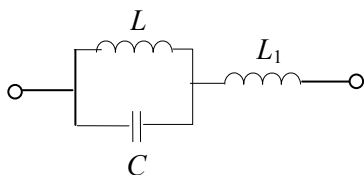


## CURS 13

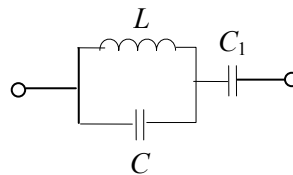
### 2.3 Scheme generale de uniporturi LC

Pornind de la uniportii **S** (serie) și **D** (derivație), se va stabili o regulă de generare a unor uniporturi mai complicate. La oricare din cei doi uniporturi se adaugă un nou element ( $L$  sau  $C$ ). Dacă uniportul inițial este de tip derivație (**D**), atunci noul element se conectează în serie ; dacă uniportul inițial este de tip serie (**S**), atunci noul element se conectează în derivație.

Fie, spre exemplu, uniportul inițial de tip **D** și se adaugă o inductivitate,  $L_1$ . Se obține uniportul **DL**, care are schema din fig. 16. Dacă se adaugă o capacitate,  $C_1$ , atunci se

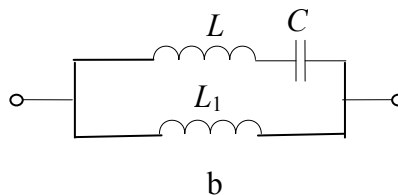
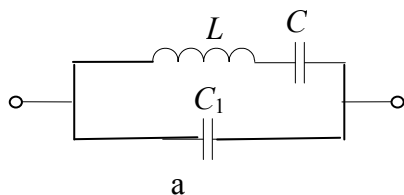


**Fig. 16.** Uniportul **DL**



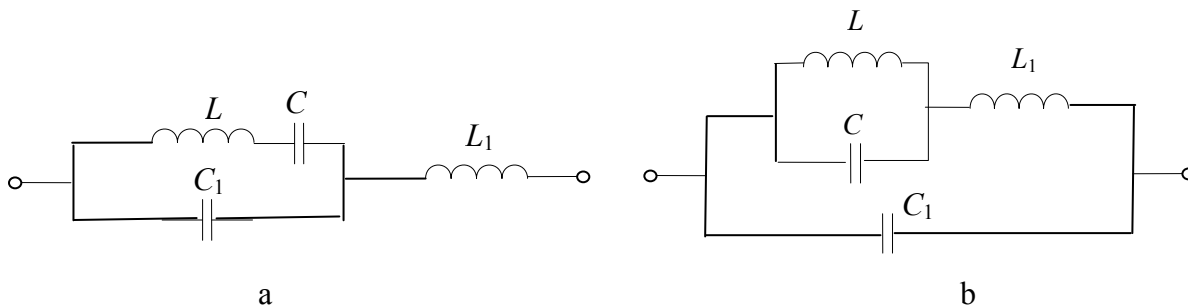
**Fig. 17.** Uniportul **DC**

obține uniportul **DC** (fig. 17). Atunci când uniportul inițial este de tip **S**, elementul adăugat se conectează în paralel. Schemele care rezultă, de tip **SC** și **SL**, sunt date în fig.

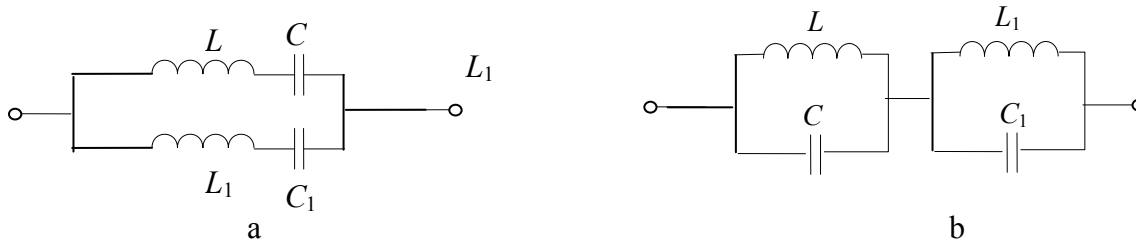


**Fig. 18.** Uniporturi **SC** (a) și **SL** (b)

18. Procedura aplicată se poate aplica recursiv : dacă anterior s-a adăugat o capacitate, atunci noul element adăugat va fi o inductivitate ; dacă anterior s-a adăugat o inductivitate, atunci noul element adăugat va fi o capacitate. Dacă anterior elementul s-a



**Fig. 19.** Uniporturi **SCL** (a) și **DLC** (b)



**Fig. 20** Uniporturi **SS** (a) și **DD** (b)

adăugat în serie, atunci noul element va fi conectat în paralel la gruparea anterioară, și invers. Pentru ilustrarea acestei proceduri, în fig. 19 sunt prezentate structurile uniporturilor **SCL** și **DLC**. Unei grupări inițiale, **S** sau **D**, i se poate adăuga în paralel, respectiv în serie, o grupare de același tip, obținându-se uniporturi **SS** și **DD** (fig. 20).

Construcția caracteristicii  $X(\omega)$  a unui uniport, astfel constituit, va fi analizată în cele ce urmează. Fie cazul unui uniport foarte simplu, de exemplu **DL**. Construcția caracteristicii de reactanță este ilustrată în fig. 21. Întrucât circuitul **D** se înseriază cu inductivitatea  $L_1$ , reactanța întregului uniport este obținută prin însumarea reactanței circuitului **D** cu reactanța  $\omega L_1$  a inductivității  $L_1$ . Cele două componente menționate sunt reprezentate în fig. 21 cu linie întreruptă, iar suma lor – reprezentând reactanța uniportului **DL** – este desenată cu linie plină îngroșată. Se observă că acest uniport are un pol la pulsația  $\omega_1$  (rezonanță derivație) și un zero la pulsația  $\omega_2$  (rezonanță serie).

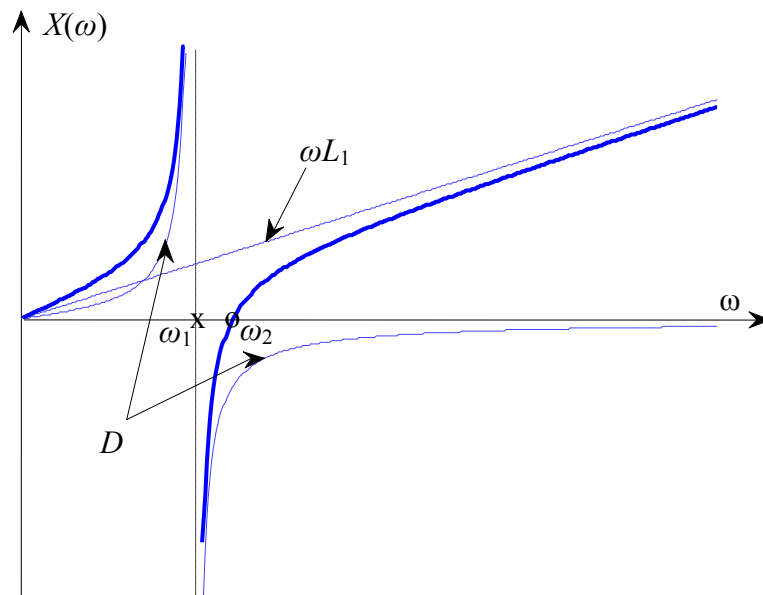


Fig. 17 Caracteristica  $X(\omega)$  a uniportului **DL**

Pentru reprezentarea schematică și expeditivă a caracteristicii de reactanță a unui uniport se utilizează **diagrame poli-zerouri**. Acestea conțin o axă având la capete pulsațiile  $\omega = 0$  și  $\omega = \infty$ . La aceste pulsații, uniportul are poli și/sau zerouri. Pe axa pulsațiilor se marchează rezonanțele circuitului, adică polii (rezonanțe derivație) și zerourile (rezonanțe serie). În fig. 18 este ilustrată diagrama poli-zerouri a uniportului **DL**, care poate fi utilizată în locul caracteristicii  $X(\omega)$  din fig. 17.

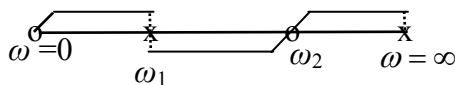


Fig. 18 Diagrama poli-zerouri a uniportului **DL**

În cazul general, când structura uniportului este mai complicată, utilizarea unei proceduri similare celei adoptate la uniportul **DL** este incomodă. De regulă, este util să determinăm **forma calitativă** a funcției de reactanță, fără precizarea cantitativă a parametrilor acesteia (de ex., valorile numerice ale pulsațiilor de rezonanță). În acest scop, cunoscând că **funcția de reactanță este mereu crescătoare cu frecvența**, trebuie să se determine:

- valoarea reactanței la pulsația  $\omega = 0$ ;
- valoarea reactanței la pulsația  $\omega = \infty$ ;
- numărul de rezonanțe,  $n_r$ .

Cunoscând aceste date, se trasează calitativ funcția crescătoare  $X(\omega)$ , pe baza următoarei proceduri :

1. se determină, prin inspectarea schemei, valoarea  $X(0)$ . Dacă există o cale de curent între bornele circuitului, care să includă numai inductivități (reactanța unei bobine ideale este zero la  $\omega = 0$ ), atunci  $X(0) = 0$ . În caz contrar,  $X(0) = -\infty$  (reactanța unui condensator ideal este  $-\infty$  la  $\omega = 0$ ) ;
2. se determină, prin inspectarea schemei,  $X(\infty)$ . Dacă există o cale de curent între bornele circuitului, care să includă numai capacități (reactanța unui condensator ideal este zero la  $\omega = \infty$ ), atunci  $X(\infty) = 0$ . În caz contrar,  $X(\infty) = \infty$  (reactanța unei bobine la  $\omega = \infty$  este  $\infty$ ) ;
3. fie  $n_L$  numărul de inductivități și  $n_C$  numărul de capacități din uniport. Dacă uniportul a fost alcătuit după procedura prezentată anterior, atunci  $n_L$  și  $n_C$  nu pot să difere mai mult de o unitate. Dacă  $n_L = n_C = n$ , atunci numărul de rezonanțe este  $n_r = 2n - 1$ . Dacă  $|n_L - n_C| = 1$ , atunci  $n_r = 2n$ , unde  $n = \text{Min}\{n_L, n_C\}$  ;
4. cunoscând  $X(0)$ ,  $X(\infty)$  și  $n_r$ , precum și faptul că funcția de reactanță este crescătoare cu frecvența, se trasează caracteristica  $X(\omega)$ .

**Example 1.** Fie uniportul **DC** (fig. 17). Aici  $X(0) = -\infty$ ;  $X(\infty) = 0$ ;  $n_L = 1$ ;  $n_C = 2$ , deci  $n = 1$ ;  $n_r = 2n = 2$  și caracteristica

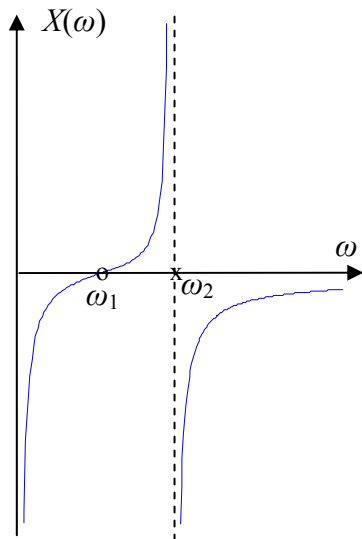
$X(\omega)$  are forma din fig. 22. Diagrama poli-zero-uri este dată în fig. 23.

2. Uniportul **SC** (fig. 18.a) are  $X(0) = -\infty$ ;  $X(\infty) = 0$ ;  $n_L = 1$ ;  $n_C = 2$ ;  $n = 1$ ;  $n_r = 2$ . Caracteristica  $X(\omega)$  are forma din fig. 22 iar diagrama poli-zero-uri este de forma celei din fig. 23.

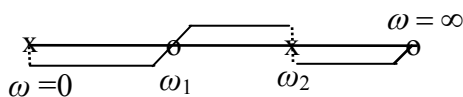
3. Uniportul **SL** (fig. 18.b) are  $X(0) = 0$ ;  $X(\infty) = \infty$ ;  $n_L = 2$ ;  $n_C = 1$ ;  $n = 1$ ;  $n_r = 2$ . Caracteristica  $X(\omega)$  are forma din fig. 17 iar diagrama poli-zero-uri este de forma celei din fig. 18.

4. Uniportul **SCL** (fig. 19.a) are  $X(0) = -\infty$ ;  $X(\infty) = \infty$ ;  $n_L = 2$ ;  $n_C = 2$ ;  $n_r = 3$ . Caracteristica  $X(\omega)$  are forma din fig. 24 iar diagrama poli-zero-uri este dată în fig. 25.

5. Uniportul **DLC** (fig. 19.b) are  $X(0) = 0$ ;  $X(\infty) = 0$ ;  $n_L = 2$ ;  $n_C = 2$ ;  $n_r = 3$ . Caracteristica  $X(\omega)$  și diagrama poli-



**Fig. 22** Caracteristica  $X(\omega)$  a uniportului **DC**



**Fig. 23** Diagrama poli-zero-uri a uniportului **DC**

zerouri sunt date în fig. 26, respectiv fig. 27.

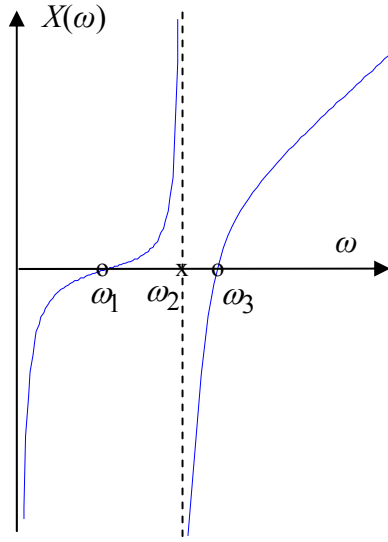


Fig. 24 Caracteristica  $X(\omega)$  a unuiportului SCL

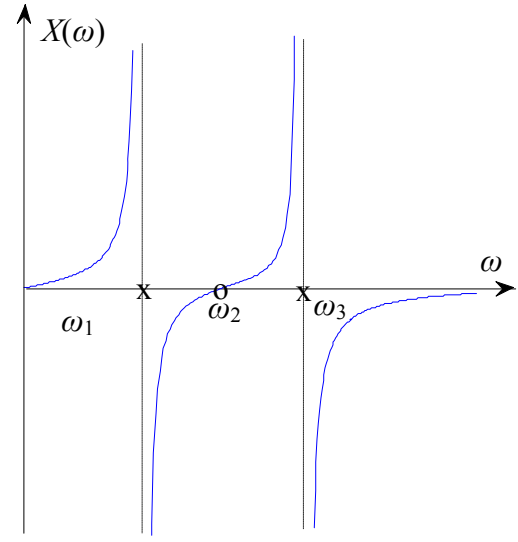


Fig. 26 Caracteristica  $X(\omega)$  a unuiportului DLC

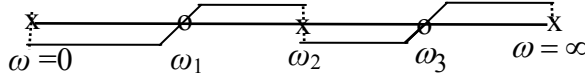


Fig. 25 Diagrama poli-zerouri a unuiportului SCL

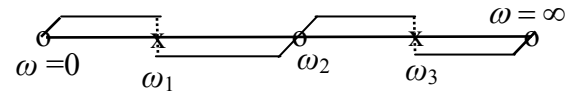


Fig. 27 Diagrama poli-zerouri a unuiportului DLC

6. Uniportul **SS** (fig. 20.a) are  $X(0)=-\infty$ ;  $X(\infty)=\infty$ ;  $n_L=2$ ;  $n_C=2$ ;  $n_r=3$ . Caracteristica  $X(\omega)$  și diagrama poli-zerouri sunt similare celor de la uniportul **SCL** (fig. 24 și fig. 25).

7. Uniportul **DD** (fig. 20.b) are  $X(0)=0$ ;  $X(\infty)=0$ ;  $n_L=2$ ;  $n_C=2$ ;  $n_r=3$ . Caracteristica  $X(\omega)$  și diagrama poli-zerouri sunt similare celor de la uniportul **DLC** (fig. 26 și fig. 27).

**Observație** Intotdeauna *polii si zerourile alternează pe axa frecvențelor*. Deci, după o rezonanță serie poate urma doar o rezonanță derivație, iar după o rezonanță derivație poate urma doar o rezonanță serie.

## 2.4 Echivalența uniporturilor

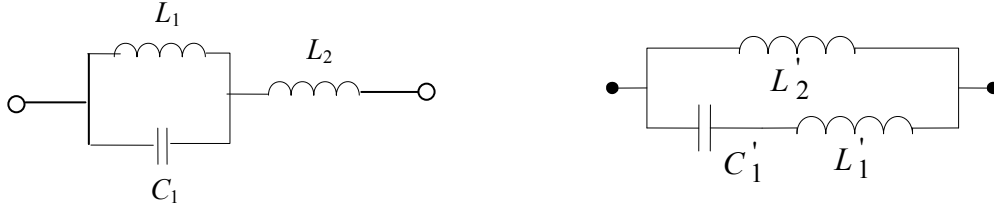
Doi uniporturi sunt *potențial echivalenți* dacă funcțiile lor de reactanță au aceeași alură. Din exemplele prezentate în secțiunea anterioară, s-a constatat că sunt potențial echivalenți următorii uniporturi: **SL** și **DL**; **SC** și **DC**; **SCL** și **SS**; **DLC** și **DD**.

Uniportii sunt *echivalenți* dacă au funcțiile de reactanță *identice*. În acest caz, un uniport poate fi înlocuit cu unul echivalent.

**Exemplu.** Fie doi uniporturi potențial echivalenți : **DL** și **SL** (fig. 28). Pentru uniportul **DL** expresia reactanței este :

$$X_1(\omega) = \omega L_2 \frac{\omega_2^2 - \omega^2}{\omega_1^2 - \omega^2} \quad (35)$$

în care  $\omega_1^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ ;  $\omega_2^2 = \frac{L_1 + L_2}{C_1 L_1 L_2}$



**Fig. 28** Uniporturi potențial echivalenți

Pentru uniportul **SL** reactanța este

$$X_2(\omega) = \omega \frac{L_1' L_2'}{L_1' + L_2'} \frac{\omega_2'^2 - \omega^2}{\omega_1'^2 - \omega^2} \quad (36)$$

în care  $\omega_1'^2 = \frac{1}{(L_1' + L_2') C_1'}$ ;  $\omega_2'^2 = \frac{1}{L_1' C_1'}$

Dacă se impun condițiile

$$\begin{cases} L_2 = \frac{L_1' L_2'}{L_1' + L_2'} \\ \frac{1}{L_1 C_1} = \frac{1}{(L_1' + L_2') C_1'} \\ \frac{L_1 + L_2}{C_1 L_1 L_2} = \frac{1}{L_1' C_1'} \end{cases} \quad (37)$$

atunci cei doi uniporturi vor fi echivalenți. Ecuațiile (37) se pot rezolva într-un sens sau altul, pentru trecerea de la circuitul **SL** la **DL**, sau invers. Se observă că ecuațiile algebrice respective sunt nelineare, ceea ce implică – de regulă – apelarea metodelor numerice.

## 2.5 Inversarea uniporturilor

Fie doi uniporturi care au funcțiile de reactanță și de susceptanță  $X_1(j\omega)$  și  $B_1(j\omega)$ , respectiv  $X_2(j\omega)$  și  $B_2(j\omega)$ . Dacă graficele funcțiilor  $X_1(j\omega)$  și  $B_2(j\omega)$ , sau  $X_2(j\omega)$  și  $B_1(j\omega)$ , au aceeași alură, atunci uniporturile respective sunt **potențial inversi**.

Doi uniporturi de impedanțe complexe  $Z_1(j\omega)$  și  $Z_2(j\omega)$  sunt **inversi în raport cu rezistența  $R$** , dacă

$$Z_1(j\omega) Z_2(j\omega) = R^2 \quad (38)$$

$R$  se numește constantă (rezistență) de inversiune.

Fie  $Z_1(j\omega) = j\omega L$  și  $Z_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$ . Impunând condiția (38), rezultă

$$j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C} = R^2 \text{ sau } \frac{L}{C} = R^2 \quad (39)$$

Deci, **prin inversare, o inductivitate se transformă în capacitate și invers**. Legătura dintre parametrii  $L$  și  $C$ , obținuți prin inversarea în raport cu rezistența  $R$ , este dată de relația (39).

Fie impedanțele complexe  $Z_i(j\omega)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , conectate în serie (fig. 29.a). Uniportul respectiv are impedanța

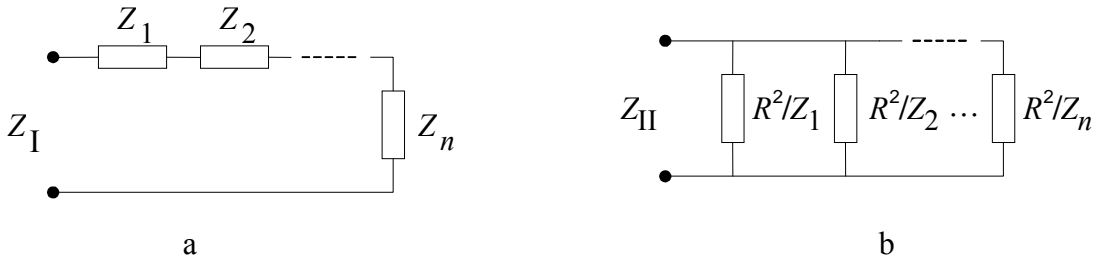


Fig. 29 Inversarea unui circuit serie

$$Z_I(j\omega) = \sum_{i=1}^n Z_i(j\omega) \quad (40)$$

Se va considera în continuare o conexiune în derivație a inverselor în raport cu  $R$  a impedanțelor  $Z_i(j\omega)$  (fig. 29.b). Pentru uniportul de tip derivație se poate scrie :

$$\frac{1}{Z_{II}(j\omega)} = Y_{II}(j\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{Z_i(j\omega)}{R^2} = \frac{1}{R^2} Z_I(j\omega)$$

sau

$$Z_I(j\omega)Z_{II}(j\omega) = R^2 \quad (41)$$

În concluzie, **prin inversare, o conexiune serie a impedanțelor se transformă într-o conexiune derivație a inverselor impedanțelor respective**. La fel, o conexiune derivație de impedanțe se transformă într-o conexiune serie a inverselor impedanțelor respective.

**Exemplu.** Fie uniportul din fig. 30.a, care trebuie inversat în raport cu  $R = 1 \text{ k}\Omega$ .

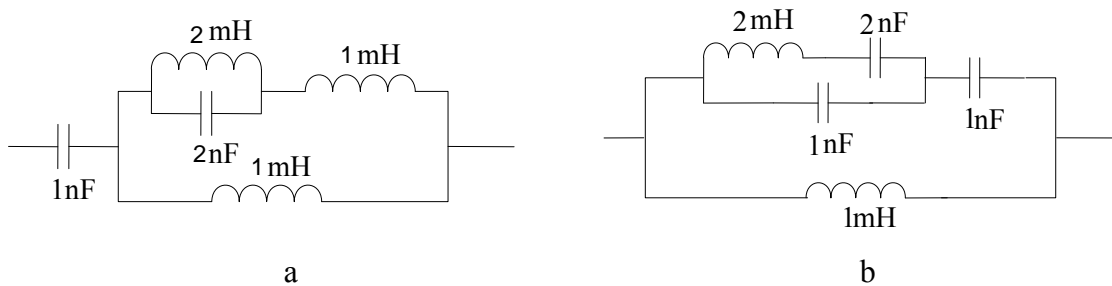


Fig. 30 Inversarea unui uniport (exemplu)

Aplicând regulile deduse anterior, se obține uniportul invers din fig. 30.b. Prin inversarea capacității de  $1 \text{ nF}$  se obține inductivitatea  $L = CR^2 = 10^{-9} \cdot 10^6 = 10^{-3} = 1 \text{ mH}$ . Evident, inversând  $C = 2 \text{ nF}$  se obține  $L = 2 \text{ mH}$ . Prin inversarea inductivităților de  $1 \text{ mH}$

și 2 mH se obțin capacitățile de 1 nF, respectiv 2 nF (pentru  $L=1$  mH, rezultă  $C = L/R^2 = 10^{-3}/10^6 = 10^{-9} = 1$  nF)

### 3. Diporți

În acest capitol se prezintă proprietățile generale ale diporților, descriși în reprezentarea generală, dată fig. 31. Rezultatele obținute vor fi valorificate în capitolul

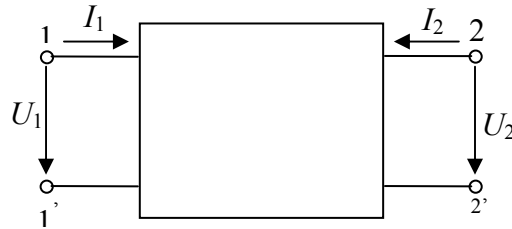


Fig. 31 Diporț

următor, în care se analizează o serie de diporți uzuali (transformatorul, filtre cu diferite proprietăți etc).

#### 3.1 Diporți ideali

**3.1.1 Transformatorul ideal** (fig. 32). Idealizarea transformatorului implică următoarele ipoteze:

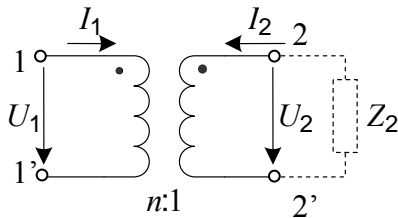


Fig.32 Transformatorul ideal

- rezistențele înfășurărilor sunt nule,
- pierderile în circuitul magnetic sunt nule,
- coeficientul de cuplaj magnetic este unitar (fluxul de scăpări este nul),
- inductivitățile înfășurărilor sunt infinite (curentul de magnetizare este nul).

Transformatorul ideal este caracterizat de un singur parametru : **raportul de transformare  $n$** .

Ecuatiile transformatorului ideal sunt :

$$U_1 = nU_2 \quad (42)$$

$$I_2 = -nI_1 \quad (43)$$

Dacă la poarta 2-2' se conectează impedanța  $Z_2$ , atunci impedanța la poarta 1-1' este

$$Z_1 = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{\frac{U_2}{-I_2} = Z_2} \quad (44)$$

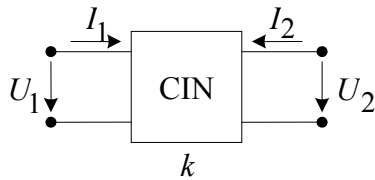
Înlocuind în (44)  $U_1 = nU_2$  și  $I_1 = -I_2 / n$ , se obține

$$Z_1 = n^2 \frac{U_2}{-I_2} = n^2 Z_2 \quad (45)$$

În concluzie, **transformatorul realizează la poarta 1-1' schimbarea scării impedanței conectate la poarta 2-2'**. Schimbarea de scară este de  $n^2$ . Aceasta proprietate esențială este utilizată pentru **realizarea funcțiunii de adaptare**. De exemplu, dacă la bornele unui generator care are rezistența internă egală cu  $40\text{ k}\Omega$  se conectează o rezistență de sarcină de  $4\text{ }\Omega$ , puterea debitată de generator în sarcină este practic nulă. Se cunoaște că **transferul de putere de la generator la sarcină este maxim atunci când rezistența de sarcină este egală cu rezistența internă a generatorului** (teorema transferului maxim de putere). Este clar că, în cazul menționat, există o diferență foarte mare între rezistența internă de  $40\text{ k}\Omega$  a generatorului și rezistență de sarcină de  $4\text{ }\Omega$ . Dacă însă rezistența de  $4\text{ }\Omega$  este conectată la poarta 2-2' a unui transformator cu  $n = 100$ , iar poarta 1-1' este conectată la generator, atunci generatorul va debita pe rezistența  $R_1 = n^2 R_2 = 100^2 \cdot 4 = 40\text{ k}\Omega$ . Sarcina va fi adaptată la generator și acesta va debita puterea maximă la poarta 1-1' a transformatorului. Întrucât randamentul transformatorului ideal este unitar, aceeași putere maximă se va regăsi și la poarta 2-2', adică pe rezistență de  $4\text{ }\Omega$ .

Transformatorul ideal este un diport pasiv **reciproc**.

**3.1.2 Convertorul de impedanță negativă (CIN)** este un **diport activ nerez reciproc**, care se poate realiza în două variante:



**Fig.33** Convertorul de impedanță negativă sunt:

- **convertorul de impedanță negativă cu inversarea curentului (CIN-I)**, caz în care ecuațiile diportului sunt:

$$U_1 = kU_2 \quad (45)$$

$$I_2 = kI_1 \quad (46)$$

- **convertorul de impedanță negativă cu inversarea tensiunii (CIN-U)**, când ecuațiile

$$U_1 = -kU_2 \quad (47)$$

$$I_2 = -kI_1 \quad (48)$$

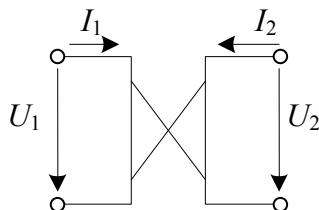
În relațiile (45)-(48), parametrul  $k$  se numește **factor de conversie**. El este pozitiv la CIN-I și negativ la CIN-U.

Dacă la poarta 2-2' a oricărui convertor de impedanță negativă se conectează o impedanță  $Z_2$ , atunci impedanța la poarta 1-1' este

$$Z_1 = -k^2 Z_2 \quad (49)$$

Circuitul se utilizează pentru realizarea elementelor de circuit negative ( $-R, -L, -C$ ), care intervin în unele circuite electronice (de ex., oscilatoare).

**3.1.3 Convertorul de impedanță generalizat (CIG)** (fig. 34) este un diport al cărui



**Fig. 34** Convertorul de impedanță generalizat

model matematic generalizează modelele transformatorului ideal și convertorului de impedanță negativă. Ecuațiile CIG sunt:

$$U_1 = AU_2$$

$$I_2 = BI_1 \quad (50)$$

$$(A, B \in \mathbb{R})$$



**3.1.4 Giratorul ideal** are simbolizarea din fig. 35, unde  $R_0$  este **rezistența de girație**, asociată unui **sens** indicat în cadrul schemei. În raport cu acest sens, ecuația tensiunii  $U_1$  este

$$U_1 = -R_0 I_2 \quad (51)$$

unde semnul minus provine din faptul că  $I_2$  are sens opus sensului rezistenței de girație.

Tensiunea  $U_2$  este

$$U_2 = R_0 I_1 \quad (52)$$

Dacă la poarta 2-2' se conectează impedanța  $Z_2$ , atunci impedanța la poarta 1-1' este

$$Z_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{-R_0 I_2}{\frac{U_2}{R_0}} = \frac{R_0^2}{\frac{U_2}{-I_2}} = \frac{R_0^2}{Z_2}$$

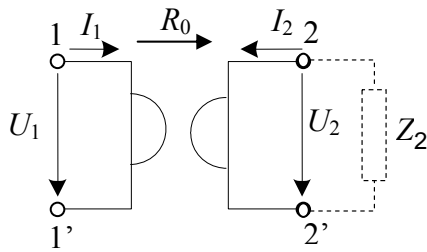


Fig. 35 Giratorul ideal

și rezultă

$$Z_1 Z_2 = R_0^2 \quad (53)$$

Prin urmare, **la poarta 1-1' se obține inversa impedanței conectate la poarta 2-2'**. Deci, dacă la poarta 2 se conectează un condensator, la poarta 1 se obține o impedanță inductivă.

Giratoarele se realizează sub formă de circuite integrate. Acest diport este un circuit neregiproc.

### 3.1.5 Surse comandate ideale

**Sursa ideală** se găsește întotdeauna la bornele porții 2. Sursa poate fi **de tensiune** sau **de curent**.

**Comanda sursei** se realizează întotdeauna la poarta 1. Comanda poate fi **în tensiune**, caz în care curentul  $I_1$  este nul (poarta 1 este în gol), sau poate fi **în curent**, caz în care tensiunea  $U_1$  este nulă (poarta 1 este în scurtcircuit).

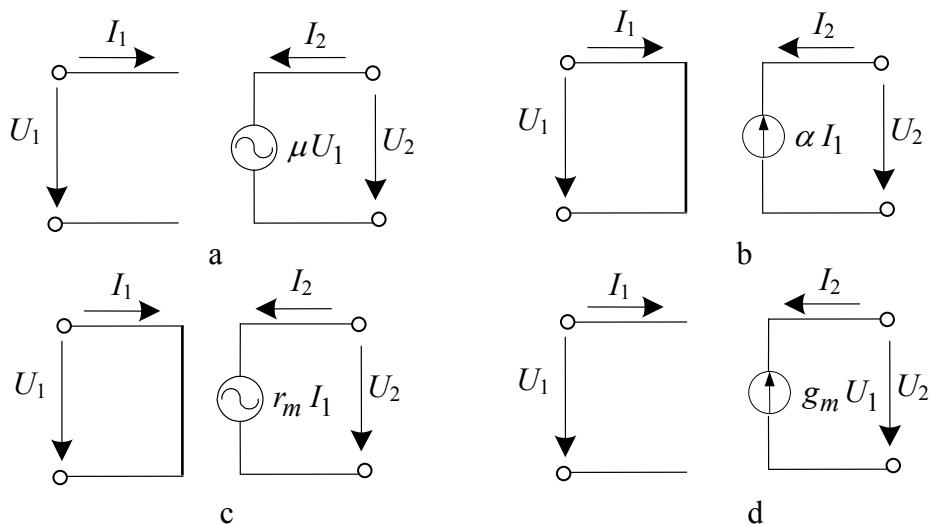


Fig. 36 Surse ideale comandate

În funcție de natura sursei și de modul de comandă, pot exista 4 tipuri de surse ideale comandate:

1. sursă de tensiune comandată în tensiune, ilustrată în fig. 36.a, unde  $\mu$  este coeficientul de amplificare în tensiune;
2. sursă de curent comandată în curent, dată în fig. 36.b, unde  $\alpha$  este coeficientul de amplificare în curent;
3. sursă de tensiune comandată în curent (fig. 36.c), unde  $r_m$  se numește rezistență mutuală (rezistență de transfer);
4. sursă de curent comandată în tensiune (fig. 36.d), unde  $g_m$  este conductanța mutuală (conductanța de transfer);