CURS 5
8 Sistemul defazor de ordinul unu
8.1 Sistemul defazor de ordinul unu cu timp continuu

- ***Ecuația intrare-ieşire*** a sistemul defazor este

$$T\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+y=u-T\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \tag{89}$$

- ***Funcția de transfer***

$$H(s)=\frac{1-Ts}{1+Ts} \tag{90}$$

corespunde unui sistem la limită cauzal. *Acesta are un zero în semiplanul drept*, distribuția pol-zero fiind simetrică față de origine (fig. 38).

- ***Răspunsul la frecvență*** este:

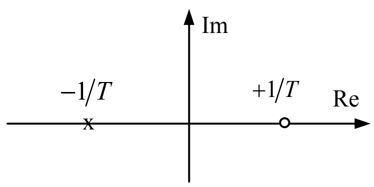


Fig. 38 Distribuția pol – zero la un sistem defazor de ordinul 1

$$H(j\omega)=\frac{1-j\omega T}{1+j\omega T} \tag{91}$$

astfel încât se obțin caracteristicile de frecvență

$$A(\omega)=1;\quad A_{dB}(\omega)=0 \tag{92}$$

$$\varphi(\omega)=-2\mathrm{arctg}T\omega \tag{93}$$

Sub aspectul caracteristicii de amplificare, sistemul se comportă ca un ***filtru « trece tot ».***

Caracteristicile Nyquist şi Bode sunt date în fig. 39.a şi b.

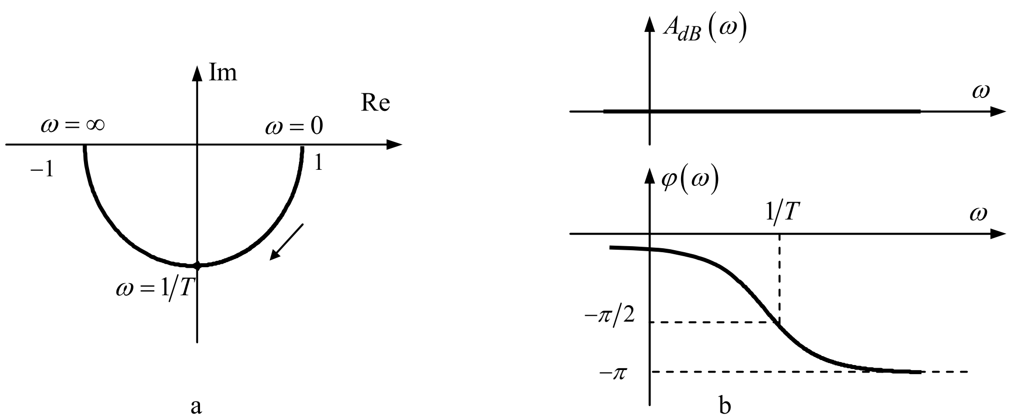


Fig. 39 Caracteristicile Nyquist (a) şi Bode (b) ale unui sistem defazor de ordinul 1

Pentru a uşura calculul răspunsului indicial, se pune funcția de transfer (90) sub forma

$$H(s)=1-\frac{2Ts}{Ts+1} \tag{94}$$

Rezultă :

$$h^{(-1)}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}H(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\cdot\frac{2Ts}{Ts+1}\right\} =$$
$$= u(t)(1-2e^{-\frac{t}{T}}) \quad \left(t \geq 0;\ u(t) - \text{ treapta unitara}\right) \tag{95}$$

In fig. 40 este dat răspunsul indicial împreună cu cele două componente ale sale: $u(t)$ şi $-2e^{-t/T}u(t)$ (cu linie întreruptă). Se constată că, la început, evoluția variabilei de ieşire are loc în sens opus față de intrare, după care se stabileşte printr-o evoluție

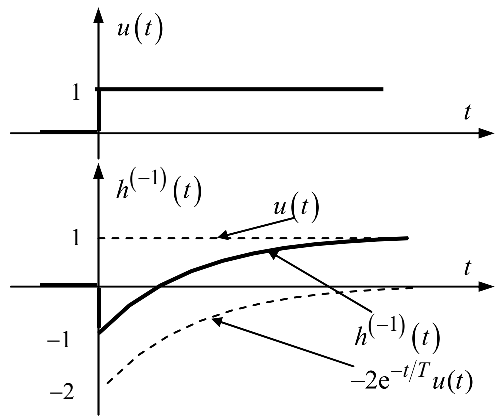


Fig. 40 Răspunsul indicial al unui sistem defazor de ordinul 1

monotonă la valoarea staționară unitară ($\lim\limits_{t\to\infty} h^{(-1)}(t) = 1$).

8.2 Sistemul defazor de ordinul unu cu timp discret

Distribuția pol-zero a sistemului este simetrică în raport cu cercul unitar, fiind ilustrată în fig. 41. Deci, dacă z_p este polul sistemului, atunci zeroul este $z_z = 1/z_p$.

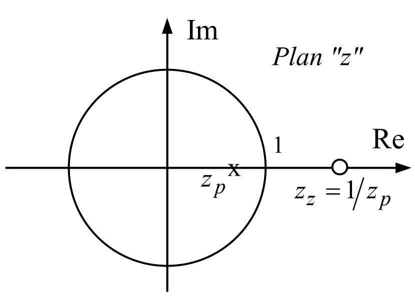


Fig. 41 Distribuția pol-zero a unui sistem defazor de ordinul unu cu timp discret

Funcția de transfer a sistemului rezultă de forma :

$$H(z) = \frac{1 - z\cdot z_p}{z - z_p} \tag{96}$$

Din expresia răspunsului la frecvență:

$$H\left(e^{j\omega T_e}\right) = \frac{\left(1 - z_p\cdot\cos\omega T_e\right) - jz_p\sin\omega T_e}{\left(\cos\omega T_e - z_p\right) + j\sin\omega T_e} \tag{97}$$

rezultă :

$$A(\omega) = 1\ ; \qquad \varphi(\omega) = -\operatorname{arctg}\frac{z_p\sin\omega T_e}{1 - z_p\cos\omega T_e} - \operatorname{arctg}\frac{\sin\omega T_e}{\cos\omega T_e - z_p} \tag{98}$$

Observație Dacă un sistem de ordinul *n* are *n* zerouri care sunt simetrice in raport cu polii, sistemul respectiv este defazor pur (filtru trece-tot). Simetria se consideră în raport cu axa imaginară – pentru sistemele cu timp continuu – şi în raport cu cercul unitar – pentru cazul timpului discret.

9. Filtrul trece jos ideal

Caracteristica de frecvență a filtrului trece jos (FTJ) ideal este prezentată în fig. 42. Amplificarea este unitară până la pulsația de tăiere ω_t, după care amplificarea este egală cu zero. Aspectul esențial al acestei caracteristici este variația bruscă, de la valoarea unitară la valoarea zero, a amplificării la pulsația de tăiere (panta de variație a acestei caracteristici, la ω_t, este $-\infty$). Caracteristica de fază poate avea două forme: a) $\varphi(\omega)=0$ sau b) $\varphi(\omega)=-t_0\omega$, unde t_0 este un număr constant (fig. 42).

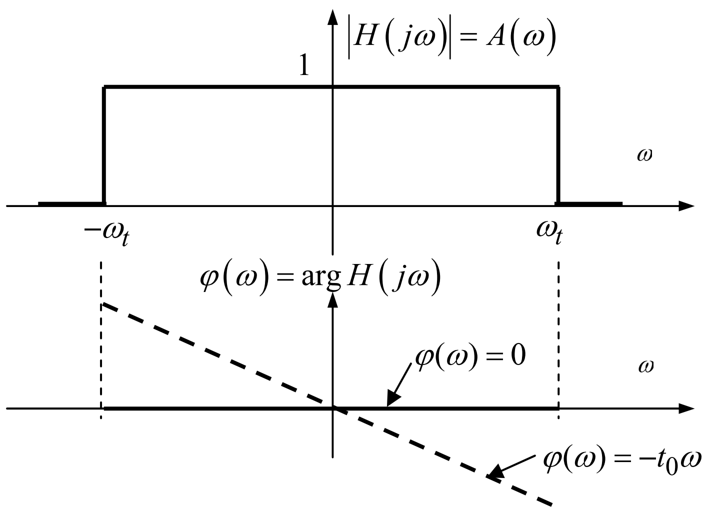


Fig. 42 Caracteristica de frecvență a FTJ ideal

Considerând domeniul $\omega\in(-\infty,+\infty)$ pentru pulsație, caracteristica de amplificare are simetrie pară, pe când cea de fază are simetrie impară (fig. 42).

Răspunsul la frecvență al FTJ ideal este

$$H(j\omega)=|H(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)} \tag{99}$$

unde $|H(j\omega)|=A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ au formele prezentate. Pentru început se va considera $\varphi(\omega)=0$.

Răspunsul la impuls al FTJ ideal este

$$\begin{aligned} h(t)&=\mathsf{F}^{-1}\{H(j\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega= \\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_t}^{\omega_t}1.\mathrm{e}^{j\omega t}\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{jt}\mathrm{e}^{j\omega t}\Big|_{-\omega_t}^{\omega_t}=\frac{1}{\pi t}\frac{\mathrm{e}^{j\omega_t t}-\mathrm{e}^{-j\omega_t t}}{2j}=\frac{\omega_t}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_t t) \end{aligned} \tag{100}$$

Reprezentarea grafică a acestui răspuns este dată în fig. 43. Se observă că ***sistemul este necauzal***, deoarece răspunsul $h(t)$ începe să se producă înainte de a aplica

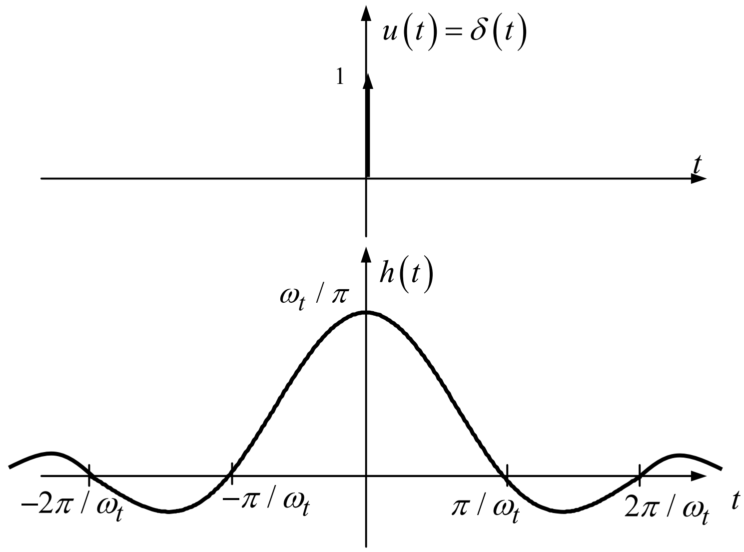


Fig. 43 Răspunsul la impuls al FTJ ideal

semnalul de intrare $\delta(t)$ (efectul apare înaintea cauzei).

Dacă se admite că FTJ ideal are caracteristica de fază de forma $\varphi(\omega) = -t_0\omega$ (cazul cel mai frecvent admis în analiză), atunci răspunsul la impuls are expresia

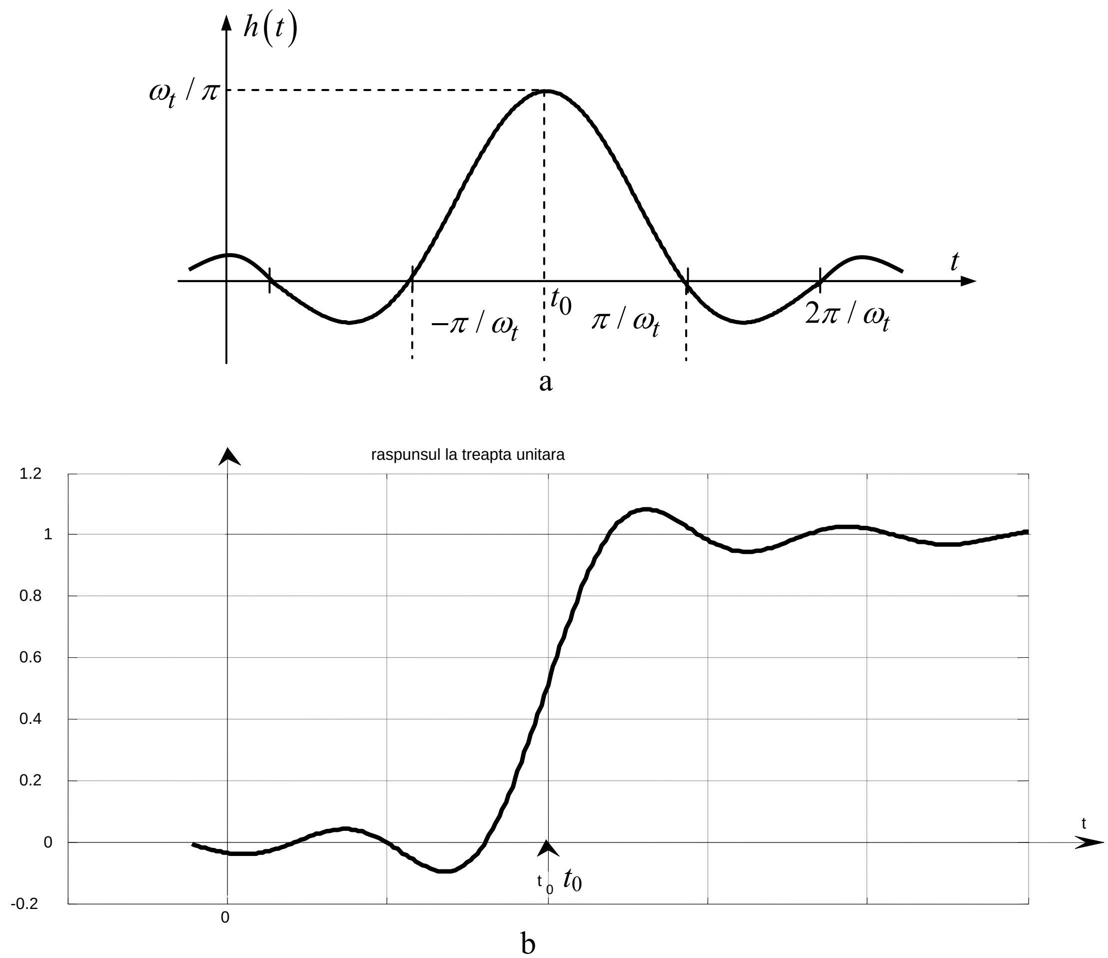


Fig. 44 Răspunsul la impuls (a) şi la semnal treaptă (b) al FTJ ideal

$$h(t)=\frac{\omega_t}{\pi}\mathrm{sinc}\left(\omega_t(t-t_0)\right) \quad (101)$$

iar forma răspunsului la impuls este dată în fig. 44.a.

Răspunsul la treaptă unitară este

$$h^{(-1)}(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}si[\omega_t(t-t_0)] \quad (102)$$

unde s*i*(*t*) este funcția ***sinus integral***, definită prin relația

$$si(t)=\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau-\frac{\pi}{2} \quad (103)$$

Răspunsul la treaptă unitară este dat în fig.44.b.

10 Analiza filtrelor FIR

Filtrele FIR sunt, în general, modele neparametrice, adică ele pot avea reprezentări netipizate, extreme de variate. In consecință, filtrele FIR nu pot fi structurate în acelaşi mod ca şi filtrele IIR, în cadrul cărora s-au definit filtrele elementare déjà prezentate (integratorul, filtrul de ordinul 1 etc).

Analiza filtrelor FIR se face însă în acelaşi mod, ca şi în cazul filtrelor IIR. Pentru ilustrare, se va considera – *ca exemplu* – cazul unui filtru FIR care are răspunsul la impuls sub forma unei succesiuni de valori unitare, până la timpul discret k=m-1, după care valorile discrete ale răspunsului sunt nule (fig. 45, unde s-a considerat m=7).

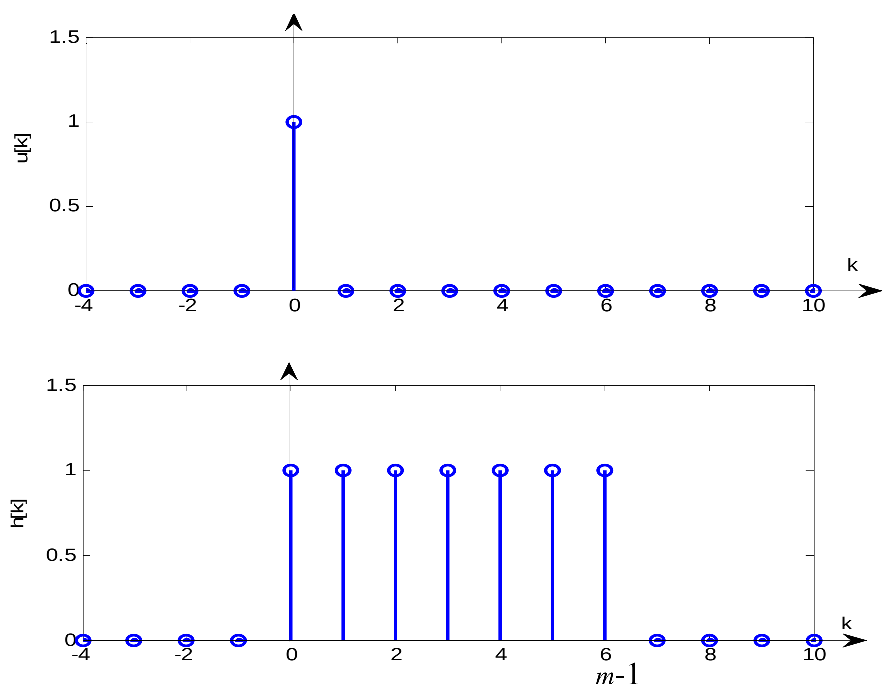


Fig. 45 Răspunsul la impuls a unui filtru FIR (exemplu)

Răspunsul la impuls, $h(k)$, are forma unei « ferestre rectangulare » şi poate fi pus sub forma :

$$h(k)=u(k)-u(k-m) \quad (104)$$

unde $u(k)$ este semnalul treaptă cu timp discret, iar $u(k-m)$ este acelaşi semnal întârziat cu k paşi. Funcţia de transfer a filtrului este

$$H(z) = Z\{u(k)\} - Z\{u(k-m)\} = \frac{1}{1-z^{-1}} - z^{-m}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-m}}{1-z^{-1}} \tag{105}$$

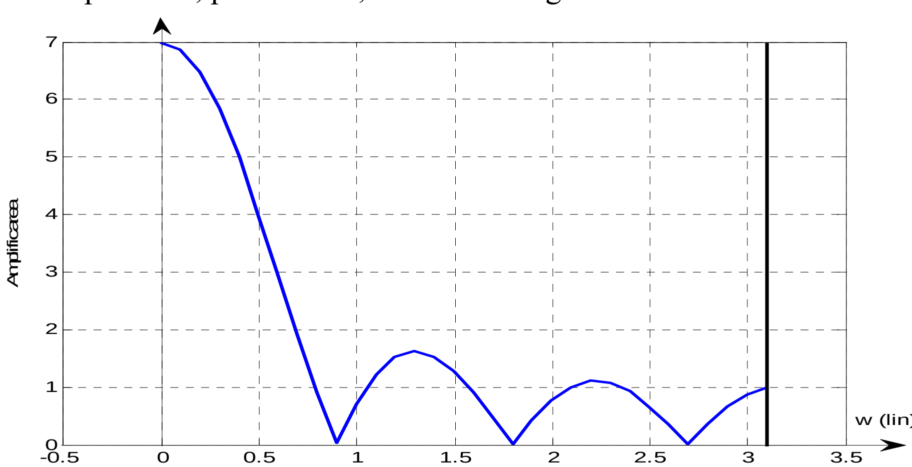
Răapunsul la frecvenţă este

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{1-e^{-jm\omega T_e}}{1-e^{-j\omega T_e}} = \frac{e^{-\frac{jm\omega T_e}{2}}\left(e^{\frac{jm\omega T_e}{2}} - e^{-\frac{jm\omega T_e}{2}}\right)}{e^{-\frac{j\omega T_e}{2}}\left(e^{\frac{j\omega T_e}{2}} - e^{-\frac{j\omega T_e}{2}}\right)} = e^{-\frac{j(m-1)\omega T_e}{2}} \frac{\sin\left(\frac{m\omega T_e}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)} \tag{106}$$

Expresiile amplificării şi defazajului sunt :

$$A(\omega) = \left|\frac{\sin\left(\frac{m\omega T_e}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T_e}{2}\right)}\right| \quad ; \quad \varphi(\omega) = -\frac{(m-1)\omega T_e}{2} \tag{107}$$

Caracteristica amplificării, pentru *m*=7, este dată în fig.46



11. Sisteme de fază minimă

Fie sistemele având funcţiile de transfer următoare :

$$H(s) = 1;\ H_1(s) = \mathrm{e}^{-\tau s};\ H_2(s) = \frac{1-Ts}{1+Ts};\ H_3(s) = -1; \tag{108}$$

Pentru toate aceste sisteme, caracteristica de amplidicare este aceeaşi :

$$A(\omega) = A_1(\omega) = A_2(\omega) = A_3(\omega) = 1 \tag{109}$$

însă caracteristicile de fază sunt diferite:

$$\varphi(\omega) = 0; \quad \varphi_1(\omega) = -\omega\tau; \quad \varphi_2(\omega) = -2\mathrm{arctg}T\omega; \quad \varphi_3(\omega) = -\pi \tag{110}$$

Intre cele 4 sisteme analizate, sistemul $H(s)=1$ *are caracteristica de fază minimă* (*în valoare absolută*), pentru aceeaşi caracteristica de amplificare.

Fie acum sistemele:

$$H_4(s) = \frac{K}{Ts+1}; \quad H_5(s) = \frac{K}{Ts-1} \tag{111}$$

primul având un pol în semiplanul stâng, iar al doilea având un pol simetric în semiplanul drept (formal, mărimile $|H_4(j\omega)|$ şi $|H_5(j\omega)|$ sunt aceleaşi). Se va arăta în capitolul 3 că dacă un sistem are poli în semiplanul drept, el este instabil, adică nu are regim permanent şi, prin urmare, nu i se poate defini o caracteristică de frecvență.

Un sistem se numeşte cu minimum de fază dacă este stabil şi dacă, printre sistemele cu aceeaşi caracteristică de amplificare, are caracteristica de fază minimă (în valoare absolută).

Un sistem **nu** este de fază minimă, dacă funcția de transfer comportă :

- fie un factor $e^{-\tau s}$, corespunzător unei întârzieri pure – cazul funcției de transfer $H_1(s)$;

- fie un zero în semiplanul drept – cazul funcției de transfer $H_2(s)$ (pentru sistemele cu timp discret, zeroul este în exteriorul cercului unitar);

- fie un pol în semiplanul drept – cazul funcției de transfer $H_5(s)$ (pentru sistemele cu timp discret, polul este în exteriorul cercului unitar);

- fie funcția de transfer este precedată de semnul minus – cazul funcției de transfer $H_3(s)$;

Observație. Fie sistemul definit prin funcția de transfer

$$H(s) = \frac{K(1-T_{1s})}{(T_2 s+1)(T_3 s+1)} \tag{112}$$

Aceasta poate fi scrisă sub forma:

$$H(s) = \frac{K(T_1 s+1)}{(T_2 s+1)(T_3 s+1)} \cdot \frac{1-T_1 s}{1+T_1 s} = H_{FM}(s) \cdot \frac{1-T_1 s}{1+T_1 s} \tag{113}$$

Deci, sistemul (112) a fost descompus în două subsisteme înseriate: un subsistem de fază minimă, cu funcția de transfer $H_{FM}(s)$, şi un subsistem de tip filtru « trece tot » (subsistem defazor pur).

Se poate demonstra că pentru sistemele de fază minimă este posibil să se determine analitic caracteristica de fază, plecând de la caracteristica de amplificare, prin intermediul transformatei Hilbert (teorema lui Bode) :

$$\ln[A(\omega)] = \ln[A(\infty)] + H\{\varphi(\omega)\}; \quad \varphi(\omega) = H^{-1}\{\ln[A(\omega)]\} \tag{114}$$

Deci, pentru un sistem strict cauzal (la care $A(\omega)=0$), funcțiile $A(\omega)$ şi $\varphi(\omega)$ formează o pereche Hilbert.

Deci, pentru sistemele de fază minimă este suficient să se dea caracteristica de amplificare, pentru a descrie complet modelul sistemului.

REPREZENTARI STRUCTURALE SI CONVERSIA MODELELOR

1 Introducere

Examinarea reprezentărilor matematice ale sistemelor a relevat o mare varietate a modului în care sistemele pot fi descrise. Un tabel sintetic ale reprezentărilor sistemelor cu timp continuu este dat în fig. 2. In mod similar se poate alcătui o structurare a tipurilor

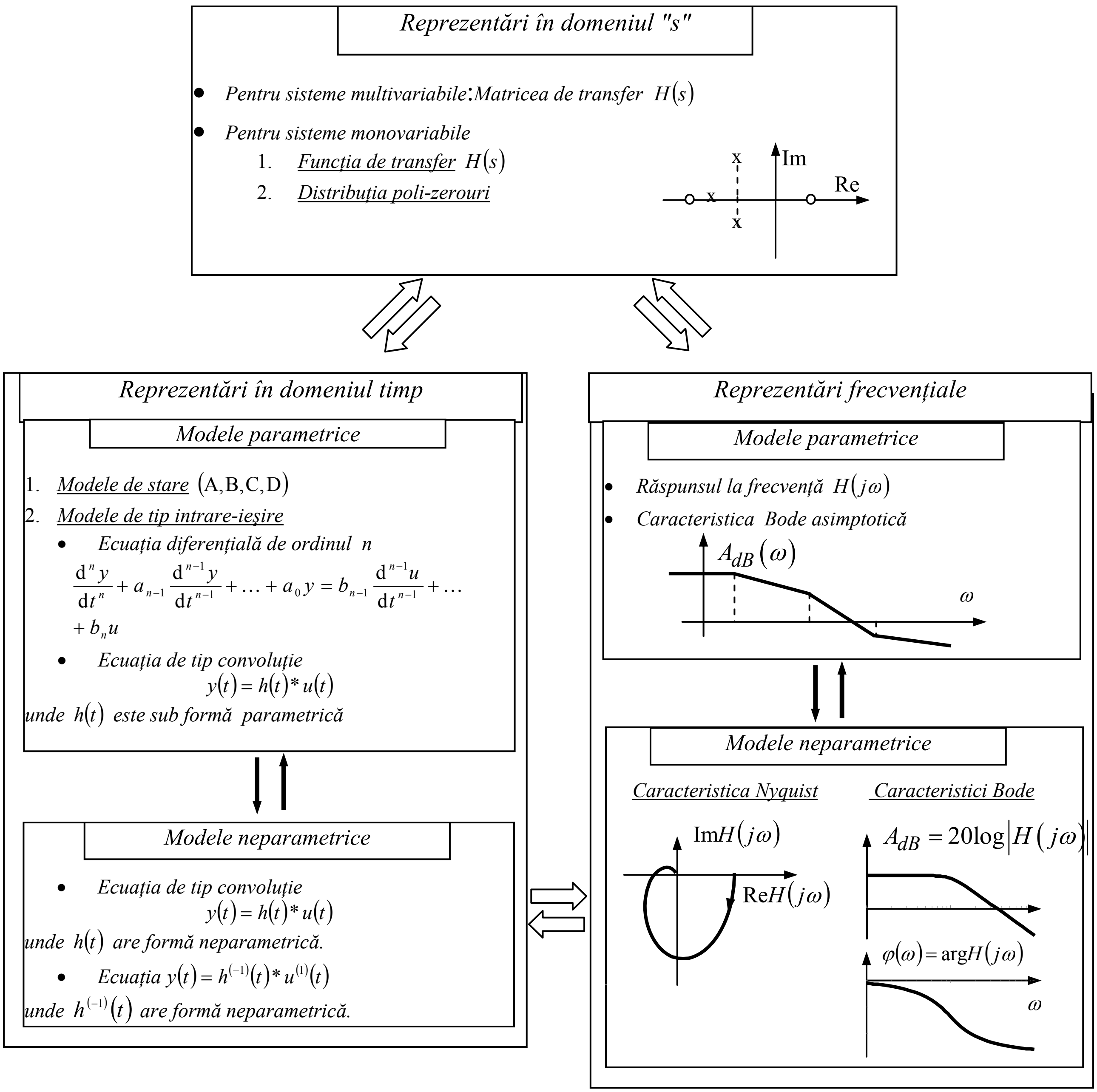


Fig. 1 Reprezentări matematice ale sistemelor cu timp continuu

de reprezentări matematice pentru sistemele cu timp discret (aici va interveni, în plus, categoria sistemelor FIR).

Frecvent, în problemele de analiză/sinteză a sistemelor, modelul sistemului este dat într-o formă de reprezentare, iar metoda de analiză/sinteză impune utilizarea altei forme de reprezentare. Evident, în acest caz trebuie să se facă o conversie a modelului, din forma de reprezentare dată inițial, în forma de reprezentare cerută de metoda de analiză/sinteză.

Având în vedere varietatea reprezentarilor, pot exista numeroase conversii ale modelelor. Multe din aceste conversii au fost deja definite prin relațiile de definiție ale modelelor, ca de exemplu:

ecuație diferențială ↔ *funcție de transfer* ↔ *distribuție poli-zerouri* ↔ *răspuns la impuls parametric* ↔ *răspuns indicial* (*la treaptă unitară*) *parametric*

sau

ecuație de stare → *matrice de transfer,*

sau

funcție de transfer → *răspuns la frecvență* → *modele frecvențiale neparametrice* (*caracteristica Nyquist, caracteristici Bode*).

Conversia modelelor poate fi considerată nu numai ca o etapă preliminară a unei probleme de analiză sau de sinteză, dar şi ca ***o problemă de analiză în sine***. Intr-adevăr, dacă se dă funcția de transfer iar obiectivul analizei este de a se stabili proprietățile temporale ale sistemului, prin intermediul răspunsului la impuls sau la treaptă, atunci conversia : *functie de transfer* → *răspuns la impuls/treaptă* reprezintă în sine o metodă de analiză a sistemului.

In acest capitol se vor examina conversiile:

- *funcție de transfer*↔ *caracteristica Bode asimptotică*;
- *funcție de transfer* ↔ *ecuație de stare în formă canonică*;
- *conversia modelelor neparametrice*;

O problemă particulară, foarte importantă, constă în discretizarea unui sistem cu timp continuu, altfel spus, conversia : *funcție de transfer cu timp continuu* → *funcție de transfer cu timp discret.*