CURS 11

A ***Criteriul Nyquist***

Criteriul Nyquist se utilizează pentru analiza stabilității sistemelor cu reacție negativă. Principalele trăsături ale acestui criteriu sunt :

- evaluarea stabilității se face pe baza modelului frecvențial al sistemului,
- stabilitatea sistemului în buclă închisă se stabileşte pe baza caracteristicilor de frecvență ale sistemului în buclă deschisă,
- crieriul Nyquist permite o evaluare foarte nuanțată a rezervei de stabilitate.

Fie

$$H_0(s) = \frac{H_d(s)}{1 + H_c(s)} \tag{101}$$

funcția de transfer a sistemului în buclă închisă, în care

$$H_c(s) = H_d(s) H_r(s) \tag{102}$$

este funcția de transfer a buclei deschise (calea directă în serie cu calea de reacție).

Formularea criteriului Nyquist, dată în cele ce urmează, are la bază ipoteza că bucla deschisă nu are poli în semiplanul drept, însă poate să aibă poli pe axa imaginară. Această ipoteză privind funcția de transfer $H_c(s)$ este îndeplinită în aproape toate aplicațiile din electronică.

Formularea criteriului Nyquist, în ipoteza menționată, este următoarea :

*Un sistem este stabil în buclă închisă atunci când caracteristica Nyquist aferentă funcției de transfer în buclă deschisă, $H_c(j\omega)$, lasă punctul de coordonate $(-1, j0)$, numit **punct critic**, în partea stângă, atunci când pulsația ω variază de la zero la $+\infty$.*

In fig. 14 sunt exemplificate caracteristici Nyquist pentru sisteme stabile şi sisteme instabile (1, 2-sisteme stabile; 3, 4-sisteme instabile). Atunci când caracteristica Nyquist trece prin punctul critic, sistemul este instabil, însă la limita de stabilitate.

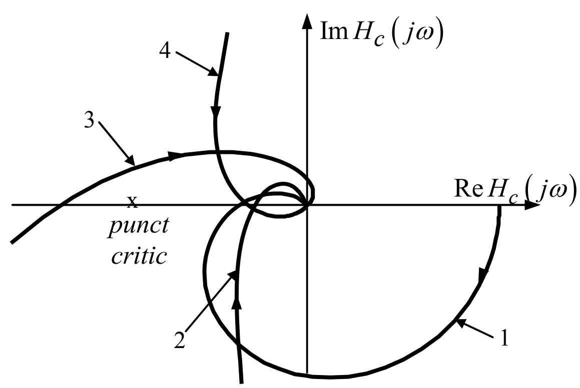

Fig. 14 Caracteristici Nyquist pentru sisteme stabile (1,2) şi instabile (3, 4)

Evaluarea rezervei de stabilitate

Rezerva de stabilitate exprimă « distanța » dintre caracteristica Nyquist $H_c(j\omega)$ şi punctul critic $(-1, j0)$. Concret, ea se defineşte prin doi indicatori, numiți ***margine de fază*** şi ***margine de amplificare***.

Fie caracteristica Nyquist a unui sistem stabil, reprezentată în fig. 15. Pe această caracteristică se definesc două pulsații :

- pulsația ω_t, numită ***pulsație de tăiere***, pentru care amplificarea buclei deschise este unitară, adică :

$$|H_c(j\omega_t)| = A_c(\omega_t) = 1 \quad \left(A_{cdB}(\omega_t) = 0\right) \tag{103}$$

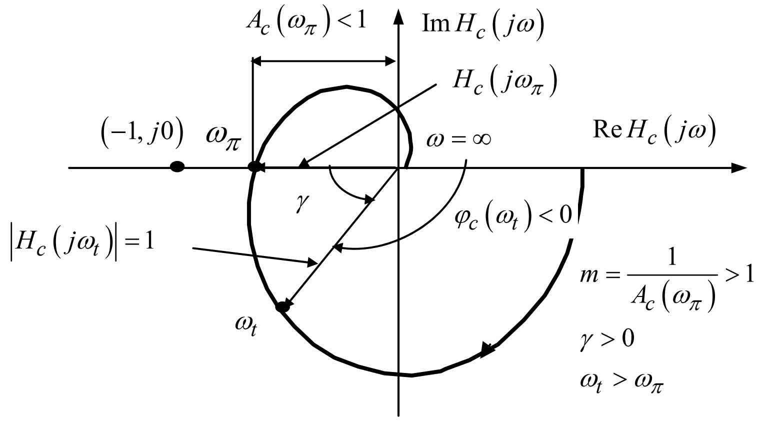

Fig. 15 Definirea marginii de amplificare şi a marginii de fază pe caracteristica Nyquist

- pulsația notată prin ω_π, la care defazajul buclei deschise este egal cu $-\pi$ (sau -180°) :

$$\varphi_c(\omega_\pi) = \arg H_c(j\omega_\pi) = -\pi \tag{104}$$

Fie $A_c(\omega_\pi)$ amplificarea buclei deschise la pulsația ω_π. Dacă sistemul este stabil, atunci $A_c(\omega_\pi) < 1$ (vezi fig. 15). ***Marginea de amplificare*** este definită prin relația

$$m = \frac{1}{A_c(\omega_\pi)} \tag{105}$$

Marginea de fază este unghiul γ format de semiaxa reală negativă şi vectorul $H_c(j\omega_t)$ (vezi fig. 15):

$$\gamma = 180 + \varphi_c(\omega_t) \tag{106}$$

La un sistem stabil sunt valabile relațiile:

$$m > 1; \quad \gamma > 0; \quad \omega_t < \omega_\pi \tag{107}$$

Dacă sistemul este instabil, avem : $m < 1; \quad \gamma < 0; \quad \omega_t > \omega_\pi$, iar pentru un sistem la limita de stabilitate rezultă :

$$m = 1; \quad \gamma = 0; \quad \omega_t = \omega_\pi \tag{108}$$

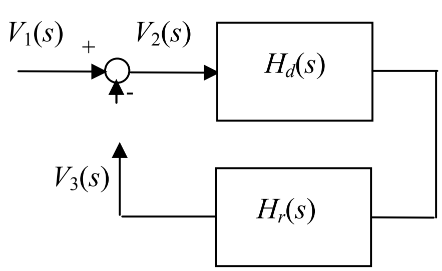

Fig. 16 Sistem în buclă deschisă

Condiția m=1 însemnă $A_c(\omega_\pi) = 1$, adică amplificare unitară a căii directe înseriată cu calea de reacție (fig. 16). Deci, dacă variabila V_2 de la intrarea căii directe este o sinusoidă cu pulsația $\omega = \omega_t = \omega_\pi$ şi cu amplitudinea A, atunci semnalul V_3 va fi tot o sinusoidă, cu aceeaşi amplitudine (deoarece $A_c\left(\omega_t\right)=1$), însă defazat însă cu $-\pi$ față de V_2 (deoarece $\varphi_c\left(\omega_\pi\right)=-\pi$). Dacă semnalul V_3 se aplică cu semnul minus la intrarea căii directe, el va fi identic cu semnalul V_2, deoarece inversarea de semn inseamna o schimbare a fazei cu π. Prin urmare, semnalul V_2 se regenerează permanent prin calea de reacție şi sistemul în circuit închis va funcționa ca oscilator. Condițiile $A_c\left(\omega\right)=1$ şi $\varphi_c\left(\omega\right)=-\pi$ evocate aici reprezintă, de fapt, ***condițiile Barkhausen*** de funcționare a unui oscilator.

Indicatorii rezervei de stabilitate pot fi definiți şi pe caracteristicile Bode. Marginea de amplificare exprimată în dB este

$$m_{dB}=20\log m=20\log\left[\frac{1}{A_c(\omega_\pi)}\right]=-20\log A_c\left(\omega_\pi\right)=-A_{cdB}\left(\omega_\pi\right) \tag{109}$$

Relațiile (103), (106) şi (109) dau regulile de determinare a marginii de amplificare şi a marginii de fază pe caracteristicile Bode, aşa cum se ilustrează în fig. 17.a, pentru un sistem stabil, şi în fig. 17.b, pentru un sistem instabil.

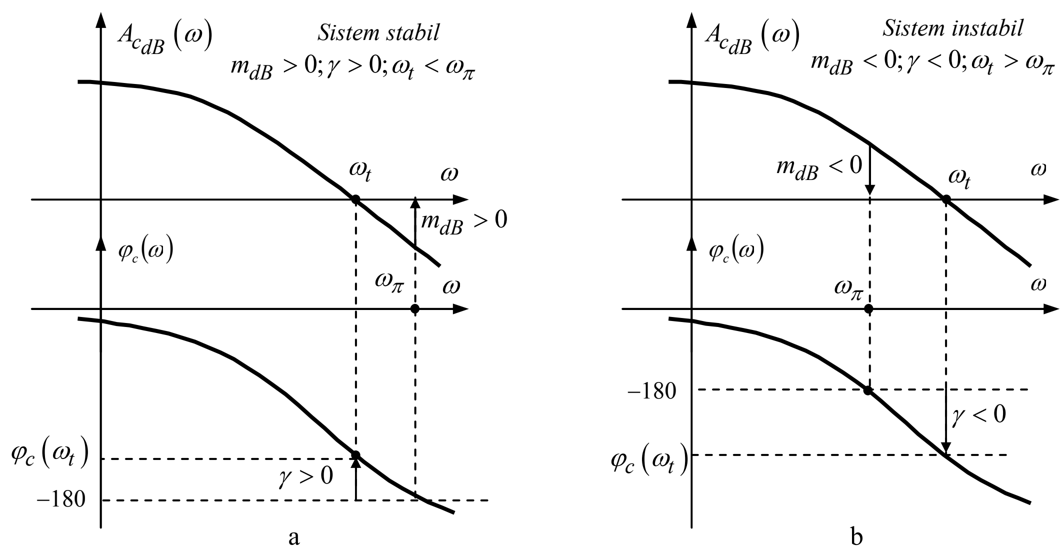

Fig. 17 Marginea de amplificare şi marginea de fază pentru un sistem stabil (a) şi pentru un sistem instabil e (b)-deduse pe caracteristicile Bode

Observație : Criteriul Nyquist se aplică şi pentru sistemele cu timp discret. Marginea de amplificare şi marginea de fază se definesc în acelaşi mod. Singura diferență este că, în acest caz, caracteristcile de frecvență se trasează în domeniul $[0,\omega_S]=[0,\omega_e/2]$.

Aplicație Matlab Funcția Matlab care permite determinarea marginii de amplificare, a marginii de fază şi a pulsațiilor ω_t si ω_π este `margin.` Apelarea acestei funcții este `margin(sys),` unde `sys` este ***sistemul în circuit deschis*** (calea directă înseriată cu calea de reacție). Exemplul care urmează ilustrează aplicarea acestei funcții. Se calculează inclusiv marginea de amplificare în dB.

```
clear all;
num=10*[5 1];
den=[conv(conv([5 0],[1 1]),conv([10 1],[0.5 1]))];
```

```
sys=tf(num,den)
[mgain,mphase,wt,wpi]=margin(sys)
mgaindB=20*log10(mgain)
```

Rezultatele obținute prin rularea programului sunt:

```
Transfer function:
            50 s + 10
----------------------------------
25 s^4 + 77.5 s^3 + 57.5 s^2 + 5 s
mgain = 2.5399
mphase =  24.6088
wt = 1.3051
wpi =  0.7619
mgaindB =  8.0965
```

4. Analiza regimului staționar al sistemelor

4.1 Formularea problemei

Fiind dat un sistem linear stabil, la intrarea căruia se aplică un semnal constant, u_s, semnalul obținut la ieşire în regim staționar, y_s, este, de asemenea, constant. Se pune problema să se determine y_s, atunci când se cunoaşte funcția de transfer a sistemului şi semnalul de intrare u_s. Având în vedere faptul că sistemul este linear, y_s şi u_s sunt legate prin relația

$$y_S = K\, u_S \tag{101}$$

unde K se numeşte *coefficient de amplificare static*. In cele ce urmează se pune problema determinării coeficientului de amplificare static, K, pentru sisteme cu timp continuu şi cu timp discret

4.2 Regimul staționar al sistemelor cu timp continuu

Fie un sistem cu funcția de transfer $H(s)$ (fig. 18). Transformata Laplace a semnalului de ieşire este

$$Y(s) = H(s)U(s) \tag{102}$$

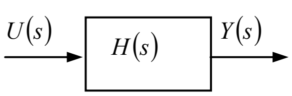

Fig. 18 Sistem dinamic

In regim staționar, semnalul de ieşire este

$$y_S = \lim_{t\to\infty} y(t) \tag{103}$$

Pentru a stabili o relație de calcul al semnalului de ieşire în regim staționar, y_s, se aplică teorema valorii finale din transformata Laplace:

$$y_S = \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) \tag{104}$$

sau, ținând cont de relația (102),

$$y_S = \lim_{s\to 0} sH(s)U(s) \tag{105}$$

Presupunem că la intrarea sistemului se aplică un semnal treaptă cu amplitudinea u_S. Transformata Laplace a acestui semnal este $U(s)=u_s/s$, deci – în conformitate cu (105) – valoarea de regim staționar a semnalului de ieşire, y_s, este :

$$y_S = \lim_{s\to 0} sH(s)\frac{1}{s}u_S = H(0)u_S \tag{106}$$

Din (101) şi (106) rezultă expresia amplificării sistemului în regim staționar :

$$K = H(0) \tag{107}$$

4.2 Regimul staționar al sistemelor cu timp discret

Similar cazului anterior, pentru un sistem cu timp discret se poate scrie:

$$Y(z) = H(z)U(z) \tag{108}$$

şi

$$y_S = \lim_{k\to\infty} y(k) \tag{109}$$

Utilizând teorema valorii finale din transformata z, se obține :

$$y_S = \lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)H(z)U(z) \tag{110}$$

Dacă la intrarea sistemului se aplică un semnal treaptă cu timp discret, având amplitudinea u_S, atunci transformata z a semnalului de intrare este $U(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}u_s$. Din relația (110) se obține valoarea staționară a semnalului de ieşire:

$$y_S = \lim_{z\to 1}(z-1)H(z)\frac{1}{1-z^{-1}}u_S = Ku_S \tag{111}$$

Rezultă expresia amplificării sistemului în regim staționar :

$$K = H(1) \tag{112}$$

5. Analiza regimului dinamic al sistemelor

Analiza vizată în cele ce urmează nu are ca scop stabilirea răspunsului dinamic al sistemului (pentru aceasta ar trebui să se utilizeze metodele prezentate în secțiunea «2. *Analiza sistemelor prin calculul răspunsului acestora* » a acestui capitol), ci să se stabilească unele reguli pentru ***evaluarea expeditivă*** proprietăților ale regimului dinamic al sistemelor.

Fie un sistem de fază minimă cu răspunsul la frecvență $H(j\omega)=P(\omega)+jQ(\omega)$. S-a arătat în secțiunea 4.4 (cursul 8) că răspunsul la impuls poate fi calculat în funcție de $P(\omega)$ astfel (vezi rel.(65) din cursul 8):

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty P(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega \tag{113}$$

Răspunsul la semnalul treaptă (răspunsul indicial) este integrala răspunsului la impuls (funcției pondere) :

$$h_{-1}(t)=\int_0^t h(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{114}$$

Inlocuind (113) în (114) se obține

$$h_{-1}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} P(\omega)\left[\int_0^t \cos\omega\tau\,\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}\omega \tag{115}$$

sau

$$h_{-1}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{P(\omega)}{\omega}\sin\omega t\right]\mathrm{d}\omega \tag{116}$$

Presupunem că, în funcția $P(\omega)$, se înlocuieşte pulsația ω prin $m\omega$ (fig. 19.a),

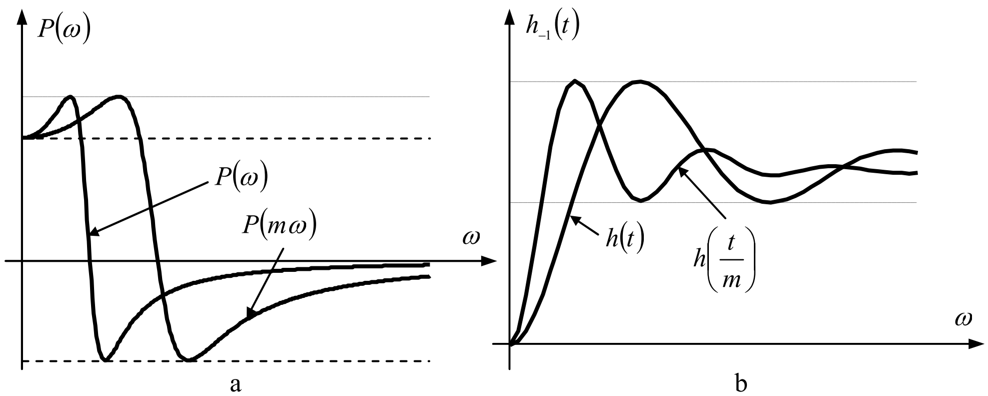

Fig. 19 Efectul modificării benzii de frecvență (a), asupra răspunsului indicial (b)

adică se modifică banda de frecvență. In acest caz se obține:

$$h_{-1}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{P(m\omega)}{\omega}\sin\omega t\,\mathrm{d}\omega=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{P(m\omega)}{m\omega}\sin\left(m\omega\frac{t}{m}\right)\mathrm{d}(m\omega) \tag{117}$$

sau, dacă se face substituția $m\omega=u$,

$$h_{-1}(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{P(u)}{u}\sin\left(u\frac{t}{m}\right)\mathrm{d}u=h_{-1}\left(\frac{t}{m}\right) \tag{118}$$

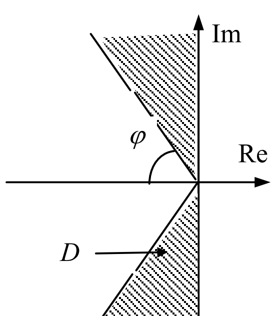

Fig. 20 Domeniul modurilor oscilante

In fig. 19 este ilustrat efectul schimbării benzii de frecvență asupra răspunsului indicial. Se constată că ***dacă banda de frecvență creşte, atunci timpul de răspuns al sistemului se reduce*** (sistemul are dinamică mai rapidă).

Alături de această constatare, sunt cunoscute din capitolele anterioare şi alte criterii de evaluare calitativă a regimului dinamic, în special atunci când este dată distribuția polilor sistemului în planul complex : cu cât distanța minimă a polilor față de axa imaginară este mai mare, cu atât dinamica sistemului este mai rapidă. Dacă există poli complecşi conjugați, $p_{i,i+1} = \alpha \pm j\omega$, unde $\omega > |\alpha|$, adică $\varphi > 45^0$ (vezi fig. 20), atunci aceşti poli introduc moduri oscilante în răspunsul sistemului. Oscilațiile introduse sunt cu atât mai pronunțate, cu cât unghiul φ este mai mare.

Sinteza sistemelor

1 Introducere

In cadrul unei probleme de sinteză a sistemelor, **se dau** performanțele pe care trebuie să se realizeze un sistem şi **se cere** deducerea sistemului care realizează aceste performanțe.

Problema sintezei sistemelor poate fi tratată pe mai multe căi, pe baza rezulatelor din analiza sistemelor. Un exemplu foarte simplu îl constituie sinteza unui filtru rejector (tratată în cursul 4). Alte abordări, mult mai importante, vor fi prezentate într-unul din capitolele următoare, în legătură cu sinteza filtrelor.

In acest capitol se va prezenta problema sintezei sistemelor într-o formulare particulară, după cum urmează:

- **se dau:** un sistem inițial, care are performanțe dinamice necorespunzătoare, precum şi performanțele dorite, care trebuie să fie realizate de sistem;
- **se cere:** modificarea sistemului inițial, printr-o reacție după stare, astfel încât în final sistemul să aibă performanțele dorite.

2. Sinteza sistemelor prin reacției după stare

Presupunem că un sistem, descris de ecuațiile

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u \tag{119}$$

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{120}$$

are o dinamică necorespunzătoare (de ex., o dinamică lentă) şi că se doreşte ameliorarea acestei dinamici prin intermediul unei reacții după stare. Reacția după stare este ilustrată în fig. 21.a, iar în fig.21.b este detaliată modalitatea de realizare. Mărimea de reacție se obține prin însumarea ponderată a stărilor $x_i, i = \overline{1,n}$ Ponderile $k_i, i = \overline{1,n}$ formează

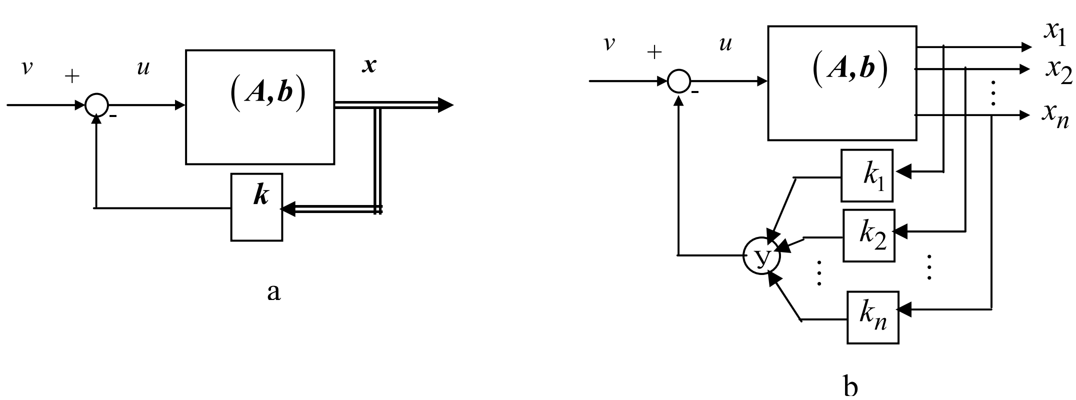

Fig. 21 Reacția după stare: reprezentare simplificată (a) şi detaliată (b)

vectorul linie

$$\boldsymbol{k} = [k_1 \;\; k_2 \cdots \;\; k_n] \tag{121}$$

astfel încât mărimea de reacție este produsul scalar

$$\boldsymbol{kx} = \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \tag{122}$$

Presupunem, spre exemplu, că inițial sistemul are distribuția polilor din fig. 22.a. Aici se constată că 3 poli sunt apropiați de axa imaginară, doi din aceştia fiind complecşi conjugați, care produc o dinamică lentă, oscilantă. Prin reacția după stare se doreşte ca sistemul să aibă o dinamică rapidă, care corespunde unei distribuții ***impuse*** a polilor. De regulă, se impun 2 *poli dominanți*, complecşi conjugați, iar restul polilor se aleg la distanță mare față de origine (fig. 2.b). In exemplul considerat, sistemul se va comporta

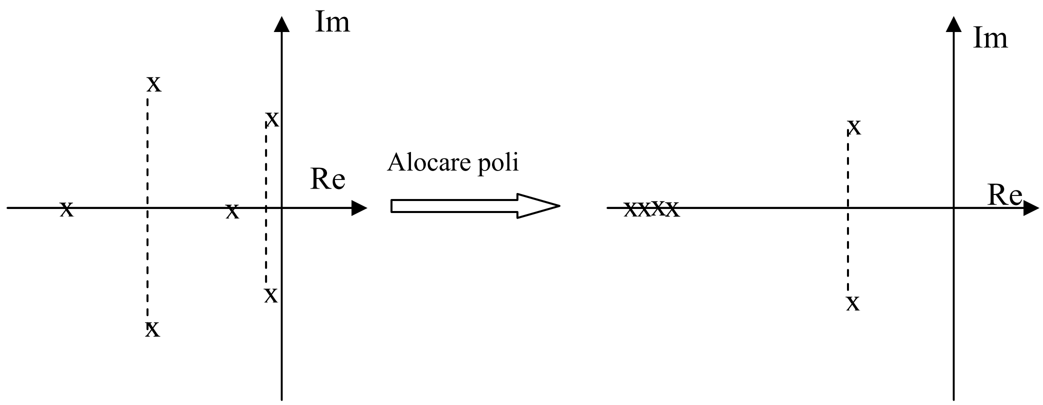

Fig. 22 Polii sistemului fără reacție (a) şi cu reacție (b) (exemplu)

practic ca un sistem de ordinul 2, caracterizat de cei doi polii dominanți. Spunem că sistemului i ***s-au alocat polii*** doriți, pentru care se va obține o dinamică ameliorată a dinamicii sistemului.

Intrucât mărimea de intrare a sistemului cu reacție este

$$u = v - \boldsymbol{kx}$$

sistemul în circuit închis va avea ecuația de stare

$$\dot{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}v \tag{123}$$

Față de ecuația de stare inițială (119), matricea $\boldsymbol{A}$ a sistemului se înlocuieşte cu $\boldsymbol{A}_0$=$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk})$. Dacă inițial ecuația caracteristică a sistemului era $\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0$, după aplicarea reacției, sistemul va avea ecuația caracteristică

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_0) = \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{bk}) = 0 \tag{124}$$

Fie ecuația de stare a sistemului inițial, prezentată sub *forma canonică controlabilă*. In acest caz, parametrii $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{b}$ au forma:

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & & \boldsymbol{I}_{n-1} & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{array}\right]; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{125}$$

iar matricea $\boldsymbol{A}_0$ a sistemului cu reacție după stare, adică $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{bk})$, are forma

$$
A_0=(A-bk)=\left[\begin{array}{c:ccc} 0 & & I_{n-1} & \\ \hdashline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{array}\right]-\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \dots & k_n\end{bmatrix}=
$$

$$
=\left[\begin{array}{c:ccc} 0 & & I_{n-1} & \\ \hdashline -a_0-k_1 & -a_1-k_2 & \dots & -a_{n-1}-k_{n-1} \end{array}\right] \tag{126}
$$

Pe de altă parte, polii sistemului cu reacție (rădăcinile ecuației caracteristice) sunt impuşi: $s_i,\ i=\overline{1,n}$, aşa cum s-a ilustrat în fig. 22.b. In consecință, polinomul caracteristic al sistemului cu reacție este:

$$
\Delta_0(s)=(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n)=s^n+\bar{a}_{n-1}s^{n-1}+\dots+\bar{a}_0 \tag{127}
$$

iar matricea A_0 aferentă, în forma canonică controlabilă, este

$$
A_0=\left[\begin{array}{c:ccc} 0 & & I_{n-1} & \\ \hdashline -\bar{a}_0 & -\bar{a}_1 & \dots & -\bar{a}_{n-1} \end{array}\right] \tag{128}
$$

Matricea A_0 a sistemului cu reacția după stare a fost exprimată sub două forme: (126) şi (128). Din aceste relații se deduc egalitățile :

$$
-\bar{a}_{i-1}=-a_{i-1}-k_i\,,\ i=\overline{1,n} \tag{129}
$$

de unde rezultă coeficienții reacției după stare

$$
k_i=\bar{a}_{i-1}-a_{i-1}\ ;\ i=\overline{1,n} \tag{130}
$$

In Matlab, vectorul $\boldsymbol{k}$ se deduce cu funcția `place,` conform următoarei utilizări :

```
K = place(A,B,P)
```

care calculează matricea (vectorul) `K` astfel încât ecuația caracteristică aferentă matricii în circuit închis, $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})$, să fie cele din vectorul `P`, impus de utilizator.

***Aplicația* 1** Să se calculeze reacția după stare pentru sistemul cu parametrii de stare

$$
\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-0.1 & -3.3\\ 0.5 & -1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix};\ \boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}
$$

prin impunerea polilor

$$
p_{1,2}=-2\sqrt{2}\pm j2\sqrt{2}=-2.8284\pm j2.8284
$$

Programul Matlab este dat în continuare

```
clear all;close all;
A=[-0.1 -3.3 ;0.5 -1];B=[0;1];
C=eye(2);D=[0;0];
sys=ss(A,B,C,D);
```

```
e=eig(A)
figure(1);
[y,t]=impulse(sys);
subplot(211);plot(t,y(:,1)');hold on;
subplot(212);plot(t,y(:,2)');hold on;
P=[-2*sqrt(2)+i*2*sqrt(2);-2*sqrt(2)-i*2*sqrt(2)];
K=place(A,B,P)
sys1=feedback(sys,K);
[y1,t]=impulse(sys1,'r');
subplot(211);plot(t,y1(:,1)','r');grid;
title('x1; cu rosu - cazul cu reactie dupa stare');
subplot(212);plot(t,y1(:,2)','r');grid;
title('x2; cu rosu - cazul cu reactie dupa stare');
e1=eig(A-B*K)
```

Rezultatele care se obțin sunt:

- valorile proprii ale matricei inițiale, ***A***:

```
-0.5500 + 1.2031i
-0.5500 - 1.2031i
```

- valorile proprii ale matricei sistemului cu reacție $\boldsymbol{A}_0=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{bk})$

```
-2.8284 + 2.8284i
-2.8284 - 2.8284i
```

  (sunt identice cu cele impuse)

- răspunsurile la impuls ale siatemului inițial (cu albastru) şi ale sistemului corectat (cu reacție după stare):

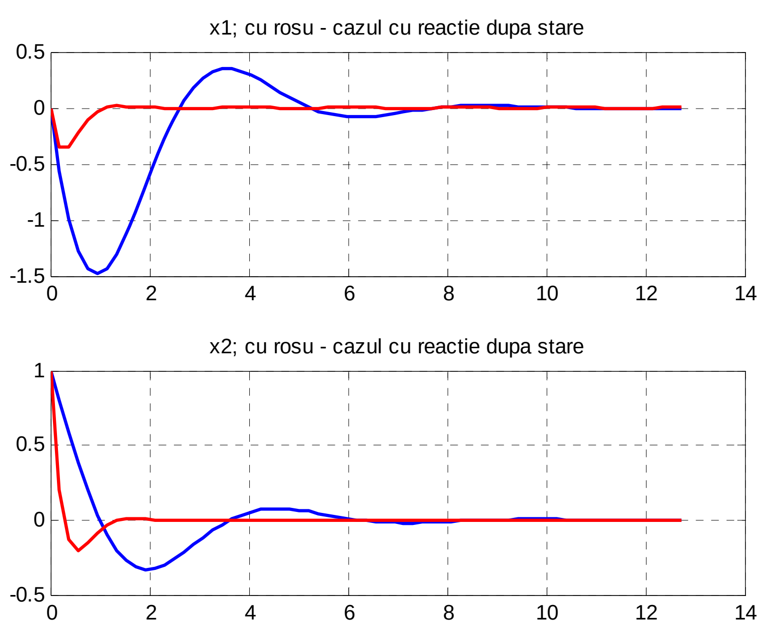

Fig. 23 Răspunsurile la impuls ale sistemului inițial (a) şi cu reacție după stare (b)

3. Estimarea stării

Pentru a realiza reacția după stare este necesar ca toate variabilele de stare să fie măsurabile, ceea ce – de regulă – nu este posibil. In realitate, variabilele de stare $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt ***estimate*** pornind de la mărimile de intrare-ieşire $\boldsymbol{u}(t)$ şi $\boldsymbol{y}(t)$ măsurate. Estimarea este realizată de ***estimatoare de stare***, numite adesea şi ***observere***.

Fie $\tilde{\boldsymbol{x}}$ starea estimată pentru un sistem strict cauzal, definit prin parametrii ***A, B, C,*** considerați cunoscuți. Dacă ecuația estimatorului de stare s-ar considera identică cu ecuația sistemului, adică

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \tag{131}$$

atunci variabila de intrare $\boldsymbol{u}(t)$ ar imprima o traiectorie de stare a estimatorului, $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$, diferită de cea a sistemului, $\boldsymbol{x}(t)$, deoarece stările inițiale ale sistemului şi estimatorului, $\boldsymbol{x}(0)$ si $\tilde{\boldsymbol{x}}(0)$, sunt diferite (*nu se cunoaşte starea inițială a sistemului*). Ecuația estimatorului se alege sub forma

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{K}_r\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}\underline{\tilde{\boldsymbol{x}}}\right) \tag{132}$$

adică, la ecuația (131) se adaugă termenul $\boldsymbol{K}_r\left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{C}\underline{\tilde{\boldsymbol{x}}}\right)$, în care intervine diferența dintre ieşirea sistemului (măsurată) $\boldsymbol{y}$ şi « ieşirea » $\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{C}\underline{\tilde{\boldsymbol{x}}}$ dedusă pe baza estimării $\tilde{\boldsymbol{x}}$. Această diferență, amplificată cu $\boldsymbol{K}_r$, acționează în ecuația (132) până când starea estimată va coincide cu starea sistemului. Schema estimatorului este dată în fig. 24.

Proiectarea observerului constă în calculul vectorului de amplificare $\boldsymbol{K}_r$.

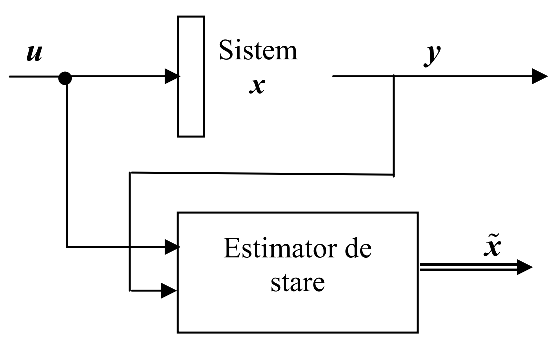

Fig. 24 Estimator de stare

Dacă din ecuația de stare a sistemului, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$, se scade ecuația (132) a estimatorului, obținem :

$$\dot{\boldsymbol{x}} - \dot{\tilde{\boldsymbol{x}}} = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\right) - \boldsymbol{K}_r\left(\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}}\right) = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{C}\right)\left(\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\right) \tag{133}$$

Eroarea de estimare este

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}} \tag{134}$$

deci avem :

$$\dot{\boldsymbol{e}} = \left(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{K}_r\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{e} \tag{135}$$

Valorile proprii ale matricii $\left(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K}_r\boldsymbol{C}\right)$ determină viteza de anulare a erorii

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{e}\left(t\right)=0 \tag{136}$$

ştiind că, în momentul iniţial, $\boldsymbol{e}(0)\neq 0$. Cu cât valorile proprii, în semiplanul stâng, sunt mai depărtate de axa imaginară, cu atât viteza de anulare a erorii este mai mare.

In Matlab, calculul vectorului $\boldsymbol{K}_r$ se face tot cu funcţia `place,` conform următoarei utilizări:

```
Ke=place(A',C',P1)
```

unde vectorul `P1` conţine polii impuşi estimatorului (valorile proprii ale matricei $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{K}_r\boldsymbol{C}$).

***Aplicaţia* 2**

Se consideră că sistemul din ***Aplicaţia* 1** are o singură mărime de ieşire şi se calculează estimatorul de stare. Polii impuşi estimatorului sunt

$$p_{1,2}=-10\sqrt{2}\pm j10\sqrt{2}$$

In programul care urmează, se simulează sistemul la un semnal de intrare dat, $u(t)$, şi în condiţii iniţiale oarecare. Se calculează estimatorul şi, apoi, acesta se simulează utilizând la intrare semnalul $\boldsymbol{B}u(t)+\boldsymbol{K}_e y(t)$, unde $y(t)$ este ieşirea sistemului. Starea iniţială a estimatorului s-a considerat nulă (se putea face orice iniţializare), deoarece *starea iniţială a sistemului nu se cunoaşte*. Se reprezintă grafic evoluţiile stărilor sistemului şi estimatorului (fig. 25).

```
clear all;close all;
% sistemul cu o intrare si o iesire
A=[-0.1 -3.3 ;0.5 -1];
B=[0;1]; C=[1 0];D=[0]
% starea initiala a sistemului
x0=[1;-1];
% se gebereaza semnalul de intrare
t=0:0.005:1;u=sign(sin(2.5*t));
% se defineste sistemul
sys=ss(A,B,C,D);
% se simuleaza sistemul cu intrarea u si starea initiala x0
[y,t,x]=lsim(sys,u,t,x0);
figure(1);
plot(t,x(:,1),t,x(:,2));grid;hold on;
% se deduce amplificarea Ke a estimatorului
P1=[-10*sqrt(2)+i*10*sqrt(2);-10*sqrt(2)-i*10*sqrt(2)];
Ke=place(A',C',P1)
% se construieste ecuatia de stare a erorii estimatorului
Be=[1 0;0 1];Ce=eye(2); De=[0 0;0 0];
syse=ss(A-Ke'*C,Be,Ce,De)
% se initializeaza la zero starea initiala a estimatorului
xi=[0;0];
% se calculeza intrarea estimatorului
ue=B*u+Ke'*y';
% se simuleaza estimatorul cu intrarea u si starea initiala xi
[ye,t,xe]=lsim(syse,ue,t,xi);
plot(t,xe(:,1),t,xe(:,2));
```

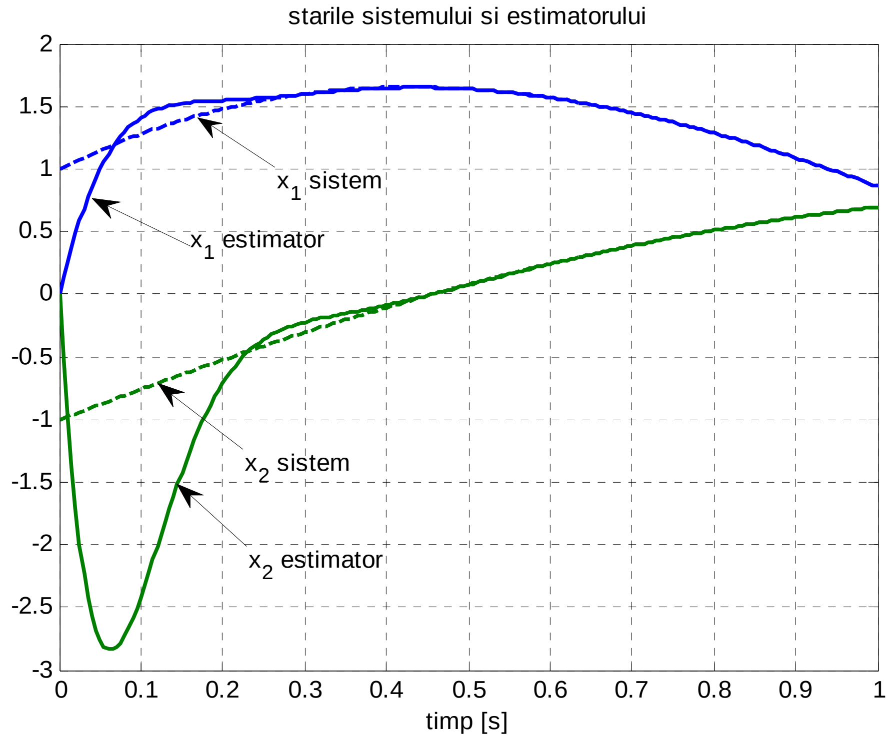

Fig. 25 Evoluțiile stărilor sistemului si estimatorului

Dacă stările unui sistem nu sunt în totalitate accesibile măsurării, atunci ***reacția după stare se realizează în raport cu starea estimată.*** *Dinamica de anulare a erorii de estimare trebuie să fie mult mai rapidă decât dinamica sistemului cu reacție după stare. Deci, polii impuşi la calculul vectorului* $\boldsymbol{K}_r$ *trebuie să fie sensibil mai depărtați de axa imaginară, față de polii impuşi la reacția după stare* (de 5...10 ori).