

CURS 19

Metode de aproximare în sinteza filtrelor

1. Principiul sintezei

Se porneste de la un filtru trece jos (FTJ) ideal, având caracteristica de frecvență din fig. 1. În ordonată se reprezintă pătratul amplificării $A^2(\omega) = |H(j\omega)|^2$. FTJ ideal nu este realizabil fizic (are o panta infinită caracteristicii de la zona de trecere la cea de blocare).

Prima problema care se pune este cea de **aproximare** a acestei caracteristici ideale, nerealizabile fizic, printr-o caracteristică realizabilă fizic. Cele mai utilizate metode de

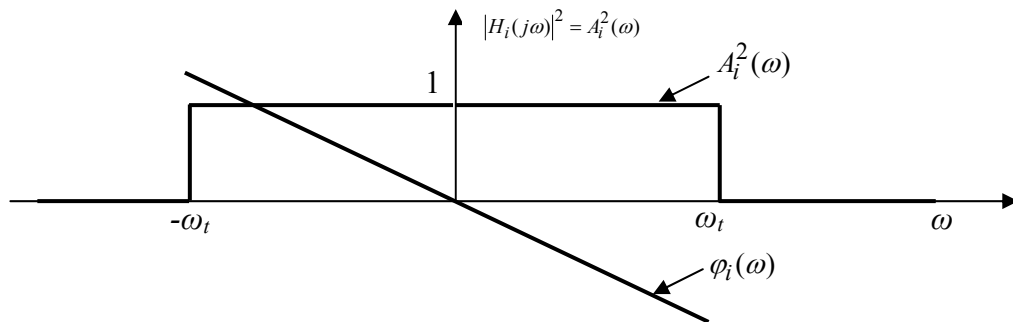


Fig. 1 Caracteristica pătratului amplificării și caracteristica de fază la un FTJ ideal

aproximare sunt:

1. aproximarea de tip „maximum plat”;
2. aproximarea de tip Cebâșev.

De regulă, procedura de proiectare a unui filtru prevede, într-o primă etapă, proiectarea unui filtru trece jos **normalizat**, la care caracteristica de frecvență se consideră în raport cu frecvența normală ω / ω_t . În aceste condiții, frecvența de tăiere a FTJ normalizat se consideră unitară.

Procedura de proiectare a unui filtru include următoarele etape:

1. pornind de la cerințele de calitate impuse prin datele de proiectare, se determină **ordinul filtrului normalizat**, precum și **funcția de transfer** a acestuia;
2. se recalculează parametrii din funcția de transfer a filtrului, astfel încât acesta să realizeze frecvența de tăiere impusă în aplicația reală;
3. filtrul sintetizat este un sistem IIR, care poate fi implementat prin mijloace analogice sau numerice. În situația realizării numerice, se discretizează funcția de transfer obținută la pasul anterior.

Dacă se cere proiectarea unui alt tip de filtru, FTJ, FTB sau FOB, atunci se aplică transformări de frecvență specifice, pentru obținerea acestor filtre, punind de la FTJ normalizat.

2. Aproximarea de tip „maximum plat”

În acest caz, **forma caracteristicii de frecvență este monoton scăzătoare** și se pune condiția de „**maximum plat**”, adică pătratul amplificării, $A^2(\omega)$, să fie cât mai aproape de valoarea unitară, în banda de trecere, și cât mai aproape de zero, în banda de blocare.

Fie un filtru având următoarea expresie generală a pătratului amplificării:

$$|H(j\omega)|^2 = A^2(\omega^2) = \frac{1 + d_1\omega^2 + d_2\omega^4 + \dots + d_m\omega^{2m}}{1 + c_1\omega^2 + c_2\omega^4 + \dots + c_n\omega^{2n}} \quad (1)$$

unde valoarea maximă a lui m este $m = n - 1$.

Eroarea de aproximare a funcției $|H_i(j\omega)|^2$ prin $|H(j\omega)|^2$ este

$$\varepsilon(\omega^2) = \begin{cases} 1 - |H(j\omega)|^2 & \text{pentru } \omega \in [0, 1] \\ -|H(j\omega)|^2 & \text{pentru } \omega > 1 \end{cases} \quad (2)$$

Se dezvoltă în serie această funcție, pentru $\omega = 0$:

$$\varepsilon(\omega^2) = \varepsilon(0) + \frac{\omega^2}{1!} \left(\frac{d\varepsilon(\omega^2)}{d\omega^2} \right)_{\omega=0} + \frac{(\omega^2)^2}{2!} \left(\frac{d^2\varepsilon(\omega^2)}{(d\omega^2)^2} \right)_{\omega=0} + \dots + \frac{(\omega^2)^k}{k!} \left(\frac{d^k\varepsilon(\omega^2)}{(d\omega^2)^k} \right)_{\omega=0} + \dots \quad (3)$$

în care $\varepsilon(0)=0$. Pentru îndeplinirea condiției de tip maximum plat în banda de trecere, este necesar ca un număr cât mai mare din termenii dezvoltării în serie să fie nuli. Din relația (2) se constată că derivatele erorii și ale pătratului amplificării diferă doar prin semn. Prin urmare, se impune condiția ca un număr cât mai mare de derivate ale pătratului amplificării să se anuleze, pentru $\omega = 0$. Pornind de la relația (1), pătratul amplificării se poate pune sub forma

$$A^2(\omega^2) = 1 + (c_1 - d_1)\omega^2 + [(c_1 - d_1) - d_1(c_2 - d_2)]\omega^4 + \dots \quad (4)$$

și rezultă că

$$\left(\frac{d\varepsilon(\omega^2)}{d\omega^2} \right)_{\omega=0} = (c_1 - d_1), \text{ deci anularea acestei derivate implică } c_1 = d_1; \text{ apoi } \left(\frac{d^2\varepsilon(\omega^2)}{(d\omega^2)^2} \right)_{\omega=0} = (c_1 - d_1) - d_1(c_2 - d_2), \text{ deci anularea și a acestei derivate implică } c_2 = d_2, \text{ etc.}$$

Deci, pătratul amplificării, $A^2(\omega)$, satisface condiția de maximum plat dacă

$$c_1 = d_1; c_2 = d_2; \dots; c_m = d_m \quad (5)$$

Dacă sunt valabile relațiile (5) și se definește polinomul

$$A_m(\omega^2) = 1 + d_1\omega^2 + d_2\omega^4 + \dots + d_m\omega^{2m} \quad (6)$$

atunci condiția de maximum plat este ca expresia (1) să fie sub forma

$$|H(j\omega)|^2 = A^2(\omega^2) = \frac{A_m(\omega^2)}{A_m(\omega^2) + c_n\omega^{2n}} \quad (7)$$

Filtrul Butterworth

Cazul cel mai important al filtrelor de tip maximum plat se obține punând:

$$A_m(\omega^2) = 1, \quad (8)$$

adică numărătorul funcției de transfer este egal cu 1. Dacă, în plus, $c_n = 1$, atunci pătratul amplificării are expresia

$$|H(j\omega)|^2 = A^2(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} \quad (9)$$

iar filtrul care se obține se numește **filtru Butterworth**.

Amplificarea în dB a filtrului Butterworth este

$$A_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = 10 \log \frac{1}{1 + \omega^{2n}} = -10 \log(1 + \omega^{2n}) \quad (10)$$

Deoarece caracteristica se consideră în raport cu frecvența normată (când pulsația de tăiere se consideră unitară), în zona de trecere avem:

$$A_{dB} = -10 \log(1 + \omega^{2n}) \cong -10 \log(1) = 0; \quad \omega < 1; \quad (8)$$

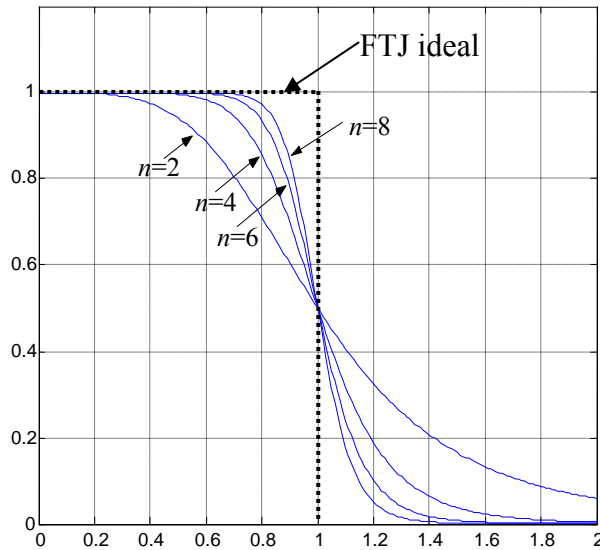
iar în zona de blocare

$$A_{dB} = -10 \log(1 + \omega^{2n}) \cong -10 \log(\omega^{2n}) = -20.n \cdot \log \omega; \quad \omega > 1; \quad (9)$$

Deci, caracteristica de frecvență are, în zona de blocare, o pantă egală cu $-20.n$ dB/dec.

Forma caracteristicii $A^2(\omega)$ este data în Fig. 2, pentru diferite valori ale ordinului n al filtrului.

Aceste caracteristici sunt obținute cu programul Matlab alăturat.



```
clear all;close all;
om=0:0.01:2;M=length(om);
for k=2:2:8
    for i=1:M
        Ap(i)=1/(1+om(i)^(2*k));
    end
    plot(om,Ap);hold on;
end
grid;
axis([0 2 0 1.2])
```

Fig.2 Forma caracteristicii pătratului amplificării filtrului Butterworth, la diferite valori ale ordinului n

Proiectarea filtrului Butterworth

Datele de proiectare sunt furnizate prin gabaritul impus filtrului, care include performanțele pe care trebuie să le realizeze filtrul. În fig. 3 se ilustrează gabaritul filtrului, definit prin 4 parametri: două frecvențe, ω_e și ω_b , situate la stânga și la dreapta frecvenței de tăiere $\omega_t = 1$ (de regulă, la distanțe foarte mici), și amplificările în dB corespunzătoare acestor frecvențe (A_M și A_m). Caracteristica de frecvență a filtrului trebuie să se „strecoare” prin canalul neînegrit din Fig. 3.

Pașii de proiectare a filtrului Butterworth sunt următorii:

1. **Determinarea ordinului n al filtrului**, în funcție de cei 4 parametri de gabarit. Utilizând relația (9) pentru frecvențele, ω_e și ω_b , se obține:

$$A_M = -10 \log(1 + \omega_e^{2n}) \quad (11)$$

de unde rezultă

$$\omega_e^{2n} = 10^{-A_M/10} - 1 \quad (12)$$

sau

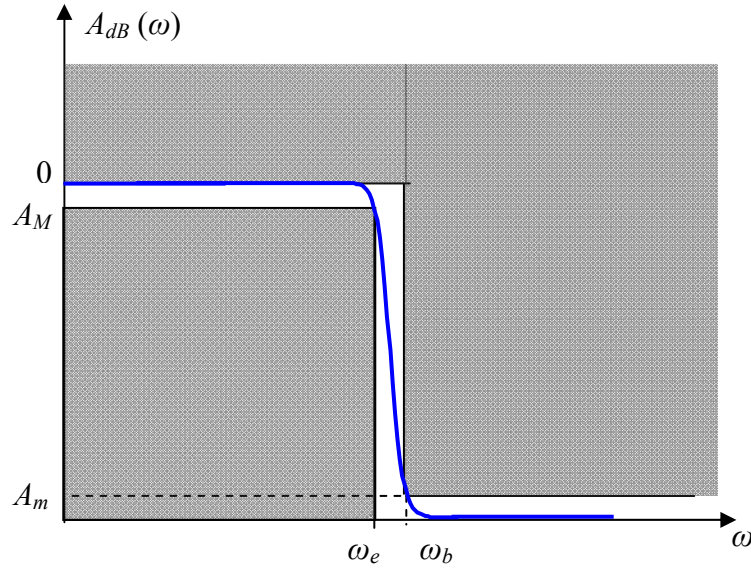


Fig. 3 Gabaritul impus la proiectarea filtrului Butterworth

$$\omega_e^n = \sqrt{10^{-A_M/10} - 1} \quad (13)$$

In mod similar,

$$A_m = -10 \log(1 + \omega_b^{2n}) \quad (14)$$

de unde se obține

$$\omega_b^{2n} = 10^{-A_m/10} - 1 \quad (15)$$

sau

$$\omega_b^n = \sqrt{10^{-A_m/10} - 1} \quad (16)$$

Făcând raportul relațiilor (16) și (13), rezultă

$$\left(\frac{\omega_b}{\omega_e} \right)^n = \sqrt{\frac{10^{-A_m/10} - 1}{10^{-A_M/10} - 1}} \quad (17)$$

Dacă se notează:

$$k_f = \frac{\omega_b}{\omega_e} \quad (18)$$

și

$$k_a = \sqrt{\frac{10^{-A_m/10} - 1}{10^{-A_M/10} - 1}} \quad (19)$$

atunci relația (17) devine

$$k_f^n = k_a \quad (20)$$

și rezultă

$$n \geq \frac{\ln k_a}{\ln k_f} \quad (21)$$

Ordinul filtrului se consideră valoarea **întreagă superioară** cea mai apropiată de raportul $\ln k_a / \ln k_f$.

2 Deducerea funcției de transfer a filtrului.

Filtrul Butterworth de ordinul n are funcția de transfer de forma:

$$H(s) = \frac{1}{P_n(s)} = \frac{1}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n} \quad (22)$$

Deci, pătratul amplificării filtrului este

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{P_n(s)P_n(-s)} \Big|_{s=j\omega} \quad (23)$$

Pe de altă parte, filtrul Butterworth se definește prin relația (9), adică

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^{2n}} = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}} \Big|_{s=j\omega} \quad (24)$$

Din relațiile (23) și (24), rezultă

$$\frac{1}{P_n(s)P_n(-s)} \Big|_{s=j\omega} = \frac{1}{1 + (-1)^n s^{2n}} \Big|_{s=j\omega} \quad (25)$$

deci, rădăcinile polinoamelor $P_n(s)$ și $P_n(-s)$ sunt rădăcinile ecuației algebrice

$$1 + (-1)^n s^{2n} = 0 \quad (26)$$

sau

$$(-1)^n s^{2n} = -1 \quad (27)$$

Ecuația (27) se mai poate scrie sub forma

$$(e^{-j\pi})^n s^{2n} = e^{j(2k+1)\pi} \quad (28)$$

sau

$$s^{2n} = e^{j(2k+1+n)\pi} \quad (29)$$

de unde rezultă rădăcinile

$$s_k = e^{j \frac{2k+1+n}{2n} \pi} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1 \quad (30)$$

Se constată că toate rădăcinile au modulul unitar, iar argumentele sunt

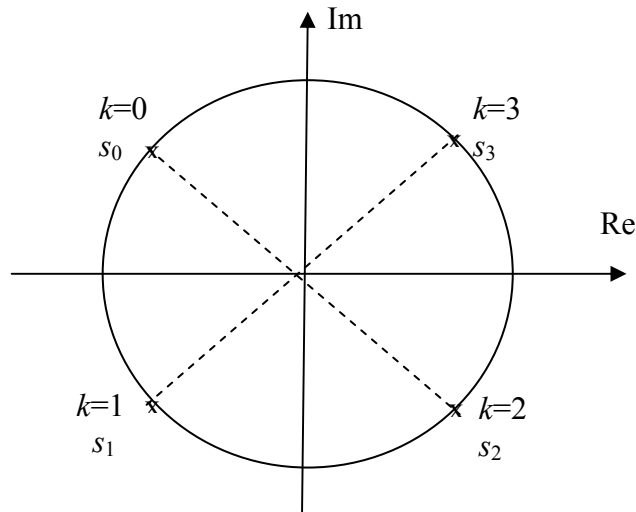


Fig. 4 Constelația polilor funcției $\frac{1}{P_n(s)P_n(-s)}$ pentru un filtru de ordinul 2

$$\varphi_k = \frac{2k+1+n}{2n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n-1 \quad (31)$$

Din cele $2n$ rădăcini **situate pe cercul unitar**, n sunt situate în semiplanul stâng și sunt zerourile polinomului $P_n(s)$, iar restul de n rădăcini, din semiplanul drept, sunt zerourile polinomului $P_n(-s)$. Firește, interesează rădăcinile din semiplanul stâng, care sunt polii funcției de transfer $H(s)$.

Fie cazul $n=2$. Constelația polilor funcției $\frac{1}{P_n(s)P_n(-s)}$, dedusă cu relația (31), este dată în Fig. 4. De aici se selectează polii funcției de transfer $H(s)$, care sunt s_0 și s_1 .

Cazul $n=3$ este ilustrat în Fig. 5. Și aici se selectează polii funcției de transfer $H(s)$, care sunt situați în semiplanul stâng: s_0 , s_1 și s_2 .

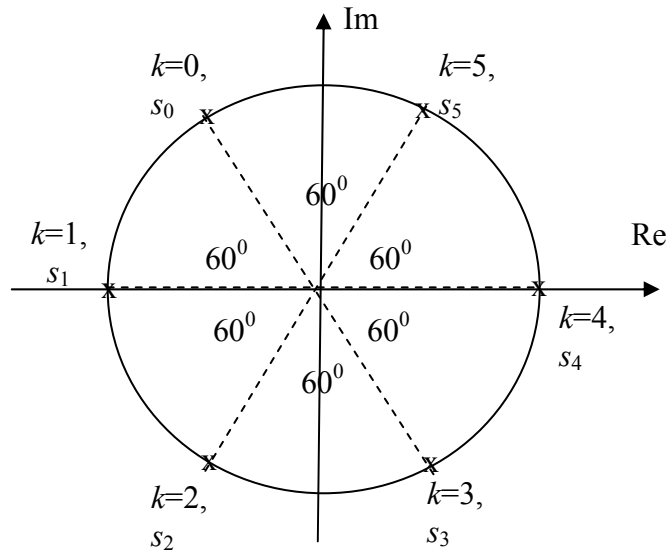


Fig. 5 Constelația polilor funcției $\frac{1}{P_n(s)P_n(-s)}$ pentru un filtru de ordinul 3

Cunoscând polii filtrului, s_0, s_1, \dots, s_{n-1} , și știind că amplificarea la frecvență nulă este unitară, $H(0) = 1$, se obține forma funcției de transfer a filtrului Butterworth:

$$H(s) = \frac{1}{P_n(s)} = \frac{(-s_0)(-s_1)\dots(-s_{n-1})}{(s-s_0)(s-s_1)\dots(s-s_{n-1})} \quad (32)$$

Întrucât polii sunt situați pe cercul unitar, rezultă întotdeauna că

$$(-s_0)(-s_1)\dots(-s_{n-1}) = 1 \quad (33)$$

Deci funcția de transfer a filtrului Butterworth este

$$H(s) = \frac{1}{(s-s_0)(s-s_1)\dots(s-s_{n-1})} = \frac{1}{1 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n} \quad (34)$$

3. Ajustarea parametrilor funcției de transfer, astfel încât să se obțină pulsația de tăiere ω_t impusă în aplicație.

Așa cum s-a arătat, funcția de transfer (20) s-a obținut în condițiile când pulsația ω este, de fapt, pulsația raportată ω/ω_t , astfel încât pulsația de tăiere a FTJ normat este egală cu 1.

Răspunsul la frecvență aferentă funcției de transfer (34) este:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + a_1 j\omega + a_2 (j\omega)^2 + \dots + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + (j\omega)^n} \quad (35)$$

În această expresie se înlocuiește ω prin ω/ω_t :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + a_1 j \frac{\omega}{\omega_t} + a_2 (j \frac{\omega}{\omega_t})^2 + \dots + a_{n-1} (j \frac{\omega}{\omega_t})^{n-1} + (j \frac{\omega}{\omega_t})^n} \quad (36)$$

sau

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{a_1}{\omega_t} (j\omega) + \frac{a_2}{\omega_t^2} (j\omega)^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{\omega_t^{n-1}} (j\omega)^{n-1} + \frac{1}{\omega_t^n} (j\omega)^n} \quad (37)$$

Înlocuind $j\omega$ prin s , se obține funcția de transfer a filtrului care realizează pulsația de tăiere ω_t :

$$H(s) = \frac{1}{1 + \mathfrak{A}_1 s + \mathfrak{A}_2 s^2 + \dots + \mathfrak{A}_{n-1} s^{n-1} + \mathfrak{A}_n s^n} \quad (38)$$

unde

$$\mathfrak{A}_i = \frac{a_i}{\omega_t^i}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \quad \mathfrak{A}_n = \frac{1}{\omega_t^n} \quad (39)$$

4. Discretizarea funcției de transfer

În cazul impementării numerice a filtrului, funcția de transfer (38) se discretizează cu funcția Matlab `c2d`, obținându-se:

$$H(z) = \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_n z^n}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_n z^n} \quad (40)$$

Dacă se împarte numărătorul și numitorul cu $\alpha_n z^n$, se obține

$$H(z) = \frac{\gamma_n + \gamma_{n-1} z^{-1} + \gamma_{n-2} z^{-2} + \dots + \gamma_0 z^{-n}}{1 + \delta_{n-1} z^{-1} + \delta_{n-2} z^{-2} + \dots + \delta_0 z^{-n}}; \quad \delta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_n}; i = 0, 1, \dots, n-1; \gamma_i = \frac{\beta_i}{\alpha_n}; i = 0, 1, \dots, n \quad (41)$$

și rezultă ecuația în diferențe intrare-ieșire:

$$y[i] = -\delta_{n-1} y[i-1] - \delta_{n-2} y[i-2] - \dots - \delta_0 y[i-n] + \gamma_n u[i] + \gamma_{n-1} u[i-1] + \gamma_{n-2} u[i-2] + \dots + \gamma_0 u[i-n] \quad (42)$$

unde $y[i]$ este ieșirea filtrului iar $u[i]$ este intrarea filtrului.

Aplicație Să se realizeze programul Matlab prin care se sintetizează un filtru Butterworth de un ordin oarecare, n . Să se obțină filtrul de ordinul $n = 4$, cu pulsația de tăiere $\omega_t = 100 \text{ s}^{-1}$, precum și varianta discretizată, cu perioada de eșantionare $T_e = 0.001 \text{ s}$.

Programul Matlab este:

```
clear all; close all;
% ordinul filtrului
n=4;
% pulsația reală din aplicație și parametrul eps
wt=100; eps=0.2;
% calculul constelației polilor
fi2=log(sqrt(1/eps^2+1)+1/eps)/n;
for k=1:n,
```

```

    re(k)=-sinh(fi2)*sin((2*(k-1)+1)/(2*n)*pi);
    imag(k)=cosh(fi2)*cos((2*(k-1)+1)/(2*n)*pi);
    s(k)=re(k)+i*imag(k);
end;
% eliminarea partii reziduale imaginare (rezultate din erorile
% de rotunjire) a polilor reali
s=1e6*s;s=round(s);s=s/1e6;
% definirea functiei de transfer a filtrului cu pulsatie de
% taiere unitara si trasarea caracteristicii Bode
k=abs(real(prod(s(1:n)))));
sys=zpk([],s,k);
sys=tf(sys)
[m,p,w]=bode(sys);
mdb=20*log10(m(1,:));
figure(1)
semilogx(w,mdb);hold on;axis([0.01 1000 -80 10]);
% ajustarea parametrilor functiei de transfer, pentru obtinerea
% pulsatiei de taiere din aplicatie
[num,den]=tfdata(sys,'v');
for i=1:n,
    a1=1/wt^(n-i+1);
    den1(i)=den(i)*a1;
end;
den1(n+1)=den(n+1);
sys1=tf(num,den1)
% trasarea caracteristicii Bode
w=0.1:0.1:10000;
[m,p]=bode(sys1,w);
mdb=20*log10(m(1,:));
semilogx(w,mdb);grid;hold off;
% deducerea functiilor indiciale
figure(2);
t=[0:0.001:30];
step(sys1,t);
axis([0 0.3 0 1.3]);grid;
figure(3);
% discretizarea functiei de transfer si trasarea caracteristicii
% Bode
sys1d=c2d(sys1,0.001,'tustin');
figure(3);
[m1d,p1d,w1d]=bode(sys1d);
m1ddb=20*log10(m1d(1,:));
semilogx(w1d,m1ddb);grid;axis([1 1000 -80 10]);

```

Principalele rezultate obținute de program sunt:

- caracteristicile Bode pentru FTJ normat (1) și pentru FTJ cu frecvența de tăiere $\omega_t = 100$ rad/s (2) (fig. 6). Se observă că în zona de blocare, panta caracteristicii de amplificare este de $-80 [dB/dec]$;

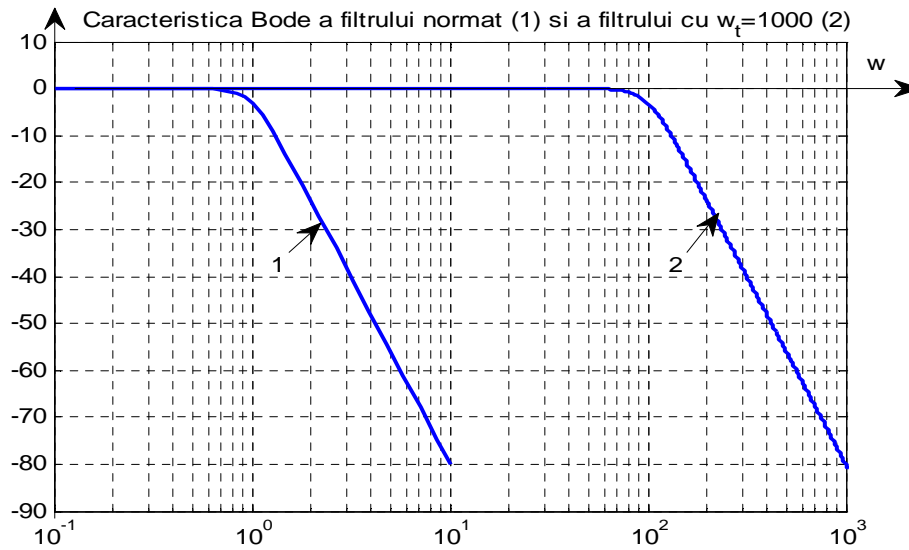


Fig. 6. Caracteristicile Bode pentru FTJ Butterworth normalizat (1) și pentru FTJ cu frecvența de tăiere $\omega_t = 100 \text{ rad/s}$ (2)

- funcția de transfer a filtrului normalizat:

$$H(s) = \frac{1}{s^4 + 2.613 s^3 + 3.414 s^2 + 2.613 s + 1}$$

- funcția de transfer a FTJ cu pulsația de tăiere din aplicație:

$$H(s) = \frac{1}{10^{-8} s^4 + 2.613 \cdot 10^{-6} s^3 + 0.0003414 s^2 + 0.02613 s + 1}$$

- funcția de transfer a filtrului discretizat, cu $T_e = 10^{-2} \text{ s}$:

$$H(z) = \frac{5.485 \cdot 10^{-6} z^4 + 2.194 \cdot 10^{-5} z^3 + 3.291 \cdot 10^{-5} z^2 + 2.194 \cdot 10^{-5} z + 5.485 \cdot 10^{-6}}{z^4 - 3.739 z^3 + 5.25 z^2 - 3.281 z + 0.7701}$$

Filtre Cebâșev

Aproximarea caracteristicii ideale la filtrele Cebâșev se realizează astfel, încât eroarea de aproximare este limitată la o valoare maximă, fie în zona de trecere – la filtrele de tip Cebâșev 1, fie în zona de blocare – la filtrele de tip Cebâșev 2.

La filtrul de tip Cebâșev 1, amplificarea are un riplu (o oscilație) în zona de trecere, astfel încât amplitudinea acestei oscilații este constantă și egală cu eroarea maximă de aproximare în zona respectivă. În zona de blocare, caracteristica de amplificare este monotonă.

La filtrul de tip Cebâșev 2, amplificarea are un riplu de amplitudine maximă constantă în zona de blocare, iar în zona de trecere variația amplificării este monotonă.

In cazul unui filtru Cebâșev 1, pătratul amplificării are expresia

$$|H(j\omega)|^2 = A^2(j\omega) = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2(\omega)} \quad (43)$$

unde ε este un parametru subunitar, iar $C_n(\omega)$ este polinomul Cebâșev de ordinul n . Polinoamele Cebâșev se pot genera prin relația recursivă

$$C_{n+1}(\omega) = 2.\omega.C_n(\omega) - C_{n-1}(\omega) \quad (44)$$

cu inițializarea: $C_0 = 1$; $C_1 = \omega$

Polinoamele Cebâșev pot fi definite și prin relațiile:

$$C_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n.\arccos \omega) & \text{pentru } 0 \leq \omega \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n.\operatorname{argch} \omega) & \text{pentru } \omega > 1 \end{cases} \quad (45)$$

Notând

$$\Phi = \arccos \omega \quad \text{pentru } 0 \leq \omega \leq 1 \quad \text{și} \quad \Phi = \operatorname{argch} \omega \quad \text{pentru } \omega > 1 \quad (46)$$

relația (45) se poate scrie

$$C_n(\omega) = \begin{cases} \cos(n.\Phi) & \text{pentru } 0 \leq \omega \leq 1 \\ \operatorname{ch}(n.\Phi) & \text{pentru } \omega > 1 \end{cases} \quad (47)$$

În Fig. 7 este dată variația pătratului amplificării filtrului, la $\varepsilon = 0.3$, pentru ordinele $n = 2, 3, 4$ și 5, iar în fig. 8 este dată aceeași caracteristică, pentru $\varepsilon = 0.1$. Se observă că prin reducerea lui ε este afectată panta caracteristicii în banda de blocare. Pentru cazul când $\varepsilon = 0.1$, în fig. 9

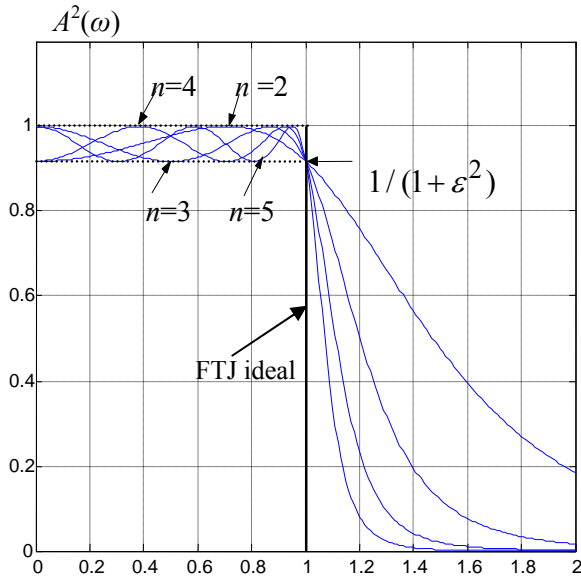


Fig.7 Caracteristica pătratului amplificării la $\varepsilon = 0.3$

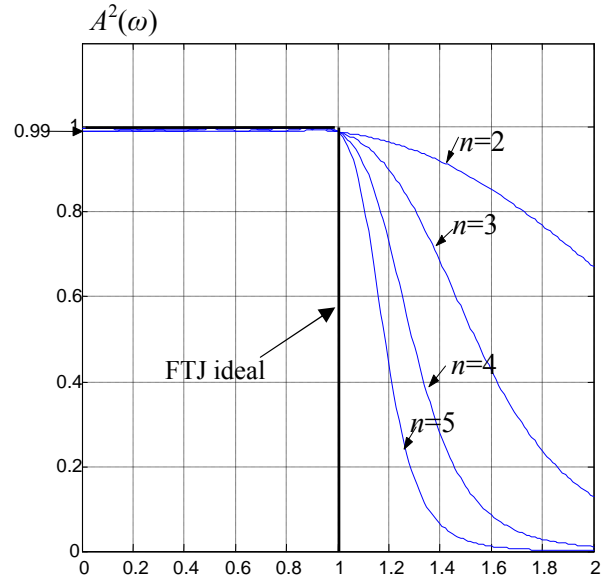


Fig.8 Caracteristica pătratului amplificării la $\varepsilon = 0.1$

prezintă un zoom în zona de trecere a caracteristicii. Se constată că, în banda de trecere, amplificarea are un riplu, a cărei amplitudine este determinată de parametrul ε .

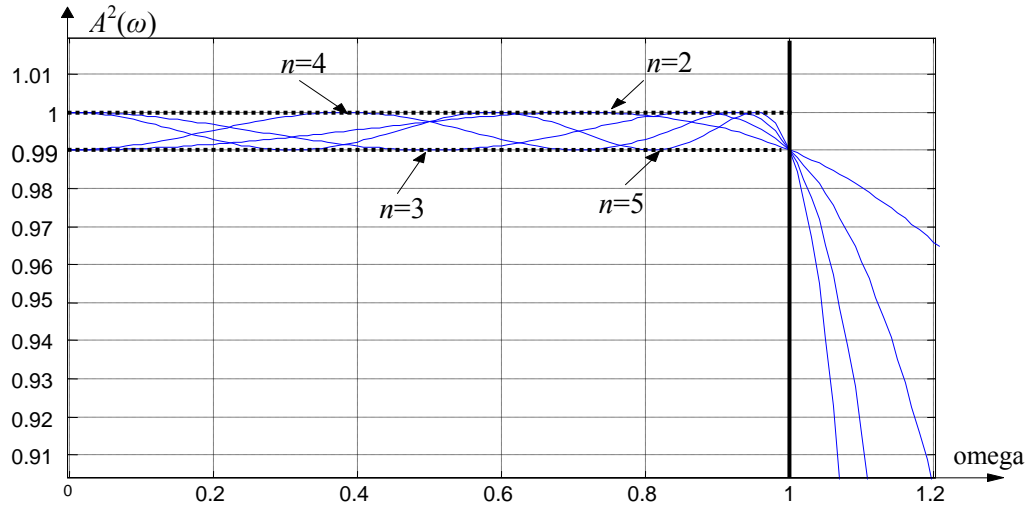


Fig.9 Caracteristica pătratului amplificării la $\varepsilon = 0.1$ (zoom)

In cazul unui filtru Cebășev 2, pătratul amplificării are expresia

$$|H(j\omega)|^2 = A^2(j\omega) = \frac{\varepsilon^2 \cdot C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)}{1 + \varepsilon^2 \cdot C_n^2\left(\frac{1}{\omega}\right)} \quad (48)$$

In Fig. 10 este dată variația pătratului amplificării filtrului, la $\varepsilon = 0.25$, pentru ordinele $n = 2, 3, 4, 5$ și 6, iar în fig. 11 se prezintă un zoom în zona de blocare a caracteristicii

Toate caracteristicile prezentate pentru filtrele Cebășev 1 și Cebășev 2 se obțin cu programul Matlab dat în continuare.

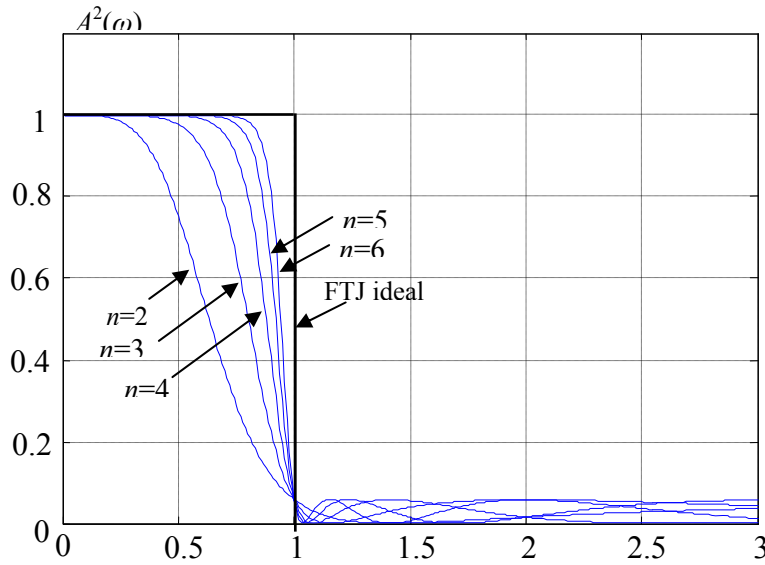


Fig.10 Caracteristica pătratului amplificării pentru filtrul Cebășev 2 la $\varepsilon = 0.3$

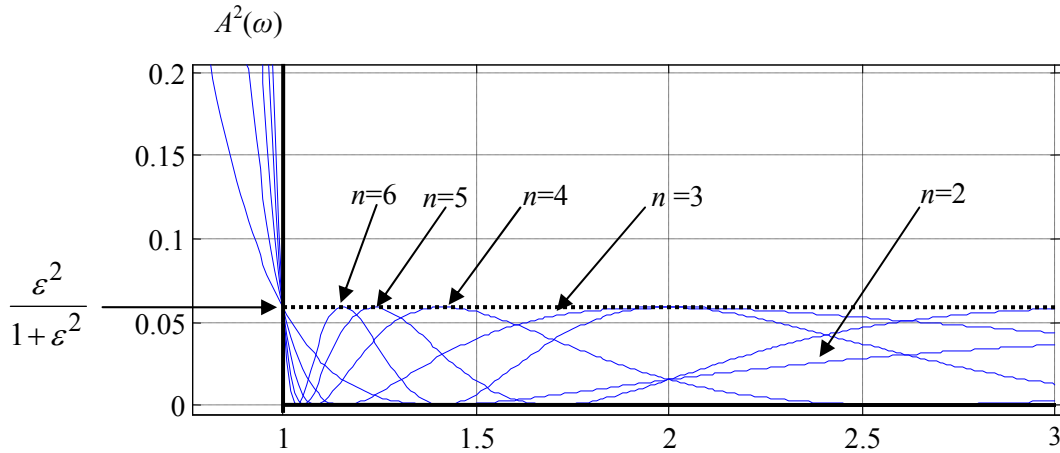


Fig.11 Zoom la caracteristica din fig. 10

```
clear all;close all;
om=0:0.01:3;M=length(om);eps=0.25;
C(1,:)=ones(1,M);C1(1,:)=ones(1,M);
for i=1:M
    C(2,i)=om(i);
    C1(2,i)=1/om(i);
end
for k=2:6
    for i=1:M
        C(k+1,i)=2*om(i)*C(k,i)-C(k-1,i);
        C1(k+1,i)=2*(1/om(i))*C1(k,i)-C1(k-1,i);
        Ap(i)=1/(1+eps^2*C(k+1,i)^2);
        Ap1(i)=eps^2*C1(k+1,i)^2/(1+eps^2*C1(k+1,i)^2);
    end
    figure(1);plot(om,Ap);hold on;grid;axis([0 2 0 1.2])
    figure(2);plot(om,Ap1);hold on;grid;axis([0 3 0 1.2])
end
```

În cele ce urmează se va analiza numai filtrul Cebâșev 1 (filtrul Cebâșev 2 se tratează în mod similar).

Având în vedere expresia (43) a pătratului amplificării, eroarea de aproximare în banda de trecere este

$$1 - |H(j\omega)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(\omega)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)} \quad (49)$$

iar eroarea maximă este

$$\frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \cong \varepsilon^2 \quad (50)$$

Amplificarea în banda de blocare este

$$A_{dB} = 20 \log |H(j\omega)| = -10 \log (1 + \varepsilon^2 C_n^2(\omega)) \quad (51)$$

și, deoarece, pentru $\omega \gg 1$, se poate considera $\varepsilon^2 C_n^2(\omega) \gg 1$,

$$A_{dB} \approx -20 \log \varepsilon - 20 \log C_n(\omega)$$

Prin urmare, pentru $\omega \gg 1$, rezulta $C_n(\omega) \approx 2^{n-1} \omega^n$ și deci

$$A_{dB} \approx -20 \log \varepsilon - 6(n-1) - 20.n.\log \omega \quad (52)$$

Panta caracteristicii de amplificare este de $-20 [dB / dec]$, la fel ca la filtrul Butterworth, însă termenul $-20 \log \varepsilon - 6(n-1)$ face ca în zona de tăiere caracteristica filtrului Cebâșev să fie mai avantajoasă (așa cum se va arăta în cele ce urmează).