

## CURS 14

### 3.2 Parametrii matriceali ai diporților

Indiferent de structura internă a unui diporț, relațiile matematice dintre mărimile electrice aferente celor două porți pot fi exprimate în mai multe moduri. Intrucât fiecare poartă este caracterizată de două mărimi – tensiune și curent – modelele matematice se exprimă prin intermediul unor parametri matriceali, care vor fi prezentați în cele ce urmează.

**3.2.1 Parametrii Z** explicităză tensiunile în funcție de curenți :

$$\begin{aligned} U_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ U_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (54)$$

Semnificația fizică a parametrilor Z rezultă din relațiile (54) :

$$Z_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (55)$$

deci  $Z_{11}$  este impedența de intrare la poarta 1, atunci când poarta 2 este în gol.

În mod similar

$$Z_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad (56)$$

adică  $Z_{22}$  este impedența de intrare la poarta 2, atunci când poarta 1 este în gol.

Dacă

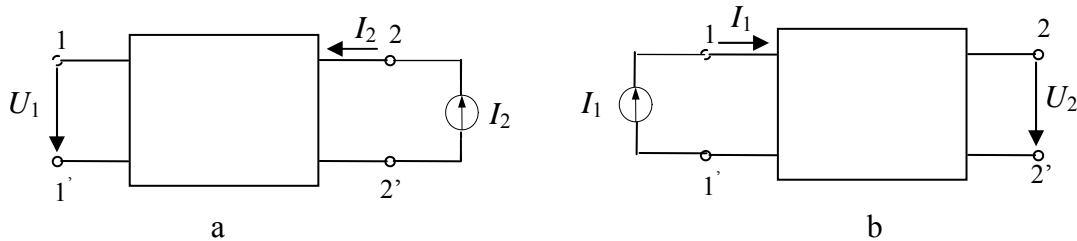
$$Z_{11} = Z_{22} \quad (57)$$

diporțul este *simetric* și parametrii porților sunt aceiași.

Impedanțele de transfer  $Z_{12}$  și  $Z_{21}$  se definesc prin relațiile

$$Z_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0} ; \quad Z_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad (58)$$

Deducerea acestor parametri se face prin intermediul schemelor din fig. 37. Astfel, pentru determinarea parametrului  $Z_{12}$ , se consideră la poarta 2 o sursă de curent  $I_2$  și se



**Fig. 37** Schemele prin care se deduc parametrii  $Z_{12}$  (a) și  $Z_{21}$  (b)

determină tensiunea în gol la poarta 1,  $U_1$  (fig. 37.a). În aceste condiții, raportul  $U_1 / I_2$  este parametrul  $Z_{12}$ . Pentru  $Z_{21}$ , se conectează la poarta 1 sursa de curent  $I_1$  și se determină tensiunea în gol la poarta 2,  $U_2$  (fig. 37.b). Raportul  $U_2 / I_1$  este parametrul  $Z_{21}$ .

Dacă

$$Z_{12} = Z_{21} \quad (59)$$

diportul este *reciproc*.

Dacă se definesc vectorii tensiunilor și curenților,

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (60)$$

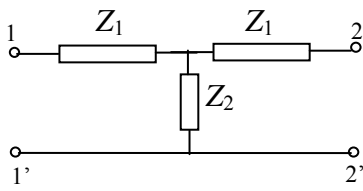
atunci modelul (54) se poate scrie sub formă matriceală

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \mathbf{I} \quad (61)$$

în care matricea  $\mathbf{Z}$  este

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (62)$$

**Aplicații 1.** Fie diportul din fig. 38. Să se determine parametrii  $\mathbf{Z}$ .



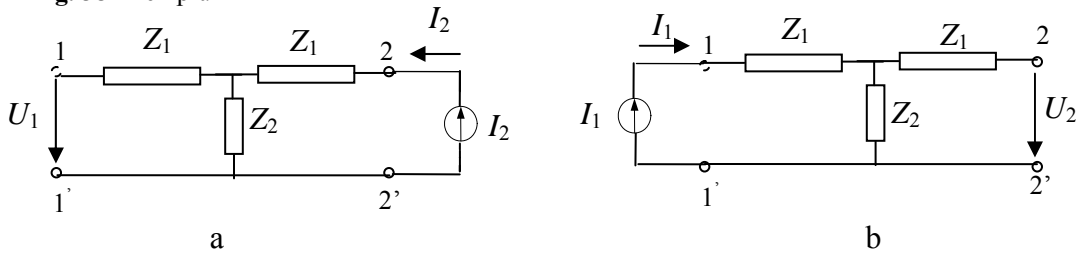
**Fig. 38** Exemplul 1

Impedanțele de intrare la porțile 1 sau 2, când porțile 2, respectiv 1 sunt în gol sunt :

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2$$

$$Z_{22} = Z_1 + Z_2$$

Pentru determinarea impedanței  $Z_{12}$  se consideră



**Fig. 39** Calculul parametrilor  $Z_{12}$  (a) și  $Z_{21}$  (b) pentru un exemplu de diport

schema din fig. 39.a. Curentul  $I_2$  parcurge impedanțele  $Z_1$  și  $Z_2$ , producând pe  $Z_2$  căderea de tensiune  $Z_2 I_2$ . Această cădere de tensiune se transmite integral la poarta 1, deoarece circuitul porții 1 este în gol. Deci,  $U_1 = Z_2 I_2$  și

$$Z_{12} = \frac{Z_2 I_2}{I_2} = Z_2$$

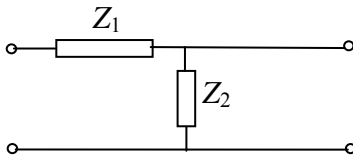
În mod similar, utilizând schema din fig. 39.b, se obține:  $Z_{21} = \frac{Z_2 I_1}{I_1} = Z_2$

Matricea  $\mathbf{Z}$  a diportului este

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_1 + Z_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

2. Pentru diportul din fig. 40, matricea  $\mathbf{Z}$  este

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 \end{bmatrix} \quad (64)$$



**Fig. 40** Exemplul 2

Diportul este nesimetric, însă reciproc.

**Observație** Parametrii  $\mathbf{Z}$  sunt importanți deoarece ei se pot calcula cu ușurință pornind de la schema electrică a diportului. Ei se mai numesc *parametrii de gol ai diportului*.

**3.2.2 Parametrii Y** explicitează curenții în funcție de tensiuni :

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}U_1 + Y_{12}U_2 \\ I_2 &= Y_{21}U_1 + Y_{22}U_2 \end{aligned} \quad (65)$$

Semnificația parametrilor rezultă din relațiile

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} ; Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} ; Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} ; Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad (66)$$

$Y_{11}$  și  $Y_{22}$  sunt admitanțele de intrare la poțile 1 și 2, atunci când poțile opuse sunt în scurtcircuit.  $Y_{12}$  este admitanța de transfer, când mărimea “cauză” este tensiunea  $U_2$  iar mărimea “effect” este curentul  $I_1$ , când poarta 1 este în scurtcircuit. Admitanța de transfer  $Y_{21}$  se definește în mod similar.

Ecuția matriceală a diportului este

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y} \mathbf{U} \quad (61)$$

în care matricea  $\mathbf{Y}$  este

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta \mathbf{Z}} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix} \quad (62)$$

unde  $\Delta \mathbf{Z} = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$  este determinantul matricei  $\mathbf{Z}$ .

Condițiile de simetrie (57) și de reciprocitate (59) devin

$$Y_{11} = Y_{22} \quad (63)$$

respectiv

$$Y_{12} = Y_{21} \quad (64)$$

**3.2.3 Parametrii fundamentali (de lanț) A.** Acești parametri explicitează tensiunea și curentul de la poarta 1 în funcție de tensiunea și curentul de la poarta 2, în situația **când transferul semnalului se face de la poarta 1 la poarta 2** :

$$U_1 = A_{11}U_2 - A_{12}I_2 \quad (65)$$

$$I_1 = A_{21}U_2 - A_{22}I_2 \quad (66)$$

Semnul minus din relațiile (65) și (66) provine din faptul că sensul curentului  $I_2$  (v. fig. 31) este invers față de sensul de propagare a semnalului. Semnificația fizică a parametrilor se deduce prin aceeași procedură ca în cazurile anterioare :  $A_{11}$  este o funcție de transfer pentru tensiune, cu ieșirea în gol,  $A_{22}$  este o funcție de transfer pentru curent, cu ieșirea în scurtcircuit, iar  $A_{12}$  și  $A_{21}$  sunt o impedanță de transfer, respectiv o admitanță de transfer. Se observă că toți parametri descriu un transfer, de aceea ei se mai numesc *parametri de transfer*.

În formă matriceală, aceste ecuații se scriu sub forma

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (67)$$

Dacă se explicitează modelul diportului sub forma parametrilor  $\mathbf{Z}$ , pornind de la parametrii  $\mathbf{A}$ , rezultă

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{A_{21}} & \frac{\Delta A}{A_{21}} \\ 1 & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

în care  $\Delta A = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21}$ . Pe baza relațiilor (57), (59) și (68), se obțin condițiile de simetrie

$$A_{11} = A_{22} \quad (69)$$

și de reciprocitate

$$\Delta A = 1 \quad (70)$$

**3.2.4 Parametrii fundamentali inverși, B,** sunt similari celor anteriori, cu deosebirea că se consideră sensul de propagare a semnalului de la poarta 2 la poarta 1. În formă matriceală, modelul diportului este

$$\begin{bmatrix} U_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ -I_1 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Semnul minus aferent curentului  $I_1$  provine din faptul că sensul acestui curent este invers față de sensul de propagare a semnalului.

**3.2.5 Parametrii hibridi** sunt definiți prin relațiile

$$\begin{aligned} U_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}U_2 \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}U_2 \end{aligned} \quad (72)$$

sau, în formă matriceală,

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (73)$$

Condiția de simetrie este  $\Delta \mathbf{h} = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = 1$ , iar condiția de reciprocitate este  $h_{12} = -h_{21}$ .

**3.2.6 Parametrii hibridi inverși** sunt definiți prin relațiile

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}U_1 + g_{12}I_2 \\ U_2 &= g_{21}U_1 + g_{22}I_2 \end{aligned} \quad (72)$$

sau, în formă matriceală,

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (73)$$

unde  $\mathbf{G} = \mathbf{H}^{-1}$ .

### 3.3 Conexiunile diporturilor

**1 Conexiunea în serie** (fig. 41) implică legarea în serie a porților, astfel încât:

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1' + U_1'' \\ U_2 &= U_2' + U_2'' \end{aligned} \quad (74)$$

Dacă între cei doi diporturi nu apare o circulație de curent, adică  $I=0$  (v. fig. 41), atunci

$$I_1' = I_1'' = I_1 \quad (75)$$

și

$$I_2' = I_2'' = I_2 \quad (76)$$

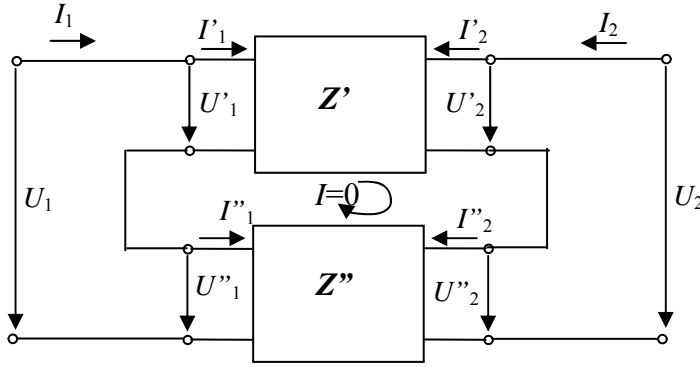


Fig. 41 Conexiunea în serie a diporților

Modelele celor doi diporți se exprimă prin parametrii  $Z$ , adică

$$U' = Z' I'; \quad U'' = Z'' I'' \quad (77)$$

în care

$$U' = \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix}; \quad U'' = \begin{bmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix}; \quad I' = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix}; \quad I'' = \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix} \quad (78)$$

Modelul conexiunii în serie este

$$U = Z I \quad (79)$$

în care

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' + U_1'' \\ U_2' + U_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1' \\ U_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1'' \\ U_2'' \end{bmatrix} = U' + U'' \quad (80)$$

și

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1'' \\ I_2'' \end{bmatrix}, \quad \text{deci} \quad I = I' = I'' \quad (81)$$

Din relațiile (77), (79), (80) și (81) rezultă

$$U = U' + U'' = Z' I' + Z'' I'' = Z' I + Z'' I = (Z' + Z'') I \quad (82)$$

deci

$$Z = Z' + Z'' \quad (83)$$

În concluzie, la conectarea în *serie* a diporților, matricele  $Z$  aferente se *însușează*.

**2 Conexiunea în paralel** (fig. 42). În acest caz, porțile se conectează în paralel și rezultă :

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_1'' \\ I_2 &= I_2' + I_2'' \end{aligned} \quad (84)$$

$$U_1' = U_1'' = U_1 ; \quad U_2' = U_2'' = U_2 \quad (85)$$

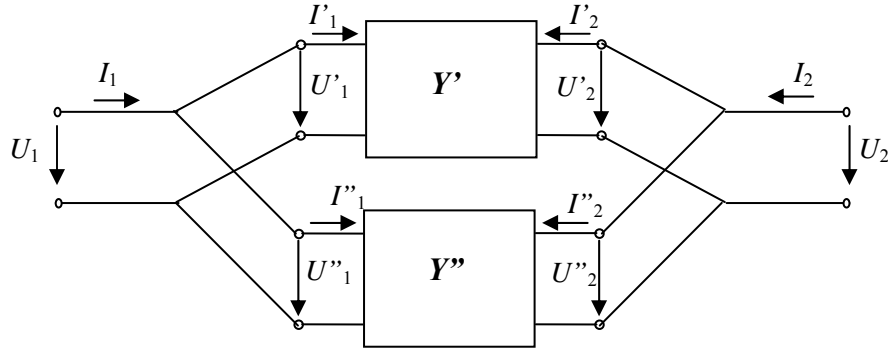


Fig. 42 Conexiunea în paralel a diporturilor

În acest caz, modelele diporturilor se exprimă prin parametrii  $Y$ , adică

$$I' = Y' U'; \quad I'' = Y'' U'' \quad (86)$$

$$I = Y U \quad \text{unde} \quad I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (87)$$

Deoarece

$$I = I' + I'' \quad \text{și} \quad U = U' = U'' \quad (88)$$

se obține

$$I = Y' U' + Y'' U'' = Y' U + Y'' U = (Y' + Y'') U \quad (89)$$

deci

$$Y = Y' + Y'' \quad (90)$$

**3 Conexiunea serie-paralel.** Porțile 1 ale diporturilor se conectează în serie iar porțile 2 în paralel (fig. 43).

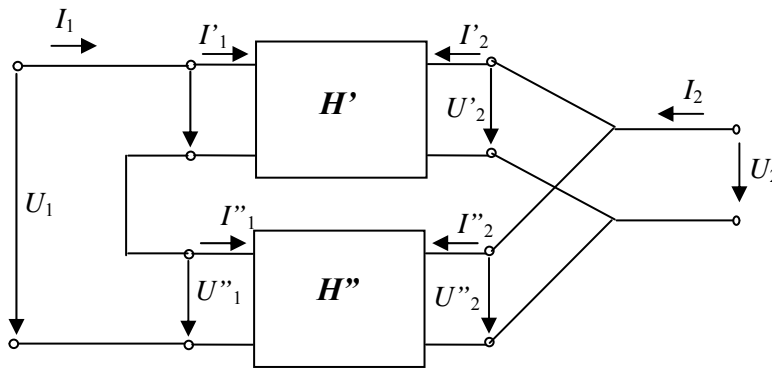
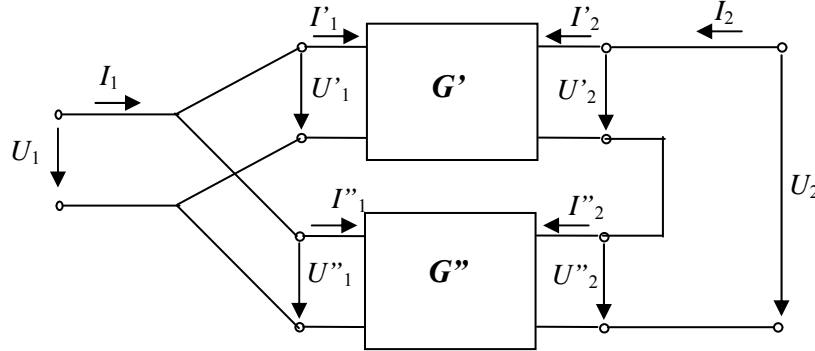


Fig. 43 Conexiunea în serie-paralel a diporturilor

Dacă se dezvoltă modelele matematice după modelul cazurilor anterioare, se demonstrează că diportul rezultat are matricea  $H$  egală cu suma matricelor  $H'$  și  $H''$  ale diporturilor interconectați :

$$H = H' + H'' \quad (91)$$

**4 Conexiunea paralel-serie** (fig. 44). In acest caz, diportul rezultat are matricea  $G$

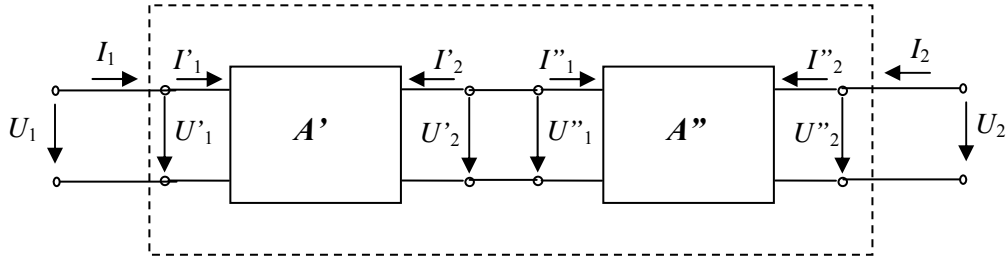


**Fig. 44** Conexiunea în paralel-serie a diporturilor

egală cu suma matricelor  $G'$  și  $G''$  ale diporturilor interconectate :

$$G = G' + G'' \quad (92)$$

**5 Conexiunea în cascadă (în lanț)** este cea mai importantă și răspândită conexiune a diporturilor (fig. 45).



**Fig. 44** Conexiunea în cascadă (în lanț) a diporturilor

Modelul matematic al conexiunii în cascadă se exprimă prin parametrii fundamentali (A). Pentru întreaga conexiune, se poate scrie

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Dar

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U'_1 \\ I'_1 \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} U'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} \quad (94)$$

Prin conectarea porții 2 a primului diport cu poarta 1 a celui de al doilea, rezultă

$$\begin{bmatrix} U'_2 \\ -I'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U''_1 \\ I''_1 \end{bmatrix} \quad (95)$$

și relația (94) se poate dezvolta astfel:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} U_2' \\ -I_2' \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} U_1'' \\ I_1'' \end{bmatrix} = A' A'' \begin{bmatrix} U_2'' \\ -I_2'' \end{bmatrix} = A' A'' \begin{bmatrix} U_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad (96)$$

Din relațiile (93) și (96) rezultă

$$A = A' A'' \quad (97)$$

### 3.4 Structuri uzuale de diporți

Cele mai întâlnite structuri de diporți sunt: în T (fig. 45.a), în II (fig. 45.b), în T podit (TP), (fig. 45.c), în dublu T (fig. 45.d), în  $\Gamma$  întors (fig. 45.e), în  $\Gamma$  (fig. 45.f) și în X (fig. 45.g). Diportii de tip T, II, TP și dublu T pot fi simetrici față de o axă mediană verticală. Simetria fizică implică și simetria electrică. Diportul în X poate fi considerat cu o simetrie atât în raport cu o axă verticală, cât și în raport cu o axă orizontală. Un diport se numește echilibrat, dacă are o simetrie față de o axă orizontală. Ambele borne ale porților unui diport echilibrat, așa cum este diportul în X, sunt borne „calde” (de potențial variabil), în timp ce la diportii neechilibrați, porțile au o bornă „caldă” și o bornă „rece”.

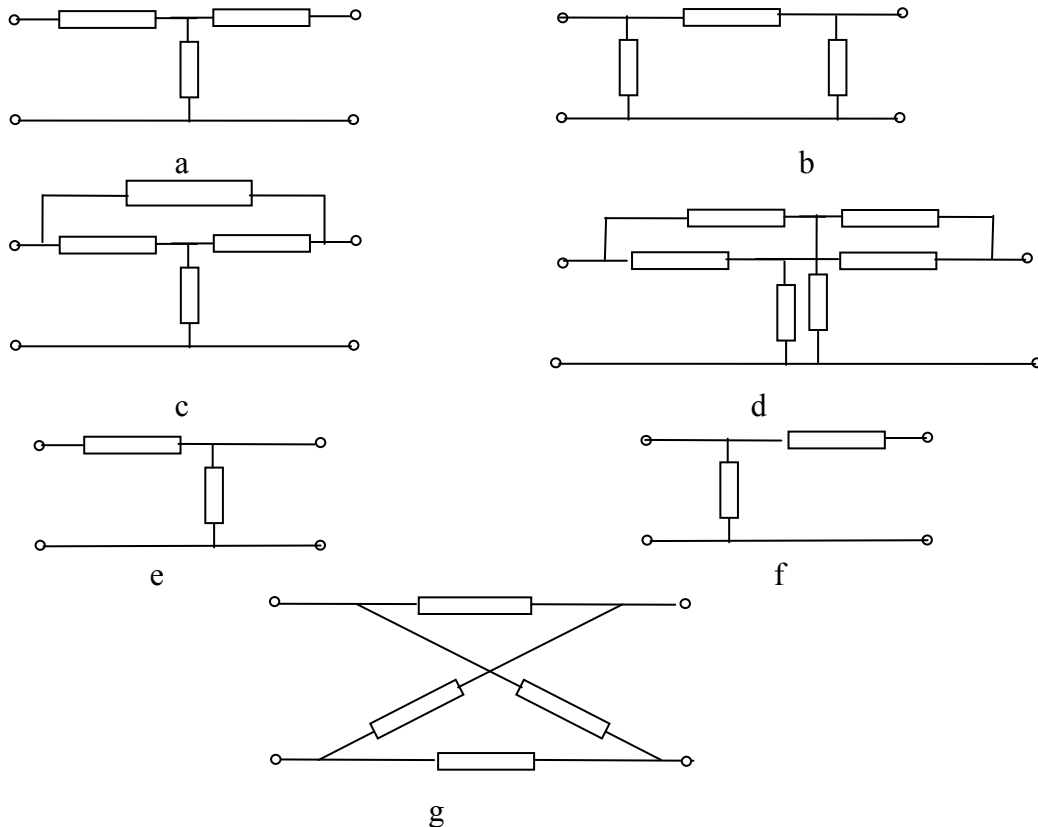


Fig.45 Tipuri uzuale de diporți

O structură generală de diport este cea în scară (fig. 47).

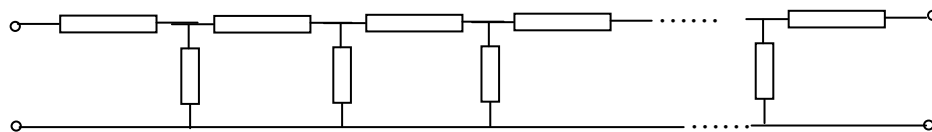


Fig. 47 Diport cu structură în scară



Se numește ***zero de transmisie*** al unui diport ***frecvența*** la care transferul semnalului între porți se anulează. Dacă ne referim la un diport în scară (fig. 47), observăm că el conține uniporturi conectați longitudinal și uniporturi conectați transversal. Așa cum s.a arătat în capitolul anterior, la o frecvență de rezonanță serie, uniportul are impedanța zero, iar la o frecvență de rezonanță derivație, uniportul are impedanța infinită. Rezultă că toate frecvențele de rezonanță serie ale uniporturilor transversali (la care transferul semnalului este blocat prin șuntare) și toate frecvențele de rezonanță derivație ale uniporturilor longitudinale (la care transferul semnalului este blocat prin întrerupere) reprezintă zerouri de transmisie ale diportului.