CURS 9

Analiza sistemelor

1 Introducere

In cadrul unei probleme de analiză a sistemelor, **se dau** : sistemul (modelul matematic) şi forma semnalului de intrare şi **se cere** deducerea ***prin calcul*** a evoluției mărimii de ieşire.

Din punctul de vedere al practicii inginereşti, analiza sistemelor este realizată – în mod curent – prin instrumente software de ***simulare numerică***, aşa cum este mediul de simulare SIMULINK din Matlab®. Aceste mijloace permit analiza numerică a sistemelor, indiferent dacă acestea sunt liniare sau neliniare.

In acest capitol se prezintă numai metodele de bază din ***analiza sistemelor liniare***, deoarece rezultatele obținute în această direcție prezintă o importanță fundamentală în problematica teoriei sistemelor.

In analiza unui sistem pot exista două abordări :

1. se determină prin calcul mărimea de ieşire, adică răspunsul sistemului, atunci când de dau modelul matematic şi forma semnalului de intrare;
2. se determină numai unele proprietăți sintetice ale sistemului, ca de exemplu: .

- proprietățile calitative (stabilitatea, controlabilitatea, etc),
- performanțele în regim staționar,
- performanțele în regim dinamic,

fără a calcula în întregime răspunsul sistemului la un semnal de test, aplicat la intrare.

In cele ce urmează se vor prezenta ambele abordări.

2. Analiza sistemelor prin calculului răspunsului acestora

2.1 Analiza sistemelor cu timp continuu

Se va trata mai întâi problema analizei sistemelor descrise prin modele de tip intrare-ieşire, apoi se va considera şi cazul descrierii sistemelor prin modele de stare.

2.1.1 Cazul modelului de tip intrare-ieşire

- ***Se consideră date:***

a - *Modelul sistemului*, sub forma ecuației diferențiale de ordinul n

$$\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+.......+a_o y=b_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}}+.........+b_0 u \tag{1}$$

b - *condițiile inițiale*

$$y(0);\quad \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{t=0};\ldots;\quad \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right)\Big|_{t=0} \tag{2}$$

c - *semnalul de intrare*

$$u(t);\quad t\geq 0 \tag{3}$$

- ***Se cere*** răspunsul sistemului, $y(t)$.

Răspunsul $y(t)$ este soluția ecuației diferențiale (1), cu condițiile inițiale (2) şi funcția $u(t)$ dată. Sistemul este liniar, deci se poate aplica principiul suprapunerii efectelor. Deoarece $y(t)$ este efectul produs de două cauze distincte: condițiile inițiale (2) şi semnalul de intrare $u(t)$, vom considera că răspunsul este format din două componente, care sunt efecte ale celor două cauze menționate, adică:

$y_l(t)$ - componenta liberă sau ***răspunsul liber***, care este produs de condițiile inițiale nenule (2), atunci când $u(t)=0$;

$y_f(t)$ - ***răspunsul forțat***, care este produs de semnalul de intrare $u(t)\neq 0$, atunci când condițiile inițiale sunt nule.

Deci :

$$y(t)=y_l(t)+y_f(t) \tag{4}$$

Răspunsul liber este soluția ecuației diferențiale fără membrul drept (ecuația omogenă):

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\ldots a_0 y=0 \tag{5}$$

Această soluție se obține determinând rădăcinile ***ecuației caracteristice***:

$$s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\ldots+a_0=0 \tag{6}$$

Fie $s_i, \overline{1,n_1}$ rădăcinile reale şi $\alpha_i \pm j\omega_i, i=\overline{1,n_2}$, $n_1+2n_2=n$,rădăcinile complexe ale acestei ecuații, considarate ca fiind distincte. Răspunsul liber, adică soluția ecuației diferențiale (5) este

$$y_l(t)=\sum_{i=1}^{n_1} C_{li}\mathrm{e}^{s_i t}+\sum_{i=1}^{n_2} A_{li}\mathrm{e}^{\alpha_i t}\sin\left(\omega_i t+\phi_{li}\right) \tag{7}$$

unde $C_{li}, i=\overline{1,n_1}; A_{li}, \phi_{li}, i=\overline{1,n_2}; n_1+2n_2=n$ sunt constante de integrare, care pot fi calculate pornind de la condițiile inițiale cunoscute (2).

Funcțiile $\mathrm{e}^{s_i t}$ şi $\mathrm{e}^{\alpha_i t}\sin\left(\omega_i t+\phi_{li}\right)$ definesc ***modurile*** sistemului.

Răspunsul forțat este soluția ecuației (1), unde $u(t)$ este semnalul aplicat la intrarea sistemului, atunci când condițiile inițiale sunt nule:

$$y(0)=0;\quad \left.\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{t=0}=0;\ldots;\quad \left.\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\right|_{t=0}=0 \tag{8}$$

Această soluție este

$$y_f(t)=y_o(t)+y_p(t) \tag{9}$$

unde $y_o(t)$ este soluția ecuației omogene,

$$y_o(t)=\sum_{i=1}^{n_1} C_{fi}\mathrm{e}^{s_i t}+\sum_{i=1}^{n_2} A_{fi}\mathrm{e}^{\alpha_i t}\sin\left(\omega_i t+\phi_{fi}\right) \tag{10}$$

şi $y_p(t)$ este o soluție particulară, având forma semnalului de intrare $u(t)$. Deci,

$$y_f(t)=\sum_{i=1}^{n_1} C_{fi}\mathrm{e}^{s_i t}+\sum_{i=1}^{n_2} A_{fi}\mathrm{e}^{\alpha_i t}\sin\left(\omega_i t+\phi_{fi}\right)+y_p(t) \tag{11}$$

unde constantele de integrare $C_{fi}, i=\overline{1,n_1}, A_{fi}, \phi_{fi}, i=\overline{1,n_2}$ pot fi calculate în funcție de constantele inițiale nule, (8).

Răspunsul total al sistemului este

$$y(t)=y_l(t)+y_f(t)=y_l(t)+y_o(t)+y_p(t) \tag{12}$$

Se notează prin $y_t(t)$

$$y_t(t)=y_l(t)+y_o(t) \tag{13}$$

componenta tranzitorie a răspunsului. Conform (7) şi (10), această componentă se determină prin relația:

$$y_t(t)=\sum_{i=1}^{n_1}\left(C_{li}+C_{fi}\right)\mathrm{e}^{s_i t}+\sum_{i=1}^{n_2}\mathrm{e}^{\alpha_i t}\left[A_{li}\sin\left(\omega_i t+\phi_{li}\right)+A_{fi}\sin\left(\omega_i t+\phi_{fi}\right)\right] \tag{14}$$

sau, după câteva transformări,

$$y_t(t)=\sum_{i=1}^{n_1} C_i\mathrm{e}^{s_i t}+\sum_{i=1}^{n_2} A_i e^{\alpha_i t}\sin\left(\omega_i t+\phi_i\right) \tag{15}$$

unde $C_i=C_{li}+C_{fi}, i=\overline{1,n_1}$. Parametrii $A_i, \phi_i, i=\overline{1,n_2}$, se obțin în funcție de constantele $A_{li}, \phi_{li}, A_{fi}, \phi_{fi}$.

Din relațiile (12) şi (13) se obține răspunsul total al sistemului, sub forma

$$y(t)=y_t(t)+y_p(t) \tag{16}$$

unde $y_p(t)$ se numeşte ***componenta de regim permanent*** a sistemului.

Fie cazul când rădăcinile ecuației caracteristice sunt situate în semiplanul stâng al planului complex. Regimul în care componenta tranzitorie este nenulă se numeşte ***regim tranzitoriu*** sau ***regim dinamic***.

Atunci când timpul t tinde spre infinit, adică atunci când componenta tranzitorie devine practic gală cu zero, se obține ***regimul permanent***. In acest regim, răspunsul sistemului este $y(t)\cong y_p(t)$. Dacă la intrarea sistemului s-a aplicat un semnal treaptă, regimul permanent se numeşte ***regim staționar***. Dacă însă la intrarea s-a aplicat un semnal sinusoidal, atunci regimul permanent se numeşte ***regim permanent sinusoidal***.

Observații:

1. Structura şi componentele răspunsului unui sistem sunt date în fig. 1

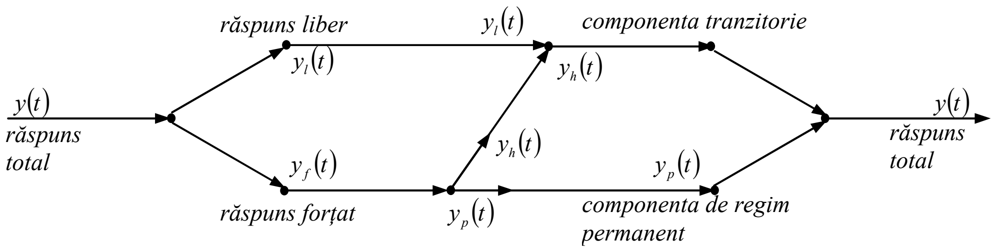

Fig. 1 Structura răspunsului unui sistem

2. *Răspunsul forțat al unui sistem poate fi exprimat prin integrala de convoluție*

$$y_f\left(t\right) = \int_0^t h(\tau)u(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{17}$$

2.1.2 Cazul modelului de stare

Fie

$$\dot{\boldsymbol{x}}\left(t\right) = A\boldsymbol{x}\left(t\right) + B\boldsymbol{u}\left(t\right) \tag{18}$$

$$\boldsymbol{y}\left(t\right) = C\boldsymbol{x}\left(t\right) + D\boldsymbol{u}\left(t\right) \tag{19}$$

ecuațiile de stare şi de ieşire şi

$$\boldsymbol{x}\left(t\right)\Big|_{t=0} = \boldsymbol{x}_0 \tag{20}$$

starea inițială.

2.1.2.1 Calculul componentei libere

Răspunsul liber în raport cu variabila de stare este soluția ecuației omogene (deci, când $\boldsymbol{u}\left(t\right)$=**0**) **:**

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{21}$$

considerând condiția inițială nenulă : $\boldsymbol{x}_0 \neq 0$. Această soluție are forma

$$\boldsymbol{x}_l\left(t\right) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{Ц}\left(t\right)\boldsymbol{x}_0 \tag{22}$$

unde

$$\boldsymbol{Ц}\left(t\right) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t} \tag{23}$$

este ***matricea de tranziție a stărilor***, denumită, de asemenea, ***matricea fundamentală*** a sistemului..

Răspunsul liber în raport cu variabila de ieşire este

$$\boldsymbol{y}_l\left(t\right) = \boldsymbol{CЦ}\left(t\right)\boldsymbol{x}_0 \tag{24}$$

- ***Proprietățile matricii fundamentale***

Din relația de definiție (23), rezultă următoarele proprietăți ale matricii fundamentale:

1. $\boldsymbol{Ц}(0)=\boldsymbol{I}$ (matricea unitate nxn)

2. $\boldsymbol{Ц}(-t)=\boldsymbol{Ц}^{-1}(t)$

deoarece $\boldsymbol{Ц}(-t)=\mathrm{e}^{-\boldsymbol{A}t}=\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\right)^{-1}=\boldsymbol{Ц}^{-1}(t)$

3. $\boldsymbol{Ц}(t_2-t_1)\boldsymbol{Ц}(t_1-t_0)=\boldsymbol{Ц}(t_2-t_0)$, $t_2>t_1>t_0$.

întrucât

$$\boldsymbol{Ц}(t_2-t_1)\boldsymbol{Ц}(t_1-t_0)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_2-t_1)}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_1-t_0)}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}\left[(t_2-t_1)+(t_1-t_0)\right]}=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}(t_2-t_0)}=\boldsymbol{Ц}(t_2-t_0)$$

4. $\left[\boldsymbol{Ц}(t)\right]^k=\left(\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\right)^k=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}kt}=\boldsymbol{Ц}(kt)$

- ***Calculul matricii fundamentale***

1) ***Metoda bazată pe transformata Laplace***

Aplicând în ecuația (21) transformata Laplace, se obține

$$s\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) \tag{25}$$

din care se explicitează $\boldsymbol{X}(s)$:

$$\boldsymbol{X}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0 \tag{26}$$

unde $\boldsymbol{X}(s)$ este transformata Laplace a răspunsului liber, adică:

$$\boldsymbol{x}_l(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\boldsymbol{X}(s)\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}_0\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\}\cdot\boldsymbol{x}_0 \tag{27}$$

Din (22) şi (27) se obține

$$\boldsymbol{Ц}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\right\} \tag{28}$$

Exemplu Fie

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix} \tag{29}$$

Se calculează $s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 2 & s+3\end{bmatrix}$

$$\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}=\frac{1}{s^2+3s+2}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} \\ -\dfrac{2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & -\dfrac{1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\varPhi}(t)=L^{-1}\left[\left(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\right)^{-1}\right]=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix} \tag{30}$$

2) ***Metoda bazată pe teorema Lagrange–Sylvester***

Această metodă permite calculul funcției $f\left(\boldsymbol{A}\right)=\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}$ printr-o relație simplă, dacă valorile proprii ale matricii $\boldsymbol{A}$, $\lambda_i \equiv s_i,\ i=\overline{1,n}$, sunt distincte:

$$f\left(\boldsymbol{A}\right)=\sum_{i=1}^{n} f\left(\lambda_i\right)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{\boldsymbol{A}-\lambda_j I}{\lambda_i-\lambda_j}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{e}^{s_i t}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n}\left(\frac{\boldsymbol{A}-s_j I}{s_i-s_j}\right)\right) \tag{31}$$

Exemplu. Fie matricea $\boldsymbol{A}$ de forma (29). Valorile proprii sunt rădăcinile ecuației caracteristice $\Delta(s)=\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=0$, adică $s^2+3s+2=0$. Rezultă $\lambda_1 \equiv s_1=-1$; $\lambda_2 \equiv s_2=-2$. Aplicând formula (31) se obține rezultatul:

$$\mathrm{e}^{At}=\mathrm{e}^{-1t}\left(\frac{\boldsymbol{A}-(-2)\boldsymbol{I}}{(-1)-(-2)}\right)+\mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\boldsymbol{A}-(-1)\boldsymbol{I}}{(-2)-(-1)}\right)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\cdot\mathrm{e}^{-t}+\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\cdot\mathrm{e}^{-2t}=$$

$$=\begin{bmatrix} 2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t} \\ -2\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} & -\mathrm{e}^{-t}+2\mathrm{e}^{-2t} \end{bmatrix}$$

care este identic cu cel din metoda anterioară.

3) ***Utilizarea formei canonoce Jordan***

Se pune ecuația de stare în forma canonica Jordan. In acest caz, matricea $\tilde{\boldsymbol{A}}$ din forma canonică Jordan este : $\tilde{\boldsymbol{A}}=\operatorname{diag}\left(s_1,\ldots,s_n\right)$ atunci când rădăcinile ecuației caracteristice sunt distincte sau $\tilde{\boldsymbol{A}}=\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{J}_1,\ldots\boldsymbol{J}_l\right)$ dacă rădăcinile au ordinul de multiplicitate $m_i \geq 1,\ i=\overline{1,l}$ ($\boldsymbol{J}_i$ sunt blocuri Jordan, vezi cursul 6).

Matricea fundamentală este

$$e^{\tilde{\boldsymbol{A}}t} = \mathrm{diag}\left(e^{s_i t},\ldots,e^{s_n t}\right) \tag{32}$$

când rădăcinile sunt distincte, sau

$$e^{\tilde{\boldsymbol{A}}t} = \mathrm{diag}\left(e^{\boldsymbol{J}_i t},\ldots,e^{\boldsymbol{J}_l t}\right) \tag{33}$$

atunci când rădăcinile sunt multiple. In relația (33), funcția $e^{\boldsymbol{J}_i t}$ are expresia

$$e^{\boldsymbol{J}_i t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{1}{(m_i-1)!}t^{m_i-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \ddots & t \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot e^{s_i t} \tag{34}$$

4) ***Calculul aproximativ al matricii fundamentale***

Calculul se bazează pe dezvoltarea în serie a exponențialei matriceale $\boldsymbol{\text{Ц}}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$. Pentru o valoare dată a timpului, $t = T$, matricea fundamentală este

$$\boldsymbol{\text{Ц}}(T) = e^{\boldsymbol{A}T} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T + \frac{\boldsymbol{A}^2T^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3T^3}{3!} + \cdots \tag{35}$$

Dacă se consideră un număr finit de termeni, $N+1$, în această dezvoltare , se obține

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\text{Ц}}(t) &\cong \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T + \frac{\boldsymbol{A}^2T^2}{2!} + \frac{\boldsymbol{A}^3T^3}{3!} + \cdots + \frac{\boldsymbol{A}^NT^N}{N!} = \\ &= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}T\left(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}T}{2}\left(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}T}{3}\left(\cdots + \frac{\boldsymbol{A}T}{N-1}\left(I + \frac{\boldsymbol{A}T}{N}\right)\right)\cdots\right)\right) \end{aligned} \tag{36}$$

2.1.2.2 Calculul componentei forțate

Răspunsul forțat în raport cu variabila de stare este soluția ecuației (18), cu condiții inițiale nule: $\boldsymbol{x}_0 = 0$. Dacă se utilizează transformata Laplace, ecuația de stare devine

$$s\boldsymbol{X}(s) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \tag{37}$$

de unde se obține

$$\boldsymbol{X}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \tag{38}$$

Răspunsul forțat este

$$\boldsymbol{x}_f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\boldsymbol{X}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\right]\cdot\boldsymbol{U}(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\right\} * \mathcal{L}^{-1}\left\{\boldsymbol{U}(s)\right\} \tag{39}$$

Insă

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\right\}=\boldsymbol{\varPhi}(t)\boldsymbol{B}; \quad \text{iar } \mathcal{L}^{-1}\left\{\boldsymbol{U}(s)\right\}=\boldsymbol{u}(t)$$

deci

$$\boldsymbol{x}_f(t)=\left[\boldsymbol{\varPhi}(t)\boldsymbol{B}\right]*\boldsymbol{u}(t)=\int_0^t \boldsymbol{\varPhi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{40}$$

Răspunsul forțat în raport cu variabila de ieşire , $\boldsymbol{y}(t)$**,** este

$$\boldsymbol{y}_f(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}_f(t)+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)=\int_0^t \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varPhi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{41}$$

Notăm cu

$$\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varPhi}(t)\boldsymbol{B} \tag{42}$$

răspunsul la impuls matriceal al sistemului multivariabil strict cauzal. Elementul $h_{ij}(t)$ al acestei matrice este răspunsul la impuls care caracterizează canalul cu intrarea j şi ieşirea i a sistemului.

Răspunsul total în raport cu variabila de stare este

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_l(t)+\boldsymbol{x}_f(t) \tag{43}$$

sau

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varPhi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \boldsymbol{\varPhi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{44}$$

Răspunsul total în raport cu variabila de ieşire este

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varPhi}(t)\boldsymbol{x}_0+\int_0^t \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varPhi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \tag{45}$$

sau

$$\boldsymbol{y}(t)=\underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varPhi}(t)\boldsymbol{x}_0}_{raspuns\ liber}+\underbrace{\int_0^t \boldsymbol{H}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau+\boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)}_{raspuns\ fortat} \tag{46}$$

2.2 Analiza sistemelor cu timp discret

2.2.1 Cazul modelelor intrare-ieşire

- ***Se dau***:

a - modelul sistemului sub forma ecuațiilor în diferențe

$$y(k)=a_1y(k-1)+\ldots+a_ny(k-n)+b_1u(k-1)+\ldots+b_nu(k-n) \tag{47}$$

b - condițiile inițiale

$$y(0),\ y(-1),\ldots,\ y(-n+1) \tag{48}$$

c - variabila de intrare $u(k)$; $k \geq 0$

- ***Se cere*** răspunsul $y(k)$ al sistemului.

Ca şi în cazul sistemelor cu timp continuu, răspunsul $y(k)$ conține componenta liberă $y_l(k)$ şi componenta forțată $y_f(k)$:

$$y(k) = y_l(k) + y_f(k) \tag{49}$$

Pentru a determina ***componenta liberă*** se consideră ecuația omogenă

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) \tag{50}$$

cu condițiile inițiale (48). Fie

$$1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \ldots - a_n z^{-n} = 0 \tag{51}$$

ecuația caracteristică, ce poate fi scrisă şi sub forma

$$z^n - a_1 z^{n-1} - \ldots - a_{n-1} z - a_n = 0 \tag{52}$$

şi $z_i, i = \overline{1,n}$, rădăcinile acestei ecuații, considerate distincte. Răspunsul liber este

$$y_l(k) = \sum_{i=1}^{n} C_{li} z_i^k \tag{53}$$

Constantele $C_{li}, i = \overline{1.n}$, se obțin din condițiile inițiale (48)

Răspunsul forțat este determinat ca soluție a ecuației (47), în care $u(k) \neq 0$ şi condițiile inițiale sunt nule. Această soluție are forma

$$y_f(k) = \sum_{i=1}^{n} C_{fi} z_i^k + y_p(k) \tag{54}$$

unde $y_p(k)$ este o soluție particulară, de forma semnalului de intrare $u(k)$.

Răspunsul total este

$$y(k) = y_l(k) + y_f(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i^k + y_p(k) = y_t(k) + y_p(k) \tag{55}$$

unde $C_i = C_{li} + C_{fi}$,

In expresia (55), $y_t(k)$ este ***componenta tranzitorie***,

$$y_t(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i^k \tag{56}$$

iar $y_p(k)$ este ***componenta de regim permanent***.