

Curs 4

Recapitulare

6. Filtrul de ordinul doi

Ecuția intrare-ieșire :

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K \cdot u(t)$$

Funcția de transfer este

$$H(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\xi T s + 1} = K \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2}$$

la care corespunde **distribuția polilor din figură.**

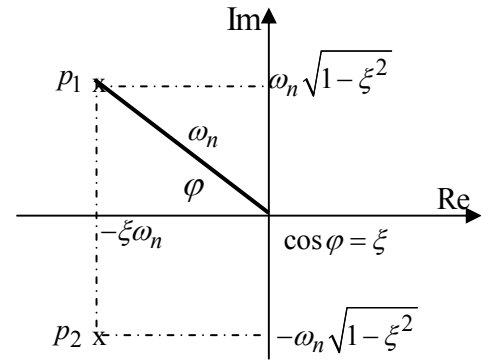


Fig. 21 Polii filtrului de ordinul 2

,Răspunsul la semnal trapă

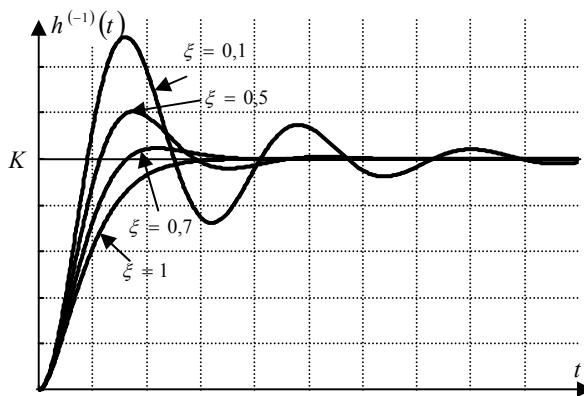


Fig. 22 Răspunsuri indiciale ale sistemului de ordinul doi, pentru diferite valori ale lui coeficientului de amortizare

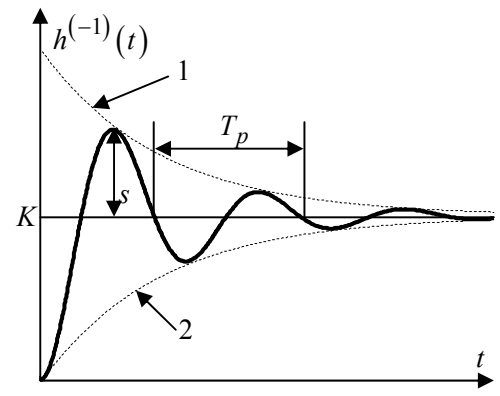


Fig. 23 Regimul pseudo-periodic

$$s[\%] = 100 \exp\left(-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$$

$$t_t = -\frac{1}{\xi \omega_n} \ln\left(0,05 \sqrt{1-\xi^2}\right)$$

Caracteristica de frecvență

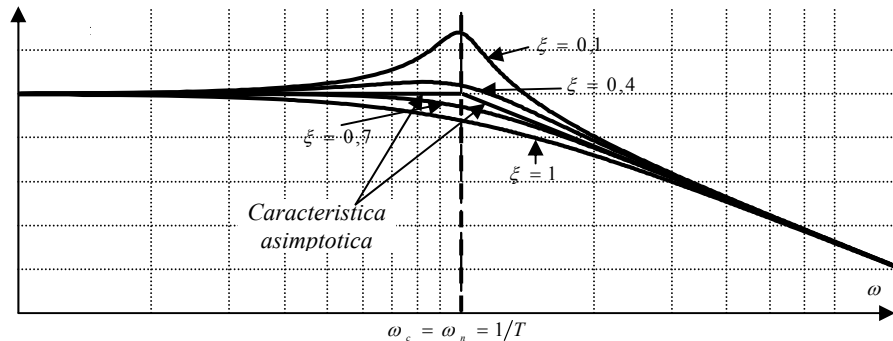


Fig. 25 Caracteristica Bode $A_{dB}(\omega)$ a filtrului de ordinul 2

6.1 Filtrul de ordinul 2 cu timp discret

Ecuația intrare-ieșire a sistemului de ordinul doi este

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (66)$$

la care corespunde funcția de transfer

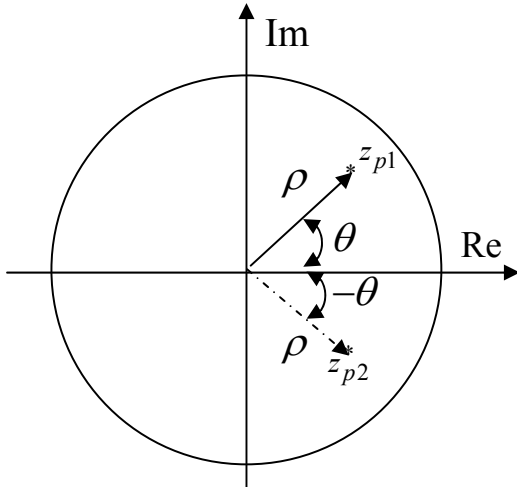


Fig. 26 Polii filtrului de ordinul 2

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (67)$$

Ca și în cazul sistemului cu timp continuu, polii se consideră a fi complecși conjugăți. Fie $z_{p1,2}$ polii sistemului, reprezentați în fig.26:

$$z_{p1,2} = \rho \cdot e^{\pm j\theta} \quad (68)$$

Se va considera cazul simplu, când sistemul nu are zerouri, și deci $b_1 = 0$. Funcția de transfer se poate pune sub forma :

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{b_2 z^{-2}}{(1 - z_{p1} z^{-1})(1 - z_{p2} z^{-1})} = \\ &= \frac{b_2 z^{-2}}{(1 - \rho \cdot e^{j\theta} z^{-1})(1 - \rho \cdot e^{-j\theta} z^{-1})} \end{aligned} \quad (69)$$

Răspunsul la frecvență este:

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{b_2 \cdot e^{-j2\omega T_e}}{[1 - \rho \cdot \cos(\omega T_e - \theta) + j\rho \cdot \sin(\omega T_e - \theta)][1 - \rho \cdot \cos(\omega T_e + \theta) + j\rho \cdot \sin(\omega T_e + \theta)]} \quad (70)$$

și rezultă caracteristicile de amplificare și de fază :

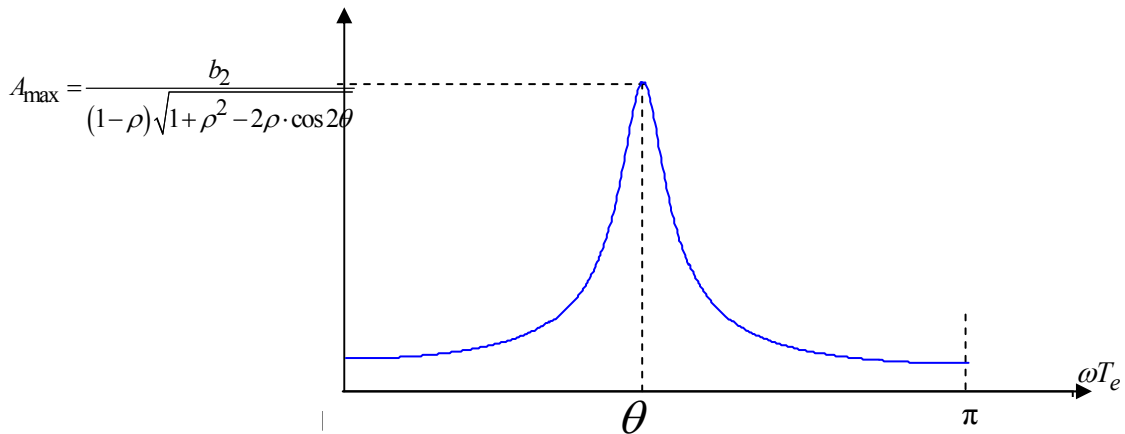


Fig. 27 Caracteristica de frecvență a unui sistem de ordinul 2 cu timp discret

$$A(\omega) = \frac{b_2}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\omega T_e - \theta)} \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\omega T_e + \theta)}} \quad (71)$$

$$\varphi(\omega) = -\omega T_e - \arctg \frac{\rho \cdot \sin(\omega T_e - \theta)}{1 - \rho \cdot \cos(\omega T_e - \theta)} - \arctg \frac{\rho \cdot \sin(\omega T_e + \theta)}{1 - \rho \cdot \cos(\omega T_e + \theta)} \quad (72)$$

Amplificarea $A(\omega)$ are valoarea maximă la $\omega T_e = \theta$, adică la $\omega = \theta / T_e$:

$$A_{\max} = A\left(\frac{\theta}{T_e}\right) = \frac{b_2}{(1 - \rho) \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos 2\theta}} \quad (73)$$

Caracteristica de amplificare este reprezentată în fig.27. Se constată că pe măsură ce ρ se apropie de valoarea unitară, adică polii se apropie de cercul unitar, caracteristica de frecvență devine mai selectivă în jurul frecvenței θ/T_e (aici θ este argumentul lui z_{p1} - (fig.26).

Fie

$$p_{1,2} = -\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

polii unui sistem de ordinul doi cu timp continuu.

Correspondența cu polii $z_{p1,2}$ ai sistemului de ordinul doi cu timp discret (fig.28) este dată de relația:

$$z_{p1,2} = e^{p_{1,2} T_e} = e^{\left(-\xi \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}\right) T_e} = \rho \cdot e^{\pm j \theta} \quad (74)$$

unde

$$\rho = \exp(-\xi \omega_n T_e), \quad \theta = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \cdot T_e \quad (75)$$

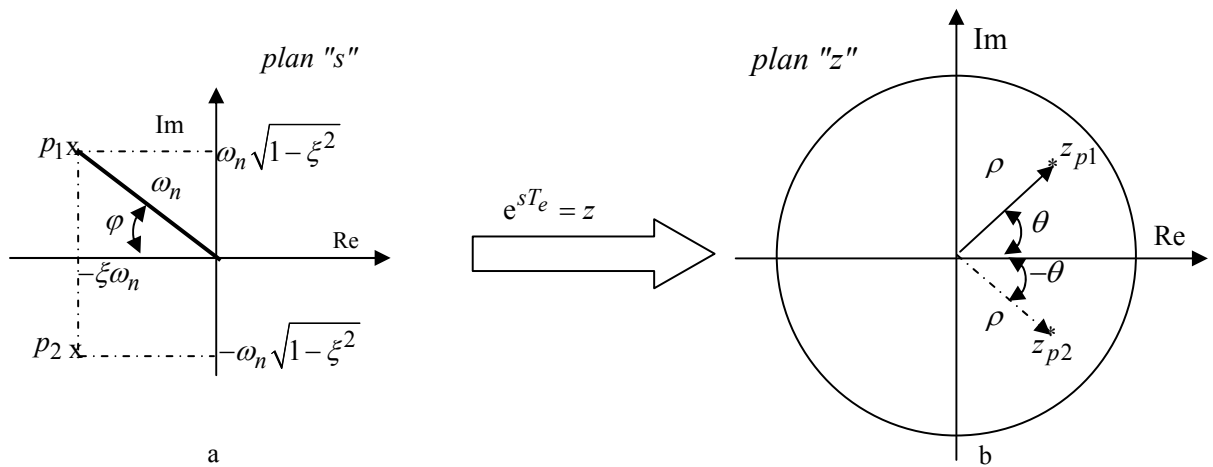


Fig. 28 Correspondența polilor în planurile “s” și “z”

Se pune problema determinării traiectoriei C_z a polului z_{p1} în planul 'z', atunci când polul p_1 se deplasează în planul 's' sub o traiectorie C_p dată.

Dacă $\xi = \xi^* = \text{const}$, deplasarea polului p_1 în planul 's' are loc pe deapta C_s^ξ (fig.29), determinată de unghiul $\varphi^* = \arccos \xi^* = \text{const}$. În acest caz, polul z_{p1} este situat pe curba C_z^ξ ale cărei puncte au modulul $\rho^* = \exp(-\xi^* \omega T_e)$ și argumentul $\theta^*(\omega) = \omega_n \sqrt{1 - \xi^{*2}}$. Pentru polii $p_1^{(1)}$, $p_1^{(2)}$, $p_1^{(3)}$ din planul "s", aferenți pulsațiilor naturale $\omega_n^{(1)}$, $\omega_n^{(2)} > \omega_n^{(1)}$ și $\omega_n^{(3)} > \omega_n^{(2)}$, și la care crespund polii $z_{p1}^{(1)}$, $z_{p1}^{(2)}$ și $z_{p1}^{(3)}$ din planul "z", răspunsurile la semnal treaptă (răspunsurile indiciale) sunt reprezentate în fig.29. Întrucât $\xi = \xi^* = \text{const.}$, depășirea (suprareglarea) s rămâne constantă, fiind determinată univoc de ξ (v. rel. (58)), iar forma răspunsului se pastrează, cu deosebirea că **timpul de răspuns se reduce atunci când pulsația naturală ω_n crește.**

În continuare, se va considera $\omega_n = \omega_n^* = \text{const.}$, deci polul p_1 se va deplasa pe cercul $C_s^{\omega_n}$ de rază ω_n (fig. 30). Polilor $p_1^{(i)}$, $i=1,2,3$, situați pe acest cerc, le corespund în planul 'z' polii $z_{p1}^{(i)}$, $i=1,2,3$, aflați pe curba $C_z^{\omega_n}$. Răspunsurile indiciale aferente polilor $p_1^{(1)}$, $p_1^{(2)}$, $p_1^{(3)}$ sunt date în fig.30.

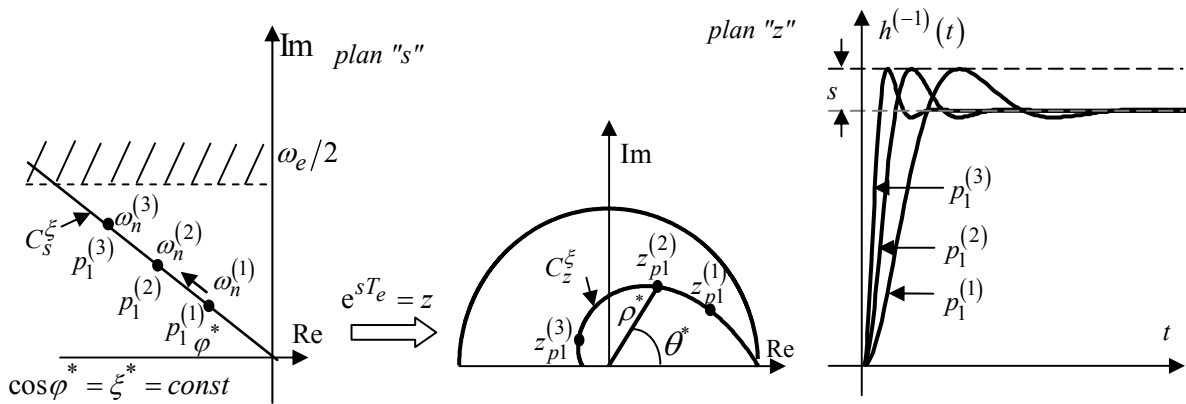
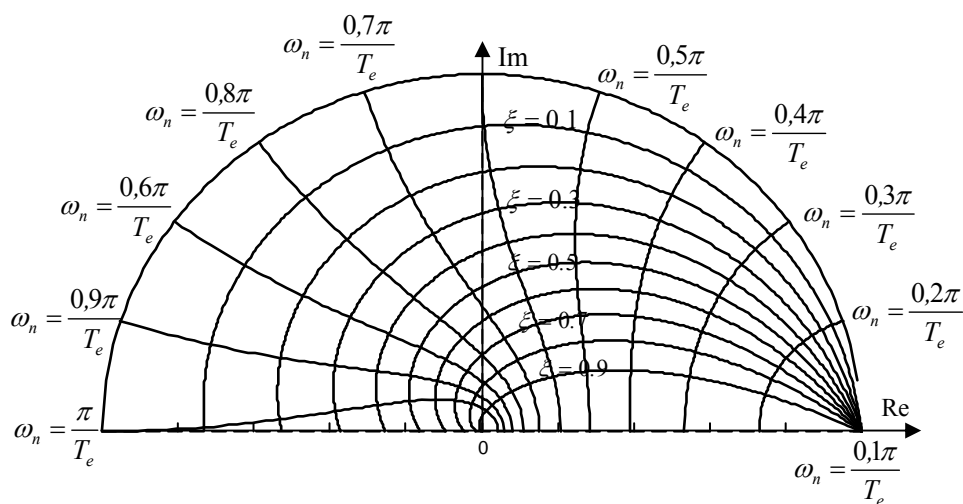
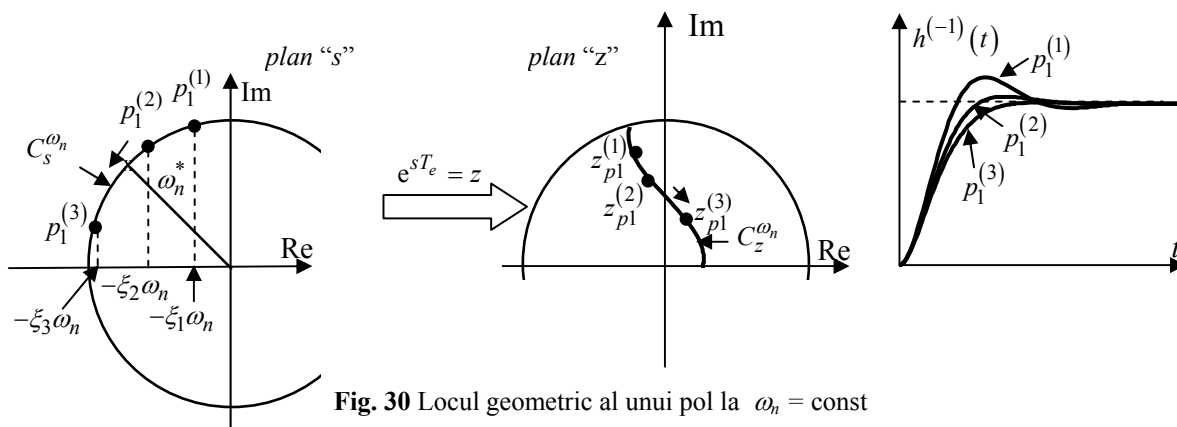


Fig. 29 Locul geometric al unui pol la $\xi = \text{const}$.

Valorile modulului și argumentului unui pol din planul 'z' se calculează cu relațiile:

$$\rho^*(\xi) = \exp(-\xi \omega_n^* T_e); \quad \theta^*(\xi) = \omega_n^* \sqrt{1 - \xi^2} \cdot T_e \quad (76)$$

Curbele C_z^ξ și $C_z^{\omega_n}$, care reprezintă locurile geometrice ale polului z_{p1} , parametrizate în raport cu ξ și, respectiv cu ω_n , sunt date în fig.31.



Aplicație : Filtrul rejector de ordinul 2

Fie filtrul de ordinul 2 la limită cauzal

$$H(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (77)$$

care are două zerouri pe cercul unitar, definite prin argumentul θ ,

$$z_{z1,2} = 1 \cdot e^{\pm j\theta} \quad (78)$$

și doi poli definiți prin același argument, θ , și de modulul ρ subunitar, dar apropiat de valoarea unitară :

$$z_{p1,2} = \rho \cdot e^{\pm j\theta} \quad (79)$$

Diagrama poli - zerouri a filtrului este dată în fig. 32

Funcția de transfer (77) se poate pune sub forma :

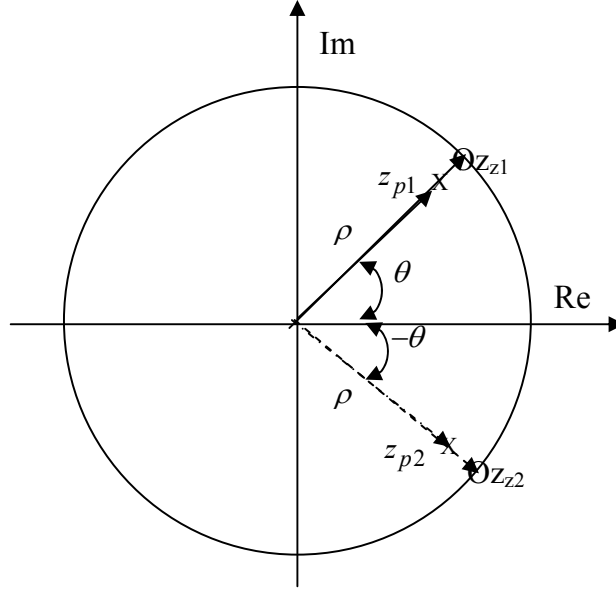


Fig. 32 Distribuția poli-zerouri a filtrului rejector

$$H(z) = \frac{(1 - z_{z1}z^{-1})(1 - z_{z2}z^{-1})}{(1 - z_{p1}z^{-1})(1 - z_{p2}z^{-1})} = \frac{(1 - 1 \cdot e^{j\theta}z^{-1})(1 - 1 \cdot e^{-j\theta}z^{-1})}{(1 - \rho \cdot e^{j\theta}z^{-1})(1 - \rho \cdot e^{-j\theta}z^{-1})} \quad (80)$$

Răspunsul la frecvență este:

$$H(e^{j\omega T_e}) = \frac{[1 - \cos(\omega T_e - \theta) + j \sin(\omega T_e - \theta)][1 - \cos(\omega T_e + \theta) + j \sin(\omega T_e + \theta)]}{[1 - \rho \cdot \cos(\omega T_e - \theta) + j \rho \cdot \sin(\omega T_e - \theta)][1 - \rho \cdot \cos(\omega T_e + \theta) + j \rho \cdot \sin(\omega T_e + \theta)]} \quad (81)$$

și rezultă caracteristica de amplificare

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{2 - 2 \cos(\omega T_e - \theta)} \sqrt{2 - 2 \cos(\omega T_e + \theta)}}{\sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\omega T_e - \theta)} \sqrt{1 + \rho^2 - 2\rho \cdot \cos(\omega T_e + \theta)}} \quad (82)$$

Se observă că pentru $\omega T_e = \theta$ și pentru $\omega T_e = -\theta$, rezultă $A(\omega) = 0$.

Frecvența la care amplificarea este nulă este $\omega_0 = \theta / T_e$. Selectivitatea caracteristicii de frecvență poate fi ajustată cu parametrul ρ .

Exemplu Fie două filtre rejectoare, ambele cu $\theta = \pi/6$, însă care au $\rho = 0.8$, respectiv $\rho = 0.95$. Programul Matlab care generează aceste filtre și care le trasează caracteristicile Bode este dat în continuare. În fig. 33 sunt reprezentate aceste caracteristici: 1 – pentru $\rho = 0.8$ și 2 – pentru $\rho = 0.95$.

```
clear all; close all;
tet=pi/6;
z1=exp(i*tet); z2=exp(-i*tet);
z=[z1 z2];
ro=0.8;
p1=ro*exp(i*tet); p2=ro*exp(-i*tet);
p=[p1 p2];
```

```

sys=zpk(z,p,1,-1)
bode(sys,'k');hold on;
ro=0.95;
p1=ro*exp(i*tet);p2=ro*exp(-i*tet);
p=[p1 p2];
sys=zpk(z,p,1,-1)
bode(sys);grid

```

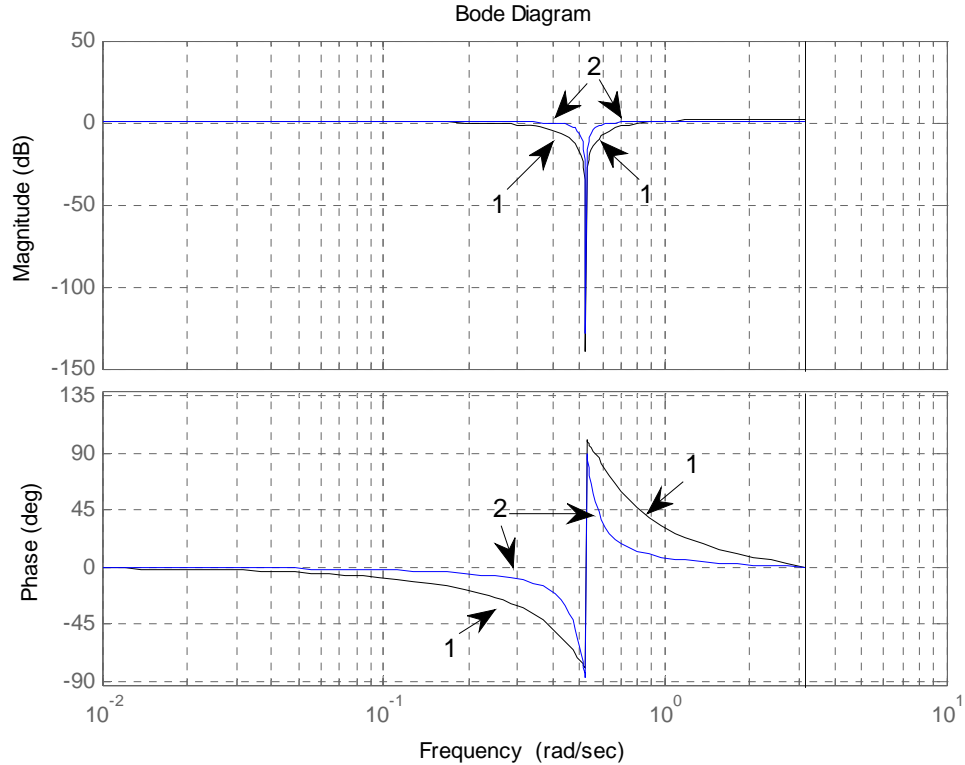


Fig. 33 Caracteristici Bode ale filtrului rejector

7. Derivatorul la limită cauzal și derivatorul cauzal

Realizarea efectivă a unui derivator cu timp continuu implică utilizarea unei funcții de transfer corespunzătoare unui sistem *cel puțin la limită cauzal*, ca de exemplu:

$$H(s) = \frac{T_d s}{Ts + 1} \quad (83)$$

în care constanta de timp T se adoptă sensibil mai mică decât constanta de timp de derivare ($T \ll T_d$).

Funcția de transfer a derivatorului la limită cauzal (83) se poate pune sub forma

$$H(s) = \frac{T_d}{T} \left(1 - \frac{1}{Ts + 1} \right) \quad (84)$$

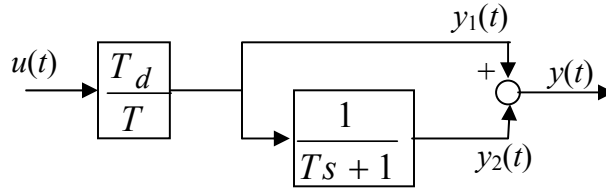


Fig. 34 Schema echivalentă a unui derivator la limită causal

astfel încât derivatorul se poate prezenta prin schema bloc din fig. 34. Dacă la intrarea $u(t)$ se aplică o treaptă unitară, atunci $y_1(t)$ va avea forma unei trepte de amplitudine T_d/T , iar $y_2(t)$ este răspunsul unui filtru de ordinul 1 cu coeficientul de amplificarea T_d/T și constanta de timp T , de valoare redusă (comparativ cu T_d). În fig. 35 se prezintă răspunsul $y(t)$, având în vedere faptul că $y(t) = y_1(t) - y_2(t)$. Se observă că atunci când $T \rightarrow 0$, adică derivatorul la limită causal tinde spre derivatorul ideal, semnalul $y(t)$ tinde spre impulsul Dirac $\delta(t)$ (amplitudinea tinde spre infinit, iar durata tinde spre zero).

Răspunsul la frecvență este

$$H(j\omega) = \frac{T_d j\omega}{Tj\omega + 1} \quad (85)$$

iar amplificarea în dB este

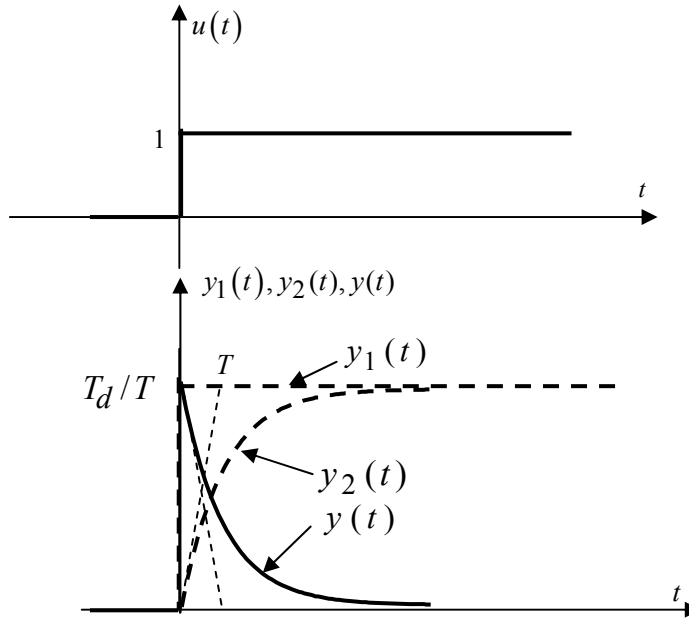


Fig. 35 Răspunsul indicial al derivatorului la limită causal

$$A_{dB} = 20 \log |T_d j\omega| + 20 \log \left| \frac{1}{Tj\omega + 1} \right| \quad (86)$$

adică suma amplificărilor în dB aferente unui derivator ideal și unui filtru de ordinul 1 cu coeficient static $K=1$ și constanta de timp T . În fig. 36 cele 2 caracteristici sunt reprezentate cu linie întrerupă. Suma lor reprezintă caracteristica asimptotică a

derivatorului la limită cauzal. Este dată și caracteristica corectată în jurul pulsației de frângere, precum și caracteristica de fază

$$\varphi(\omega) = \arg \frac{T_d j\omega}{Tj\omega + 1} = \arg(T_d j\omega) - \arg(Tj\omega + 1) = \pi / 2 - \arctg(T\omega) \quad (87)$$

Se constată că proprietățile de derivare se manifestă numai în banda de frecvență $[0, 1/T]$, unde panta caracteristicii Bode este de $+20\text{dB/dec}$. La frecvențe $\omega > 1/T$, sistemul se comportă ca un element cu acțiune proporțională. De regulă, semnalele sunt contaminate de zgomot, iar componentele spectrale ale zgomotului se află în zona de înaltă frecvență. Din acest motiv, este util ca pentru $\omega > 1/T$, sistemul să se comporte ca un filtru trece jos, adică să aibă o amplificare scăzătoare cu frecvența.

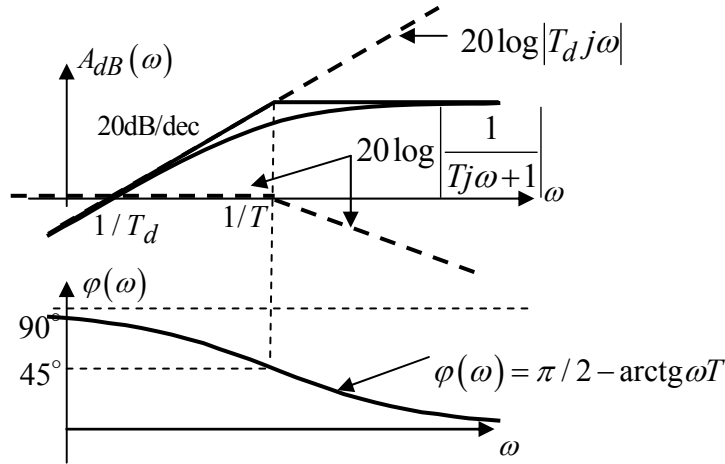


Fig. 36 Caracteristicile Bode ale derivatorului la limită cauzal

Pentru aceasta, caracteristica asimptotică $A_{dB}(\omega)$ se alege de forma celei din Fig. 37, în care pulsația de frângere $1/T_1$ poate să coincidă cu $1/T$. Funcția de transfer a unui

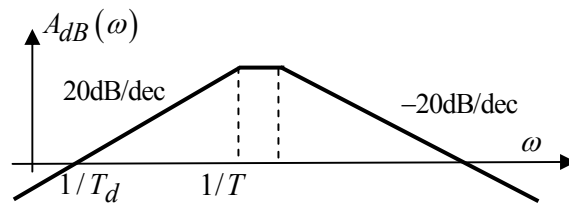


Fig. 37 Caracteristica Bode asimptotică a derivatorului strict cauzal

asemenea sistem este:

$$H(s) = \frac{T_d s}{(Ts + 1)(T_1 s + 1)} \quad (88)$$

unde constanta de timp T_1 introduce pulsația de frângere $1/T_1$ în caracteristica de frecvență. Sistemul cu funcția de transfer (88) este un **derivator strict cauzal**.