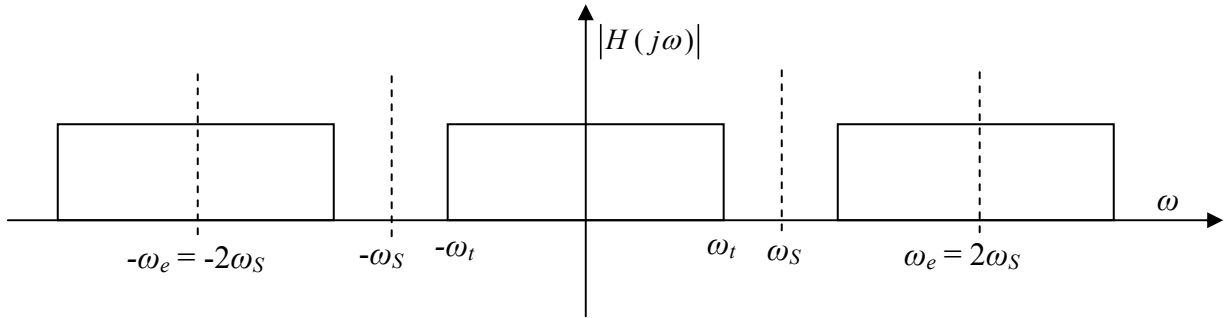


## CURS 21

### Proiectarea unui filtru FIR

Fie  $h(i)$  funcția răspunsului la impuls a unui FTJ ideal cu timp discret. Deoarece  $h(i)$  este un semnal eșantionat, transformata Fourier a acestui semnal este periodică în domeniul frecvență ( $\omega$ ). Prin urmare, caracteristica de amplificare,  $|H(j\omega)|$  este periodică (v. fig. 22), de perioadă  $\omega_e$ . În fig. 22,  $\omega_e$  este pulsația de eșantionare,  $\omega_S = \frac{\omega_e}{2} = \frac{\pi}{T_e}$  este pulsația Shannon, iar prin  $\omega_t$  s-a notat pulsația de tăiere a filtrului.



Răspunsul la frecvență al FTJ ideal cu timp discret este:

$$H(j\omega) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i) \cdot e^{-ji\omega T_e} \quad (89)$$

Dacă interpretăm expresia (89) ca o dezvoltare în serie Fourier complexă a funcției periodice  $H(j\omega)$ , atunci  $h(i)$  sunt parametrii acestei serii Fourier, care se obțin cu relația

$$h(i) = \frac{1}{\omega_e} \int_{-\frac{\omega_S}{2}}^{\frac{\omega_S}{2}} H(j\omega) e^{ji\omega T_e} d\omega \quad (90)$$

**Observație:** În formula clasică a transformatei Fourier, exponentul din formulă este pozitiv, iar exponentul din formula parametrilor este negativ. Se observă din (89) și (90) că semnele exponenților menționați sunt inversate, fără a fi afectată valabilitatea formulelor.

În (90), răspunsul la frecvență  $H(j\omega)$  este cel al FTJ ideal (v. fig. 16), care – în banda de trecere  $[\omega_t, \omega_t]$  – este:

$$H(j\omega) = 1 \cdot e^{-jt_0\omega} \quad (91)$$

iar  $t_0 = MT_e$ . În consecință, înlocuind această funcție în (90) și efectuând calculele, rezultă:

$$h(i) = \frac{1}{\omega_e - \omega_t} \int_{\omega_e - \omega_t}^{\omega_t} H(j\omega) e^{ji\omega T_e} d\omega = \frac{1}{\omega_e - \omega_t} \int_{\omega_e - \omega_t}^{\omega_t} 1 \cdot e^{j(i-M)\omega T_e} d\omega = \frac{\omega_t}{\omega_S} \text{sinc}((i-M)\omega_t T_e) \quad (92)$$

Expresia  $\omega_t T_e$  se poate scrie sub forma  $\frac{\omega_t}{\omega_S} \pi$ , astfel încât relația (15) se mai poate scrie sub forma:

$$h(i) = \frac{\omega_t}{\omega_S} \text{sinc}\left((i-M)\frac{\omega_t}{\omega_S} \pi\right) = \omega_c \text{sinc}((i-M)\omega_c \pi); \quad i = 0, 1, \dots, 2M \quad (93)$$

unde  $\omega_c = \frac{\omega_t}{\omega_S}$  este **frecvența de tăiere raportată la frecvența Shannon**.

Proiectarea unui filtru FIR constă în determinarea răspunsului la impuls  $h(i)$ . Se dă frecvența de tăiere raportată la frecvența Shannon,  $\omega_c$ . Se adoptă  $M$  (care determină numărul de parametri) și apoi se utilizează relația (93) pentru calculul răspunsului la impuls  $h(i)$ . În continuare, se adoptă o funcție fereastră și se calculează parametrii finali ai filtrului FIR :

$$h_F(i) = w_F(i) \cdot h(i) \quad (95)$$

### Observații

1. Dacă se explicitează sinusul cardinal din răspunsul la impuls (93), rezultă

$$h(i) = \omega_c \frac{\sin((i-M)\omega_c \pi)}{(i-M)\omega_c \pi} \quad (95)$$

2. Este cunoscut că funcția Matlab  $\text{sinc}(x)$  are semnificația  $\frac{\sin(x\pi)}{x\pi}$ . Prin urmare, programarea în Matlab a relației (93) se face prin enunțul

```
h(i)=wc*sinc((i-M-1)*wc)
```

### Aplicație

Să se realizeze și să se studieze filtrul FIR pentru  $\omega_c = 0.25$  și  $M=20$ , utilizând ferestrele rectangulară, Hamming și Kaiser.

Programul Matlab este următorul:

```
%Filtrul FIR
clear all;close all;
% frecventa de taiere raportata la frecventa Shannon si
% alti % parametri
wc=0.25;
alfa=0.54;
M=20;
I0=besseli(0,2*pi);
% se calculeaza si se reprezinta raspunsul la impuls pt
fereastră % rectangulară
for i=1:2*M+1,
    ind(i)=i;
    h(i)=wc*sinc((i-M-1)*wc);
```

```

end;
figure(1);
stem(ind,h);grid;
    % se calculeaza functiile fereastră si raspunsul la impuls
    % pentru % ferestrele Hamming si Kaiser
for i=1:2*M+1,
    wH(i)=alfa+(1-alfa)*cos((i-M-1)*pi/M);
    h1(i)=h(i)*wH(i);
    wK(i)=besseli(0,2*pi*sqrt(1-((i-M-1)/M)^2))/I0;
    h2(i)=h(i)*wK(i);
end;
    % se reprezinta grafic functiile fereastră si raspunsul la
    % impuls % pentru ferestrele Hamming si Kaiser
figure(100);
stem(ind,wH);grid;
figure(101);
stem(ind,wK);grid;
figure(2);
stem(ind,h1);grid;
figure(3);
stem(ind,h2);grid;
figure(4);
    % se determina functia de transfer si caracteristica Bode
    % la % utilizarea ferestrei rectangulare
numR(1:2*M+1)=h(2*M+1:-1:1);
sR=tf(numR,[1 zeros(1,40)],-1)
[mR,p,w]=bode(sR);
mRdB=20*log10(mR(1,:));
semilogx(w,mRdB);grid;hold on;
    % se determina functia de transfer si caracteristica Bode
    % la % utilizarea ferestrei Hamming
numH(1:2*M+1)=h1(2*M+1:-1:1);
sH=tf(numH,1,-1);
[mH,p,w]=bode(sH);
mHdB=20*log10(mH(1,:));
semilogx(w,mHdB,'k');
    % se determina functia de transfer si caracteristica Bode
    % la % utilizarea ferestrei Kaise
numK(1:2*M+1)=h2(2*M+1:-1:1);
sK=tf(numK,1,-1);
[mK,p,w]=bode(sK);
mKdB=20*log10(mK(1,:));
semilogx(w,mKdB,'r');
axis([0.02 10 -100 10]);

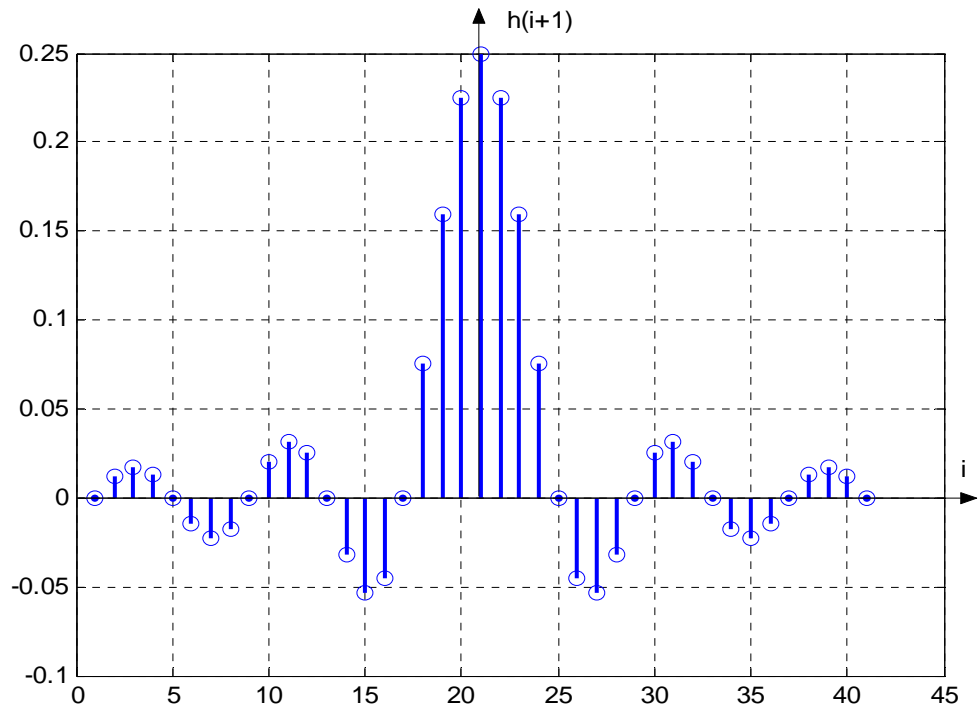
```

### **Rezultate**

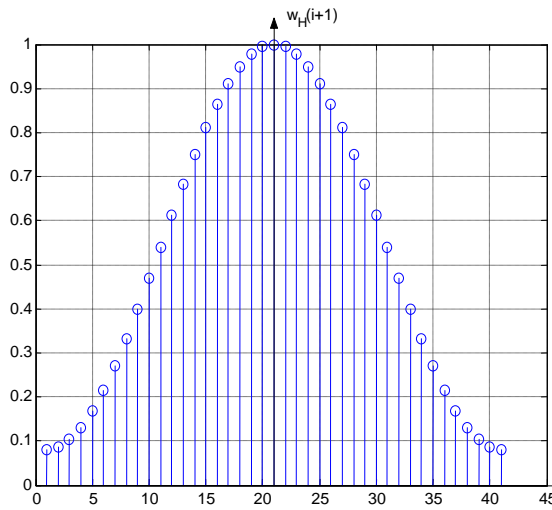
În fig. 23 se prezintă răspunsul la impuls în cazul ferestrei rectangulare. În fig 24 sunt date funcțiile fereastră Hamming și Kaiser, iar în fig. 25 sunt reprezentate funcțiile răspunsului la impuls văzute prin ferestrele Hamming și, respectiv Kaiser.

Caracteristicile filtrului FIR, cu cele trei tipuri de ferestre, sunt date în fig. 26, iar în fig. 27 este prezentat un zoom care detaliază aceste caracteristici. Se observă că

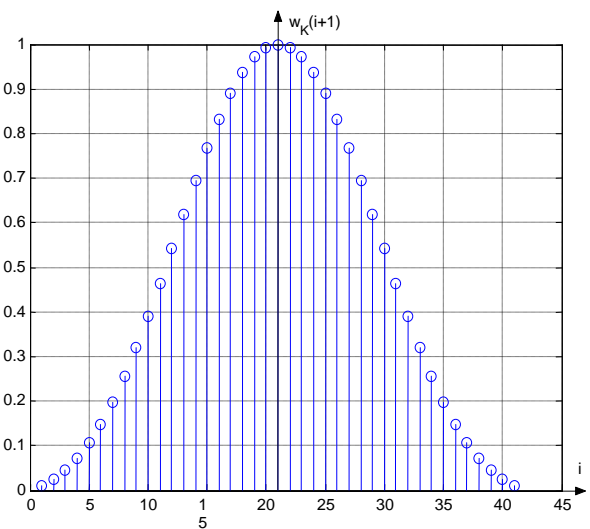
ferestrele Hamming și, mai ales, Kaiser realizează o puternică atenuare în zona de blocare, însă fereastra rectangulară realizează o pantă mai bună în regiunea de tăiere, cu toate că – în acest caz – atenuarea din zona de blocare este modestă.



**Fig. 23** Răspunsul la impuls în cazul ferestrei rectangulare

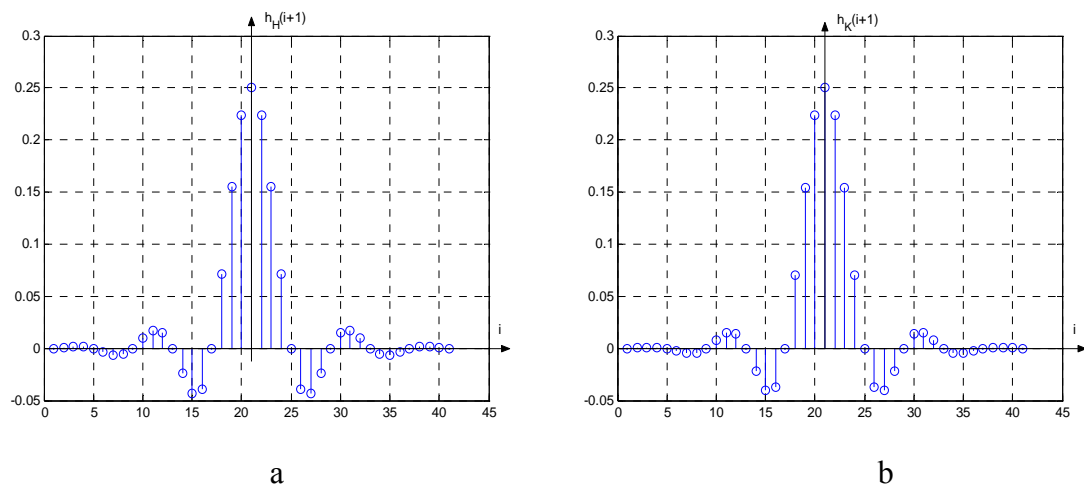


a

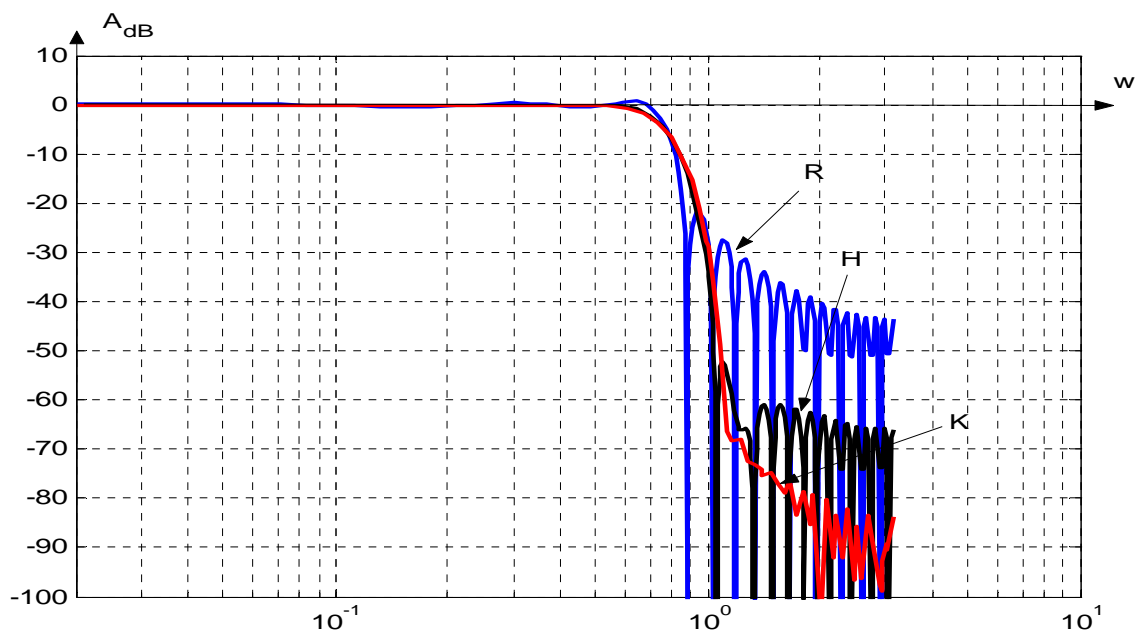


b

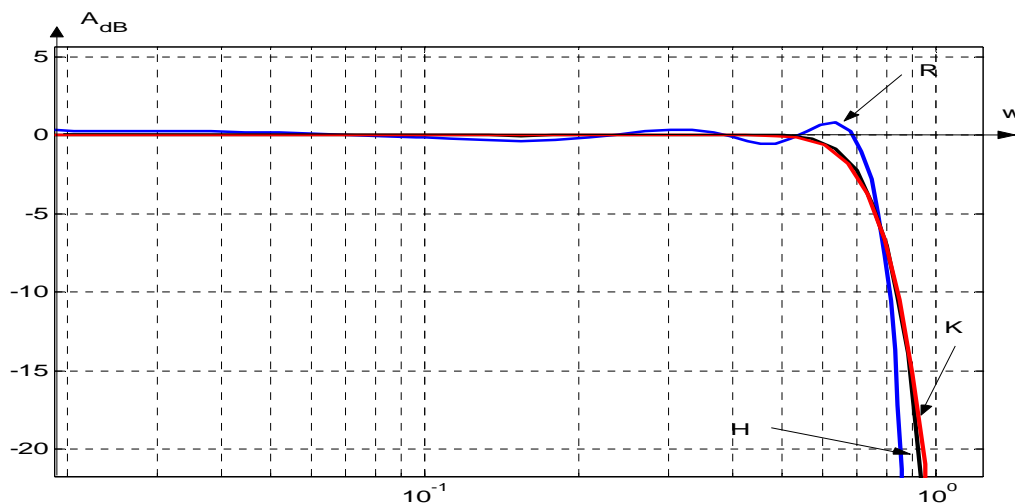
**Fig. 24** Funcțiile fereastră Hamming (a) și Kaiser (b)



**Fig. 25** funcțiile răspunsului la impuls văzute prin ferestrele Hamming (a) și Kaiser (b)



**Fig. 26** Caracteristicile filtrului FIR: R- fereastră rectangulară; H – fereastră Hamming; K – fereastră Kaiser



**Fig. 27** Caracteristicile filtrului FIR (zoom): fereastră rectangulară; H – fereastră Hamming; K – fereastră Kaiser

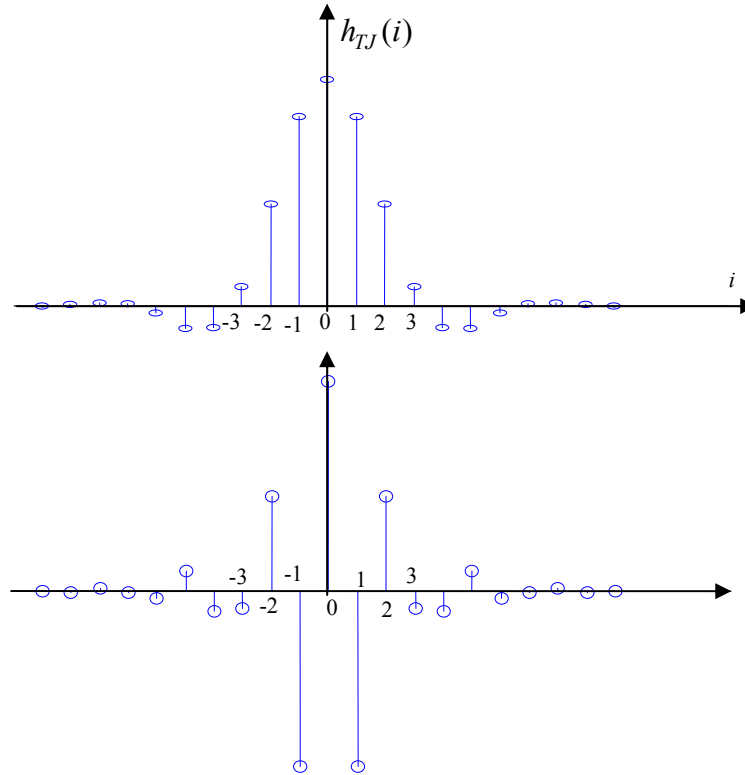
**Proiectarea filtrelor de tip FTS, FTB și FOB** se face pornind de la un FTJ nominal, aplicând unele transformări care afectează forma răspunsului la impuls. Evident, forma funcției  $h(i)$  determină răspunsul la frecvență  $H(j\omega)$  și, deci, caracteristicile de frecvență. Se poate spune că aceste transformări impuse răspunsului la impuls al FTJ nominal, notat în continuare prin  $h_{TJ}(i)$ , sunt echivalente unor transformări de frecvență, așa cum s-a procedat în cazul altor tipuri de filtre.

În cele ce urmează se va ilustra această procedură pentru cazul proiectării unui filtru trece sus (FTS). Etapele de calcul sunt următoarele :

1 – se calculează răspunsul la impuls al FTJ nominal,  $h_{TJ}(i)$ , pe baza unei ferestre alese. Pulsăția pentru care se calculează  $h_{TJ}(i)$  este  $\omega_{cS} = 1 - \omega_c$ , unde  $\omega_c$  este **frecvența de tăiere raportată la frecvența Shannon**;

2 – se calculează răspunsul la impuls al FTS,  $h_{TS}(i)$ , pe bază funcției  $h_{TJ}(i)$  deduse la pasul anterior. Considerând că referința pentru indicele  $i$  (deci, valoarea  $i = 0$ ) se atribuie valorii maxime (v.fig. 28), atunci răspunsul la impuls al FTS se calculează cu relația

$$h_{TS}(i) = (-1)^i h_{TJ}(i); \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm M \quad (96)$$



**Fig. 28** Deducerea funcției  $h_{TS}(i)$  din  $h_{TJ}(i)$

Deducerea funcției  $h_{TS}(i)$  din  $h_{TJ}(i)$  este ilustrată în fig. 28.

**Aplicație** Să se calculeze filtrul FIR de tip FTS, pentru cazul când perioada de eșantionare este de 1ms, iar frecvența de tăiere raportată la frecvența Shannon este  $\omega_c = 0.3$ . Pentru calculul filtrului se adoptă fereastra Kaiser.

Programul Matlab pentru calculul filtrului este dat în cele ce urmează.

```
clear all;close all;

%initializari
te=0.001;ws=pi/te;
wc=0.3;wcS=(1-wc);
w=[0:2:ws];
M=40;
I0=besseli(0,2*pi);

% calculul raspunsului la impuls al FTJ
for i=1:2*M+1,
    ind(i)=i;
    h(i)=wc*sinc((i-M-1)*wc);
    wK(i)=besseli(0,2*pi*sqrt(1-((i-M-1)/M)^2))/I0;
    hK(i)=h(i)*wK(i);
end;

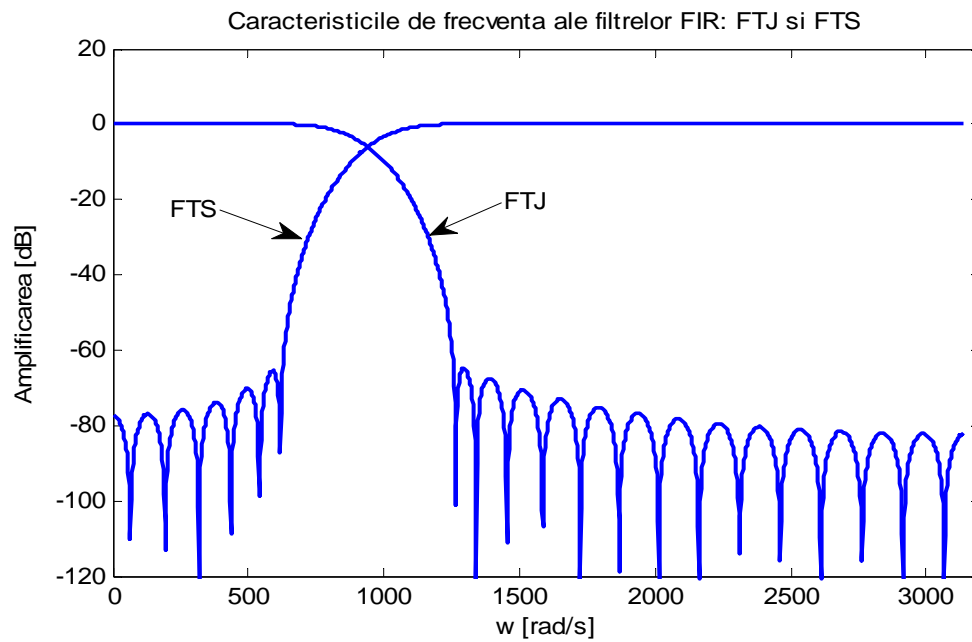
% calculul caracteristicii de frecventa a FTJ
figure(2);
numK(1:2*M+1)=hK(2*M+1:-1:1);
sK=tf(numK,1,te);
[mK,p]=bode(sK,w);
mKdB=20*log10(mK(1,:));
plot(w,mKdB,'r');hold on;
%axis([0.02 10 -100 10]);

% calculul raspunsului la impuls al FTS
for i=1:2*M+1,
    h(i)=wcS*sinc((i-M-1)*wcS);
    hJ(i)=h(i)*wK(i);
end;
figure(1);
stem(ind,hJ);grid;

for i=1:2*M+1,
    hS(i)=(-1)^(i-1)*hJ(i);
end;
figure(3);
stem(ind,hS);grid;

% calculul caracteristicii de frecventa a FTS
numS(1:2*M+1)=hS(2*M+1:-1:1);
sS=tf(numS,1,te);
[mS,p]=bode(sS,w);
mSdB=20*log10(mS(1,:));
figure(2);
plot(w,mSdB);
plot(w,mSdB);axis([0 3200 -120 20]);
```

În fig. 29 sunt date caracteristicile de frecvență ale filtrelor FTJ și FTS obținute în cadrul aplicației. În abscisă, pulsația este în scară liniară.



**Fig. 29.** Caracteristicile de frecvență ale filtrelor FIR: FTJ și FTS (aplicație)