stare are următorii parametri matriceali:

$$\mathbf{A} = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n); \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \quad (24)$$

Variabilele de stare, x_i , $i = \overline{1, n}$, corespunzătoare ieșirilor elementelor simple din schema dată în fig 12, se numesc **modurile proprii ale sistemului**. Acestora le corespund componentele $r_k \cdot e^{p_k t}$ din răspunsul la impuls

Observație Din expresia (24) a matricii \mathbf{A} , rezultă că ecuația caracteristică a sistemului se poate scrie

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0$$

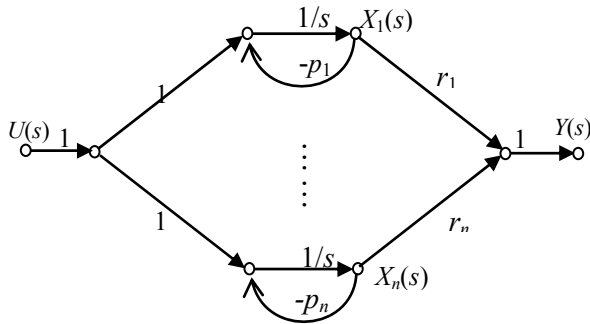


Fig. 13 Graful de semnal pentru un sistem în reprezentare modală (cazul polilor distincți)

deci polii $p_i, i = \overline{1, n}$ ai funcției de transfer sunt valorile proprii ale matricii \mathbf{A} .

Din relațiile (20) se constată că imaginea Laplace $X_k(s)$ se poate scrie sub forma

$$X_k(s) = \frac{1}{s} (U(s) - p_k X_k(s)); \quad k = \overline{1, n}$$

astfel încât sistemul se poate reprezenta prin graful din fig. 13.

Considerăm că polii distincți ai sistemului pot fi și complecși conjugați. Vom admite că primii 2 poli sunt de forma:

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega \quad (25)$$

În acest caz, reziduurile r_1 și r_2 sunt complexe conjugate, iar termenii $\frac{r_1}{s - (\alpha + j\omega)}$ și $\frac{r_2}{s - (\alpha - j\omega)}$ din dezvoltarea funcției de transfer $H(s)$ se înlocuiesc

printr-un subsistem de ordinul 2 cu funcția de transfer $\frac{As + B}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$. În schema din fig.

12, primele două subsisteme de ordinul 1 se înlocuiesc prin subsistemul de ordinul 2 menționat și se obține schema dată în fig. 14.

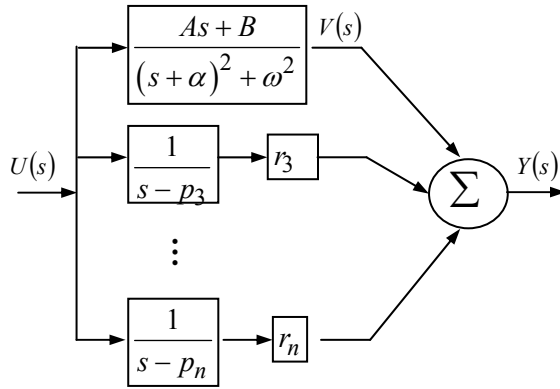


Fig. 14 Descompunerea modală a unui sistem cu poli complecși conjugăți

Deoarece subsistemul de ordinul 2 are modelul de stare

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A \\ \frac{1}{\omega}(B + \alpha A) \end{bmatrix} u \quad (26)$$

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

sistemul în ansamblu va fi caracterizat de parametrii A , b și c , care au forma următoare :

$$A = \text{diag} \left(\begin{bmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{bmatrix}, p_3, \dots, p_n \right); b = \begin{bmatrix} A \\ \frac{1}{\omega}(B + \alpha A) \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (27)$$

Considerăm că polul p_1 este multiplu, cu grad de multiplicitate m_1 .

În acest caz, descompunerea funcției de transfer $H(s)$ este :

$$H(s) = \frac{r_{11}}{(s-p_1)^{m_1}} + \frac{r_{12}}{(s-p_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{r_{1m_1}}{s-p_1} + \frac{r_{m_1+1}}{s-p_{m_1+1}} + \dots + \frac{r_n}{s-p_n} \quad (28)$$

în care

$$r_{1j} = \frac{1}{(j+1)!} \frac{d^{j-1}}{ds^{j-1}} \left\{ \frac{P(s)}{\prod_{i=m_1+1}^n (s-p_i)} \right\} \Big|_{s=p_1}, \quad j = \overline{1, m_1} \quad (29)$$

Expresia (28) conduce la reprezentarea sistemului prin schema bloc din fig. 15, în care sunt atașate variabile de stare la ieșirile subsistemelor elementare. Pe baza acestei reprezentări, se obțin ecuațiile de stare și de ieșire ale sistemului :

$$\begin{cases} \dot{x}_j = p_1 x_j + x_{j+1}; & \overline{j=1, m_1-1} \\ \dot{x}_{m_1} = p_1 x_{m_1} + u \\ \dot{x}_i = p_i x_i + u; & \overline{i=m_1+1, n} \end{cases}; \quad y = \sum_{j=1}^{m_1} r_{1,j} x_j + \sum_{i=m_1+1}^n r_i x_i \quad (30)$$

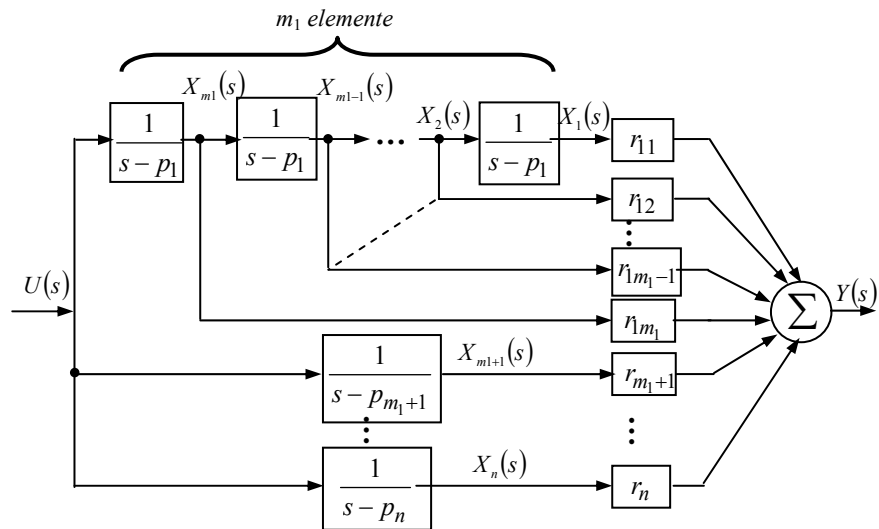


Fig. 15 Descompunerea modală a unui sistem cu un pol având ordinul de multiplicitate m_1

Parametrii matriceali ai modelului de stare sunt:

$$A = \text{diag}(J_1, p_{m_1+1}, \dots, p_n) ; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad c = \begin{bmatrix} r_{1,1} \\ r_{1,2} \\ \vdots \\ r_{1,m_1} \\ r_{m_1+1} \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} ; \quad \text{cu } J_1 = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & p_1 \end{bmatrix} \quad (31)$$

în care J_1 se numește bloc Jordan.

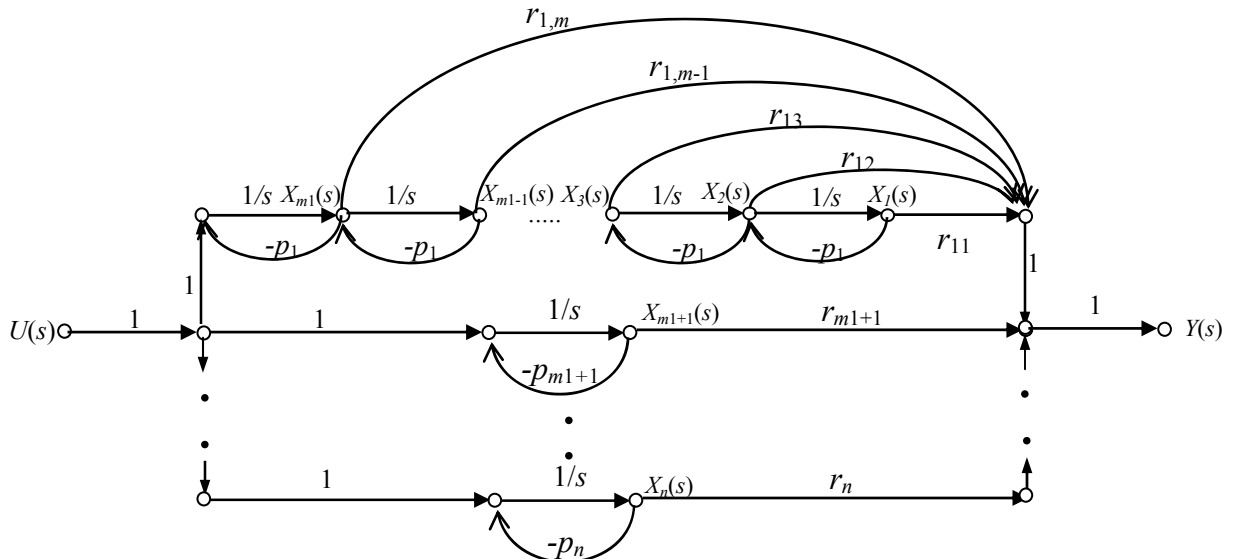


Fig. 16 Descomunerea modală a unui sistem având un pol cu ordin de multiplicitate m_1

Graful sistemului, corespunzător schemei bloc din fig. 15, este dat în fig. 16.