

## Curs 2

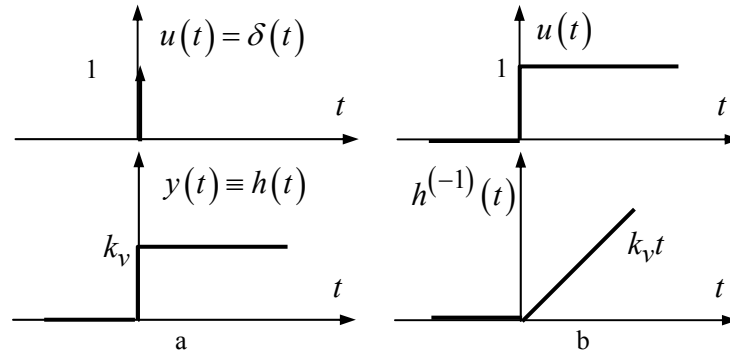
### Recapitulare Integratorul

#### 4.1 Cazul integratorului cu timpul continuu

**Ecuția intrare-ieșire** 
$$y(t) = k_v \int_0^t u(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^t u(\tau) d\tau$$

unde :  $T$  este constanta de timp de integrare [s],  $k_v = 1/T$  - coeficientul de viteză [ $s^{-1}$ ].

- **Răspunsul la impuls și funcția indicială**

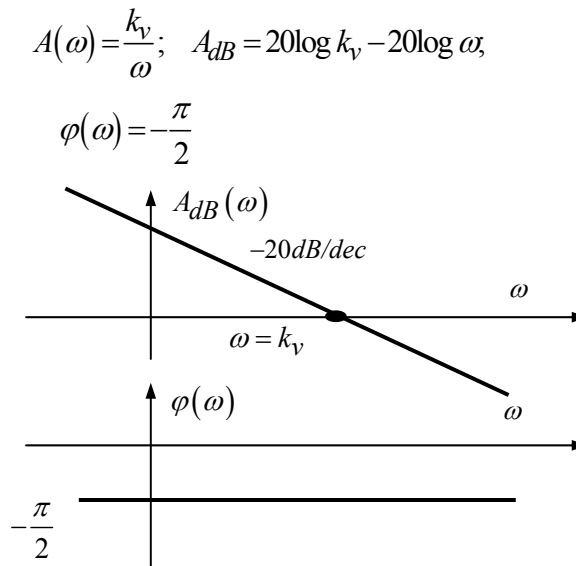


**Fig. 6** Răspunsul la impuls (a) și răspunsul indicial (b) ale unui integrator

- **Funcția de transfer**

$$H(s) = \frac{k_v}{s} = \frac{1}{Ts} \quad (\text{introduce un pol în originea planului "s"}). \quad (20)$$

- **Caracteristici de frecvență**



**Fig. 7** Caracteristicile Bode ale unui integrator

## 4.2 Cazul integratorului cu timp discret.

*Ecuatia intrare-iesire.*

$$y(kT_e) = y[(k-1)T_e] + \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} u(\tau) d\tau \quad (23)$$

Pentru metoda dreptunghiurilor se obtin ecuatiile:

$$y(kT_e) = y[(k-1)T_e] + T_e u[(k-1)T_e]$$

$$y(kT_e) = y[(k-1)T_e] + T_e u[kT_e]$$

Din ecuatia  $y(k) = y(k-1) + T_e u(k-1)$  rezultă **functia de transfer** :

$$H(z) = \frac{T_e z^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T_e}{z - 1} \quad (\text{are un pol pe cercul unitar, la } z_p = 1)$$

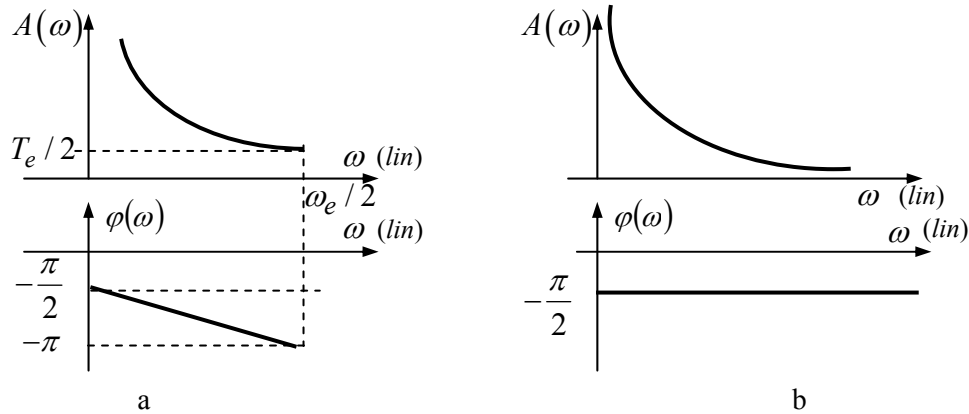
**Caracteristicile de amplificare și de defazaj** sunt:

$$A(\omega) = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\omega T_e}{2}}; \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega_e T_e}{2}; \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_e}{2} \quad ; \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_e}{2} \quad (30)$$

Dacă se compară aceste caracteristici cu cele ale integratorului ideal cu timp continuu :

$$A(\omega) = 1/\omega, \quad \varphi(\omega) = -\pi/2$$

se constată (v. fig. 8) că, prin discretizarea timpului, se introduc erori importante.



**Fig. 8** Caracteristicile de frecvență ale integratorului cu timp discret (a) și cu timp continuu (b)

Pentru valori mici ale pulsației  $\omega$ , relațiile (30) devin :

$$A(\omega) = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\omega T_e}{2}} \cong \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\omega T_e}{2}} = \frac{1}{\omega}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\omega T_e}{2} \cong -\frac{\pi}{2}$$

deci integratorul cu timp discret (27) are proprietăți apropiate de cele ale integratorului ideal cu timp continuu.

Presupunem acum că se utilizează metoda trapezelor pentru aproximarea integralei din ecuația (23), se obține un integrator care este descris prin ecuația în diferențe

$$y(k) = y(k-1) + \frac{T_e}{2} [u(k) + u(k-1)] \quad (33)$$

la care corespunde funcția de transfer

$$H(z) = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (24)$$

În acest caz, răspunsul la frecvență este:

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1+e^{-j\omega T_e}}{1-e^{-j\omega T_e}} = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{j\omega T_e}{2}} \left( e^{\frac{j\omega T_e}{2}} + e^{-\frac{j\omega T_e}{2}} \right)}{e^{-\frac{j\omega T_e}{2}} \left( e^{\frac{j\omega T_e}{2}} - e^{-\frac{j\omega T_e}{2}} \right)} = \frac{T_e}{2j} \operatorname{ctg} \frac{\omega T_e}{2} \quad (25)$$

și rezultă caracteristicile de frecvență

$$A(\omega) = \frac{T_e}{2} \operatorname{ctg} \frac{\omega T_e}{2}, \quad \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}; \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_e}{2} \quad (26)$$

Se constată că acest integrator aproximează mai bine integratorul ideal cu timp continuu, deoarece caracteristica de fază este identică cu cea a integratorului ideal.

## 5. Derivatorul ideal

### 5.1 Derivatorul ideal cu timp continuu

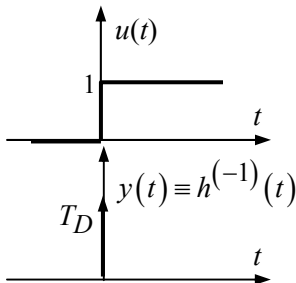
**Derivatorul ideal** este un element *necauzal* și va fi prezentat în cele ce urmează ca model de realizare *ideală* a funcției de derivare a unui semnal.

**Ecuația intrare-ieșire** a derivatorului ideal este

$$y(t) = T_d \frac{du(t)}{dt} \quad (27)$$

unde  $T_d$  este constanta de timp de derivare [s].

**Răspunsul indicial** este un impuls Dirac de arie  $T_d$ , întrucât derivata treptei unitare este distribuția  $\delta(t)$  (fig.9).



**Funcția de transfer** se obține din ecuația (27) :

$$H(s) = T_d s \quad (28)$$

Se observă că **derivatorul introduce un zero în originea planului "s"**.

**Răspunsul la frecvență,**

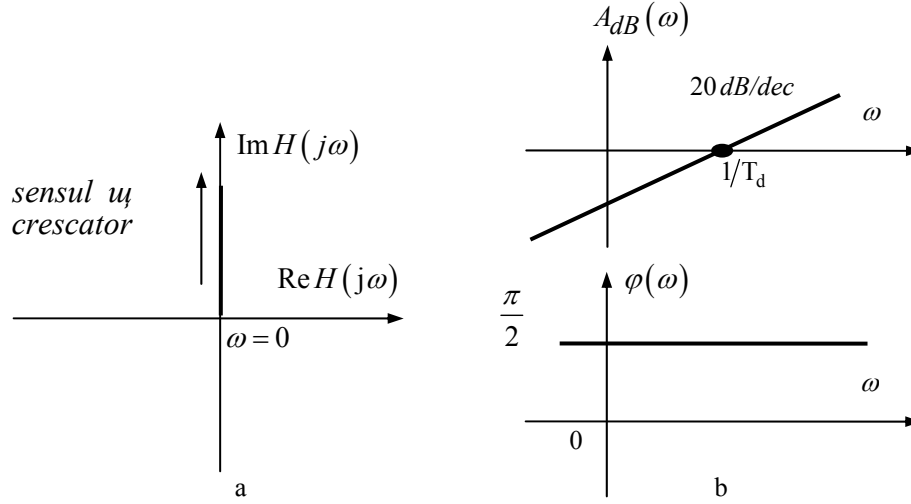
$$H(j\omega) = j\omega T_d, \quad (29)$$

conduce la expresiile amplificării și defazajului :

**Fig. 9** Răspunsul indicial al derivatorului ideal

$$A(\omega) = |H(j\omega)| = \omega T_d; \quad A_{dB}(\omega) = 20 \log \omega + 20 \log T_d \quad (30)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} \quad (31)$$



**Fig. 10** Caracteristicile Nyquist (a) și Bode (b) ale derivatorului ideal

Caracteristicile Nyquist și Bode sunt prezentate în fig.10. Deoarece răspunsul la frecvență (20) este imaginar și pozitiv, caracteristica Nyquist coincide cu semiaxa pozitivă imaginară. În diagramele Bode, caracteristica de amplificare are panta de +20dB/dec și tăietura la abscisă egală cu  $1/T_d$ . Defazajul este constant, la valoarea  $+\pi/2$ .

### 5.2 Derivatorul cu timp discret.

Dacă se înlocuiesc în ecuația (27) variațiile infinitezimale cu variații finite și se consideră timpul discret,  $t = kT_e$ , în locul timpului continuu, cu se obține **ecuația intrare-ieșire** a derivatorului :

$$y(k) = T_d \frac{\Delta u}{\Delta t} = T_d \frac{u(k) - u(k-1)}{kT_e - (k-1)T_e} = \frac{T_d}{T_e} [u(k) - u(k-1)] \quad (32)$$

Funcția de transfer este

$$H(z) = \frac{T_d}{T_e} (1 - z^{-1}) = \frac{T_d}{T_e} \frac{z-1}{z} \quad (33)$$

Se observă că derivatorul numeric, obținut prin discretizarea derivatorului ideal necauzal, **este un sistem la limită cauzal**, având un **zero pe cercul unitar, la  $z_z = 1$** .

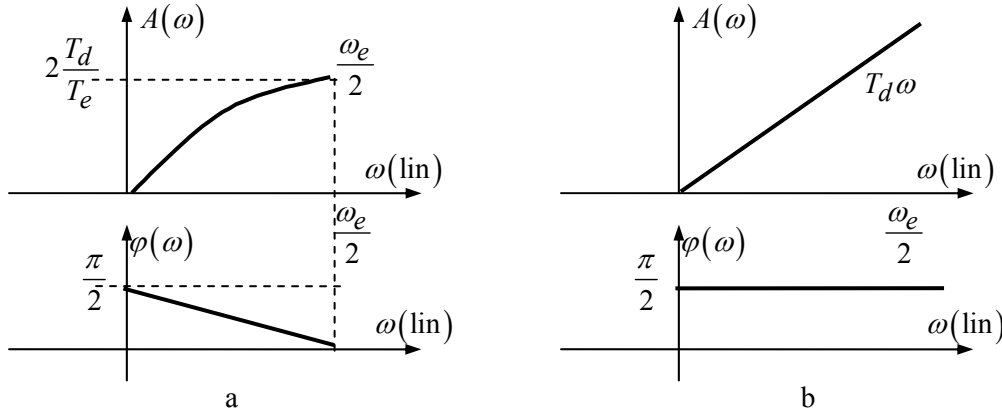
Răspunsul la frecvență are expresia:

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{T_d}{T_e} (1 - e^{-j\omega T_e}) = \frac{T_d}{T_e} e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \left( e^{j\frac{\omega T_e}{2}} - e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \right) = 2j \frac{T_d}{T_e} e^{-j\frac{\omega T_e}{2}} \sin \frac{\omega T_e}{2} \quad (34)$$

din care rezultă caracteristicile de frecvență :

$$A(\omega) = 2 \frac{T_d}{T_e} \sin \frac{\omega T_e}{2} ; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega T_e}{2} \quad 0 \leq \omega \leq \frac{\omega_e}{2} \quad (35)$$

Acestea sunt reprezentate în fig. 11.a. Dacă se compară aceste caracteristici, cu cele ale derivatorului ideal cu timp continuu :



**Fig. 11** Caracteristicile de frecvență ale derivatorului cu timp discret (a) și ale derivatorului ideal cu timp continuu (b)

$$A(\omega) = T_d \omega, \quad \varphi(\omega) = \pi/2 \quad (36)$$

se constată că, prin discretizarea timpului, derivatorul (4.236), conduce la caracteristici diferite de cele ale derivatorului ideal. În locul unei caracteristici de amplificări liniare cu frecvență, se obține o dependență neliniară, prin funcția sinus, iar în locul unei caracteristici de fază constantă, la valoarea  $\pi/2$ , se obține o caracteristică liniară descendentă, de la  $\pi/2$  la 0. Ca și în cazul integratorului, caracteristicile (35) se apropie mult de cele ideale **numai în zona de joasă frecvență**. La valori reduse ale pulsației  $\omega$  se poate scrie:

$$A(\omega) = 2 \frac{T_d}{T_e} \sin \frac{\omega T_e}{2} \cong 2 \frac{T_d}{T_e} \frac{\omega T_e}{2} = T_d \omega ; \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega T_e}{2} \cong \frac{\pi}{2} \quad (37)$$

## 5. Filtrul de ordinul unu.

Filtrul de ordinul unu se mai numește **sistem cu acțiune proporțională de ordinul unu** sau **element aperiodic** (denumirea de element aperiodic este valabilă numai în cazul timpului continuu)

### 5.1 Filtrul de ordinul 1 cu timp continuu

- **Ecuatia intrare-ieșire** :

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t) \quad (38)$$

unde :  $K$  – **coeficientul static de amplificare** ;  $T$  – **constanta de timp**.

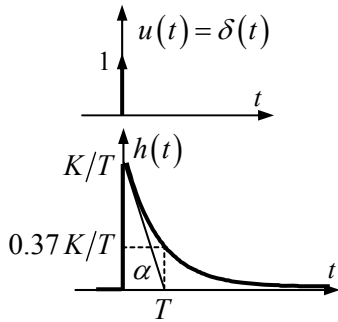
- **Funcția de transfer** este

$$H(s) = \frac{K}{Ts+1} \quad (39)$$

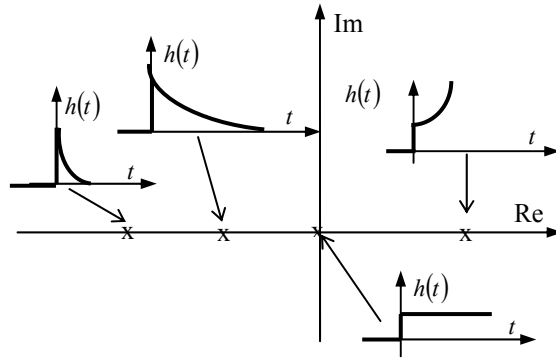
la care corespunde **polul**  $p = -1/T$  **în planul complex**.

**Răspunsul la impuls** se obține ca transformată Laplace inversă a funcției de transfer:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{K}{Ts+1} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{K/T}{s+1/T} \right\} = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (40)$$



**Fig. 12** Răspunsul la impuls al elementului aperiodic



**Fig. 13.** Forma răspunsului la impuls în funcție de poziția polului

fiind reprezentat în fig. 12. Pentru  $t=T$ , se obține :

$$h(T) = \frac{K}{T} e^{-1} = 0.37 \frac{K}{T} ; \quad \left| \frac{dh(t)}{dt} \right|_{t=0} = \text{tg } \alpha = \frac{K}{T^2} \quad (41)$$

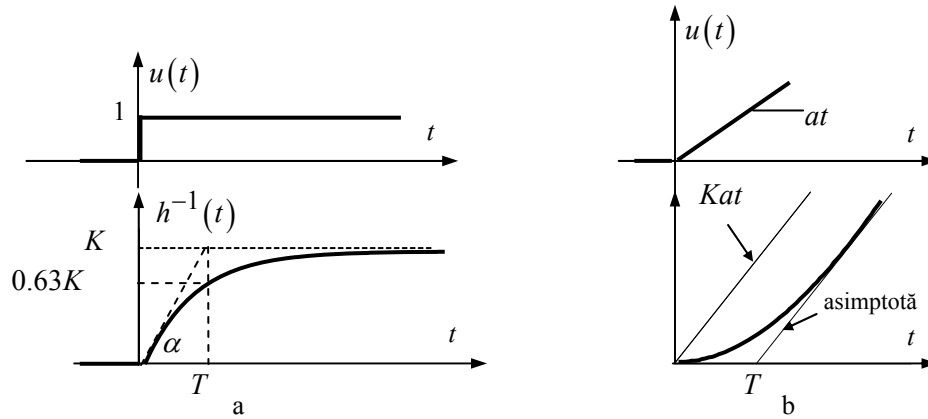
Acste relații dau două metode de determinare grafică a parametrului  $T$ , ilustrate în fig. 12.

În fig. 13 este prezentată forma răspunsului la impuls pentru diferite poziții în planul complex ale polului  $p = -1/T$ . Evident, elementul aperiodic are  $T > 0$ , polul fiind situat întotdeauna în semiplanul stâng. Regimul dinamic este cu atât mai prelungit, cu cât polul se află mai aproape de origine. Când distanța față de origine este mai mare (adică, constanta de timp este mai mică), cu atât regimul dinamic se stinge mai rapid.

**Răspunsul indicial** este

$$h^{(-1)}(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau = \frac{K}{T} \int_0^t e^{-\frac{\tau}{T}} d\tau = K \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (42)$$

având reprezentarea grafică din fig. 14,a. Aici sunt ilustrate procedurile grafice pentru determinarea constantei de timp  $T$ . Aceste proceduri au la bază relațiile :



**Fig. 14** Răspunsurile la treaptă (a) și la rampă (b) ale elementului aperiodic

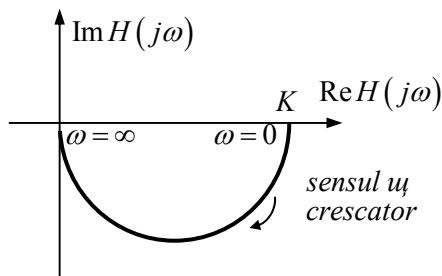
$$h^{(-1)}(T) = K(1 - e^{-1}) = 0,63K; \quad \left( \frac{dh^{(-1)}(t)}{dt} \right)_{t=0} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{K}{T} \quad (43)$$

**Răspunsul la un semnal în rampă**,  $u(t) = a \cdot t$ , are expresia

$$y(t) = K \cdot a \left( t - T + T e^{-\frac{t}{T}} \right) \quad (44)$$

fiind reprezentat în fig. 14,b. Ieșirea  $y(t)$  tinde spre asimptota de ecuație  $a \cdot (t - T)$ , unde  $t \geq T$ , adică spre o rampă întârziată cu  $T$  secunde, în raport cu evoluția ieșirii unui element cu amplificarea statică egală cu  $K$ , însă fără dinamică ( $T = 0$ ).

**Răspunsul la frecvență** este



**Fig. 15** Caracteristica Nyquist pentru elementul aperiodic

$$H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega T} \quad (45)$$

și conduce la următoarele expresii ale amplificării și defazajului

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}}; \quad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}(T\omega) \quad (46)$$

**Caracteristica Nyquist** este forma unui cerc cu raza  $K/2$  și cu centrul în punctul de coordonate  $(K/2, j.0)$ . Atunci când  $\omega$  variază de la 0 la  $+\infty$ , este parcurs semicercul situat sub axa reală. (fig.15).

**Caracteristicile Bode** se pot trasa punct cu punct, calculând amplificarea în dB, pornind de la realția (46) :

$$A_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \frac{K}{\sqrt{(T\omega)^2 + 1}} \right) = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \quad (47)$$

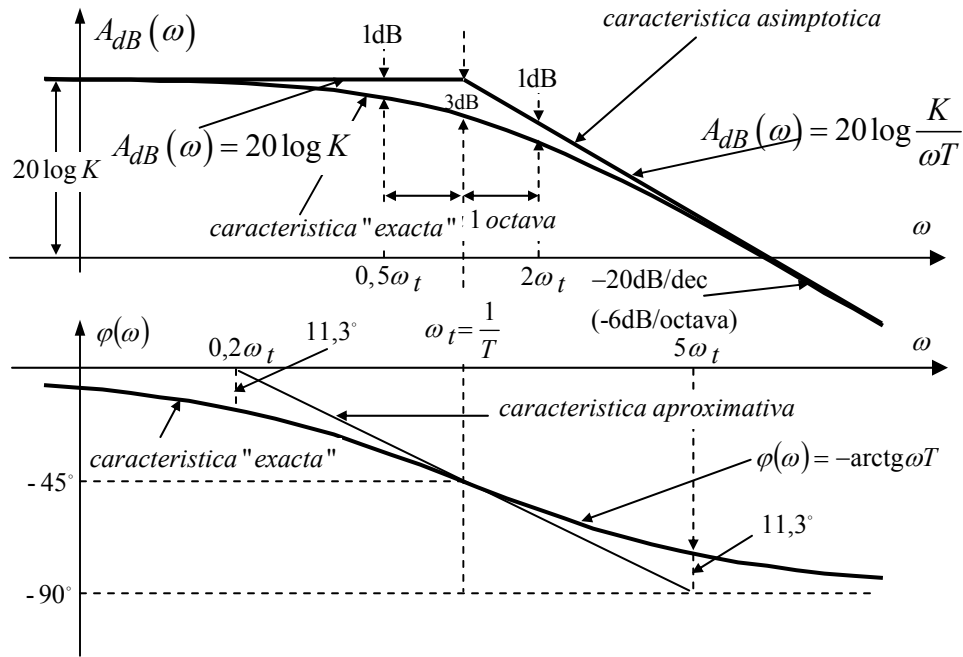


Fig. 16 Caracteristicile Bode pentru un sistem de ordinul unu

și defazajul,  $\varphi(\omega) = -\arctg(T\omega)$ , obținându-se caracteristicile exacte. Este însă posibil să se utilizeze o reprezentare aproximativă a caracteristicii de amplificarea, prin asimptotele acestei caracteristici. Aceasta este **caracteristica asimptotică**, formată din :

- o dreaptă orizontală pentru  $\omega \ll \omega_c$ , când  $A_{dB} \approx 20 \log K$
- o dreaptă cu panta de  $-20 \text{ dB/dec}$ , pentru  $\omega \gg \omega_c$ . Într-adevăr, la frecvențe mari, adică atunci când  $\omega \approx 1/T$ , avem

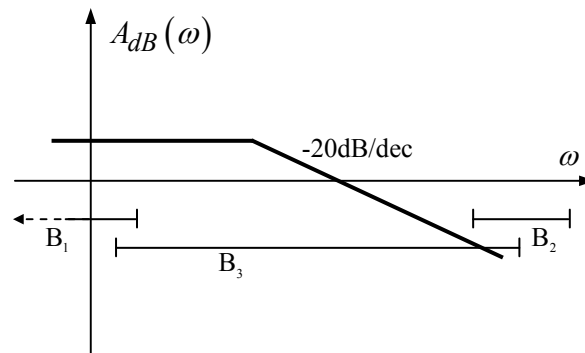
$$A_{dB} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2} \approx 20 \log K - 20 \log T - 20 \log \omega$$

Frecvența  $\omega_t = 1/T$  la care caracteristica Bode se frânge se numește **frecvență de frângere** (uneori, ea este denumită **frecvență de tăiere**).

Caracteristica asimptotică este un **model frecvențial parametric**, deoarece el definește filtrul prin doi parametri : coeficientul static de amplificarea în dB și frecvența de frângere. Distanța maximă dintre caracteristica asimptotică și cea reală este de 3dB, la pulsația  $\omega_t$ , și de 1dB, la  $0,5\omega_t$  și  $2\omega_t$ . Caracteristicile de amplificarea și de defazaj, reale și aproximative, sunt reprezentate în fig. 16.



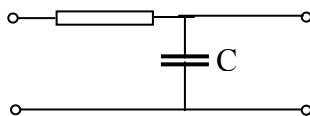
**Observații.** 1. Filtrul de ordinul 1 (elementul aperiodic) poate avea funcțiuni distincte



**Fig. 17** Funcțiuni ale elementului aperiodic în raport cu domeniul spectral al intrării

de procesare a semnalului de intrare, în funcție de banda caracteristicii spectrale a acestui semnal. Pentru trei benzi de frecvență,  $B_1$ ,  $B_2$  et  $B_3$ , date în a fig.17, sistemul se poate comporta:

- ca un amplificator, pentru semnalul cu banda  $B_1$ ,
- ca un integrator, în raport cu semnalul având banda  $B_2$ ,
- ca un filtru trece jos, în raport cu semnalul cu banda  $B_3$ .



2. Circuitul pasiv RC (Fig. 18) are funcția de transfer de forma (39), în care  $K=1$  și  $T=RC$ .