

CURS 8

4.4. Conversia modelelor neparametrice

A. Conversia: răspuns la impuls – caracteristici de frecvență

Fie un sistem cu poli în semiplanul stâng. La un astfel de sistem, este satisfăcută condiția $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$. Deoarece funcția răspuns la impuls, $h(t)$, admite simultan transformata Fourier și transformata Laplace, rezultă consecutiv :

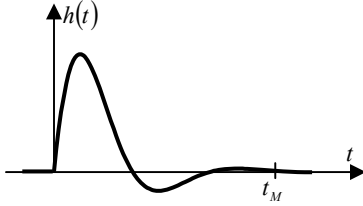


Fig. 31 Răspuns la impuls

$$\mathcal{F}\{h(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \quad (55)$$

$$= \mathcal{L}\{h(t)\}_{s=j\omega} = H(j\omega)$$

$$H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) =$$

$$= \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} h(t) (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \quad (56)$$

de unde rezultă

$$P(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \cos \omega t dt ; \quad Q(\omega) = - \int_0^{\infty} h(t) \sin \omega t dt \quad (57)$$

Fie t_M timpul la care răspunsul la impuls devine practic egal cu zero (v. fig. 31), adică $h(t)|_{t > t_M} \cong 0$. Calculul numeric al caracteristicilor de frecvență, plecând de la răspunsul la impuls, are la bază relațiile :

$$P(\omega) = \int_0^{t_M} h(t) \cos \omega t dt ; \quad Q(\omega) = - \int_0^{t_M} h(t) \sin \omega t dt \quad (58)$$

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} ; \quad \varphi(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad (59)$$

B. Conversia: caracteristici de frecvență – răspuns la impuls

Pentru conversia inversă, de la caracteristicile de frecvență ale unui sistem de fază minimă la răspunsul la impuls, se pornește de la expresia transformatei Fourier inverse :

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) + jQ(\omega)] [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega \end{aligned} \quad (60)$$

Dezvoltând calculul, rezultă :

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t] d\omega + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) \sin \omega t + Q(\omega) \cos \omega t] d\omega = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t] d\omega
\end{aligned} \tag{61}$$

întrucât $[P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t]$ este o funcție pară, iar $[P(\omega) \sin \omega t + Q(\omega) \cos \omega t]$ este o funcție impară. Se vor utiliza notațiile

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = h^{(+)}(t); \quad \frac{-1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega = h^{(-)}(t) \tag{62}$$

unde $h^{(+)}(t)$ este pară și $h^{(-)}(t)$ impară. Din (61) și (62) rezultă:

$$h(t) = h^{(+)}(t) + h^{(-)}(t) \tag{63}$$

Dacă în această relație se schimbă semnul timpului t , se obține $h(-t) = h^{(+)}(t) + h^{(-t)}$ sau $0 = h^{(+)}(t) - h^{(-t)}$, deoarece $h(-t) = 0$ (sistemul este cauzal). Însă $h^{(+)}(-t) = h^{(+)}(t)$ și $h^{(-)}(-t) = -h^{(-)}(t)$, deci $h^{(+)}(t) = h^{(-)}(t)$ și

$$h(t) = 2h^{(+)}(t) = 2h^{(-)}(t) \tag{64}$$

Rezultă

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega; \quad h(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega \tag{65}$$

Calculul numeric utilizează limite superioare finite în integrale :

$$h(t) \cong \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_M} P(\omega) \cos \omega t d\omega; \quad h(t) \cong -\frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_M} Q(\omega) \sin \omega t d\omega \tag{66}$$

unde ω_M este pulsația la care au loc relațiile : $P(\omega)|_{\omega > \omega_M} \cong 0$; $Q(\omega)|_{\omega > \omega_M} \cong 0$.

4.5. Discretizarea sistemelor cu timp continuu

4.5.1 Introducere

Pentru un sistem cu timp continuu dat, se cere deducerea unui sistem cu timp discret care să aproximeze caracteristicile dinamice ale sistemului cu timp continuu. Această problemă apare atunci când se dorește implementarea numerică (soft) a unui sistem dat în realizare analogică.

Problema formulată poate fi tratată și ca o conversie de tipul:

sistem cu timp continuu \rightarrow sistem cu timp discret.

4.5.2. Abordarea bazată pe ansamblul eşantionator-extrapolator

Fie $H(s)$ funcția de transfer a sistemului cu timp continuu, care face obiectul procedurii de discretizare (fig. 32.a). Prin operația de discretizare, se « construiește » un nou sistem cu caracteristici dinamice apropiate de cele ale sistemului inițial, urmând procedura ilustrată în fig. 32.b. La intrarea sistemului cu timp continuu se aplică $\mathfrak{u}(t)$, obținut prin ansamblul eşantionator-extrapolator. Sistemul cu timp discret are la intrare

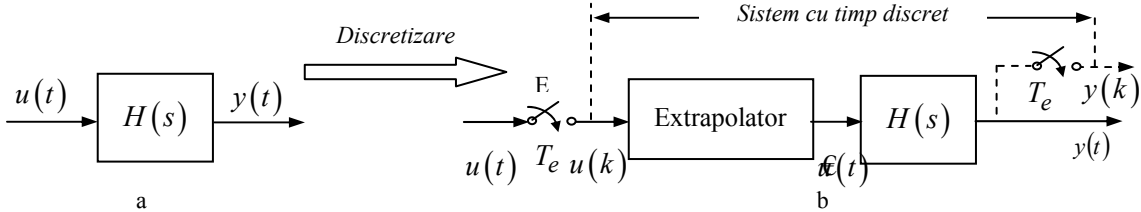


Fig. 32 Sistem cu timp continuu (a) schema de discretizare utilizând ansamblul eşantionator-extrapolator (b)

variabila $u(k)$, obținută din $u(t)$ cu eşantionatorul E . Fireşte, la intrarea sistemului cu timp continuu trebuie aplicat un semnal care să fie definit pe tot domeniul timpului natural şi, de aceea, se utilizează un extrapolator, pentru obținerea semnalului cu timp continuu $\mathfrak{u}(t)$ din semnalul eşantionat. Variabila de ieşire a sistemului cu timp discret, $y(k)$, este dată de un eşantionator fictiv, reprezentat cu linie întreruptă în fig. 32.b.

Eroarea de aproximare a sistemului inițial, dat în fig. 32.a, prin sistemul reprezentat în fig.32.b, este dată de eroarea de refacere a semnalului $u(t)$, plecând de la semnalul eşantionat $u(k)$, adică de diferența: $u(t) - \mathfrak{u}(t)$. ***Această eroare este nulă dacă refacerea semnalului cu timp continuu din semnalul cu timp discret s-ar face cu un***

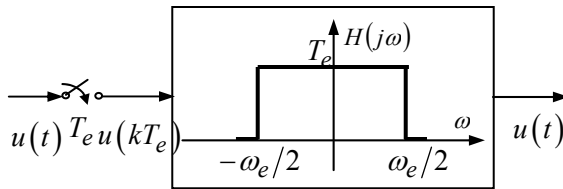


Fig. 33 Reconstruction idéale du signal $u(t)$

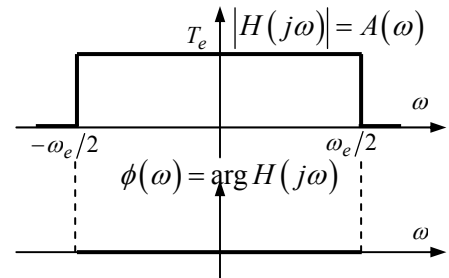


Fig. 34 Caractéristiques de fréquence du filtre passe-bas idéal

filtru trece jos ideal.

Fie ***cazul teoretic*** al reconstrucției ideale a semnalului $u(t)$, plecând de la semnalul eşantionat $u^*(t) \equiv u(kT_e)$ (fig. 33). Răspunsul la frecvență al filtrului trece-jos ideal este

$$H(j\omega) = \begin{cases} T_e, & \text{pentru } |\omega| \leq \frac{\omega_e}{2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad (67)$$

iar caracteristicile lui de frecvență sunt reprezentate în fig. 34. Răspunsul la impuls al acestui filtru este

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} T_e e^{j\omega t} d\omega = \frac{T_e}{2\pi} \frac{1}{jt} e^{j\omega t} \Big|_{-\omega_e/2}^{\omega_e/2} = \text{sinc} \frac{\omega_e t}{2} \quad (68)$$

Acest răspuns este reprezentat în fig. 35. Așa cum s-a arătat și în capitolul anterior, filtrul trece jos ideal nu este cauzal, deoarece el răspunde înainte de a aplica impulsul $\delta(t)$ la intrare (efectul precede cauza).

• **In practică**, pentru refacerea semnalului cu timp continuu din semnalul eșantionat se utilizează extrapolatoare de ordinul zero sau de ordinul 1

Fie cazul când semnalul cu timp continuu $x(t)$ este obținut cu un **extrapolator de ordinul zero**. În fig. 36 este dat răspunsul la impuls al acestui extrapolator, a cărei expresie este

$$h_E(t) = u(t) - u(t - T_e) \quad (69)$$

unde $u(t)$ este semnalul treaptă unitară. Funcția de transfer a extrapolatorului este transformata Laplace a răspunsului la impuls, deci:

$$H_E(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \mathcal{L}\{u(t)\} - \mathcal{L}\{u(t - T_e)\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s} e^{-T_e s} \quad (70)$$

$$\text{Rezultă : } H_E(s) = \frac{1 - e^{-T_e s}}{s} \quad (71)$$

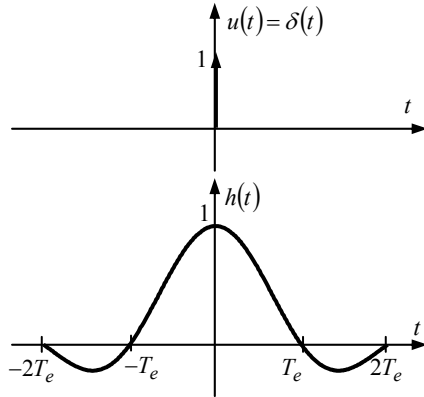


Fig. 35 Răspunsul la impuls al filtrului trece-jos ideal

Răspunsul la frecvență este

$$H_E(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j\omega} \quad (72)$$

sau

$$\begin{aligned} H_E(j\omega) &= e^{-j\omega T_e/2} \frac{e^{j\omega T_e/2} - e^{-j\omega T_e/2}}{j\omega} = \\ &= T_e e^{-j\omega T_e/2} \frac{e^{j\omega T_e/2} - e^{-j\omega T_e/2}}{2j\omega T_e/2} = \\ &= T_e e^{-j\omega T_e/2} \text{sinc} \frac{\omega T_e}{2} \end{aligned} \quad (73)$$

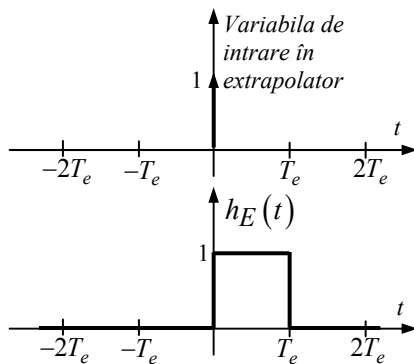


Fig. 36. Răspunsul la impuls al extrapolatorului de ordinul 0

Deci, caracteristicile de frecvență ale extrapolatorului sunt :

$$A_E(\omega) = |H_E(j\omega)| = T_e \left| \text{sinc} \frac{\omega T_e}{2} \right| \quad (74)$$

$$\varphi_E(\omega) = \arg H_E(j\omega) = -\frac{\omega T_e}{2} \quad (75)$$

Aceste caracteristici sunt reprezentate în fig. 37 (cu linie întreruptă sunt date caracteristicile filtrului trece-jos ideal). Se observă că ***aproximarea caracteristicilor ideale este acceptabilă numai la joasă frecvență.***

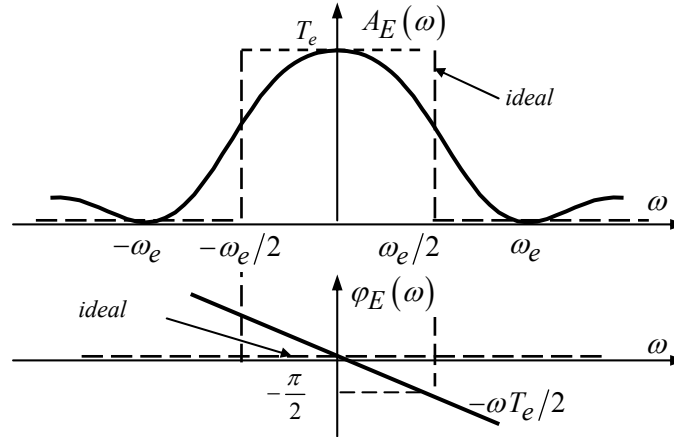


Fig. 37 Caractéristiques de fréquence du bloqueur d'ordre 1

În cazul extrapolatorului de ordinul 1, răspunsul la impuls este reprezentat în fig. 38. El poate fi exprimat prin relația :

$$h_E(t) = u(t) - 2u(t - T_e) + u(t - 2T_e) + r(t) - 2r(t - T_e) + r(t - 2T_e) \quad (76)$$

în care $r(t)$ este funcția rampă de pantă $1/T_e$. Funcția de transfer a extrapolatorului rezultă de forma :

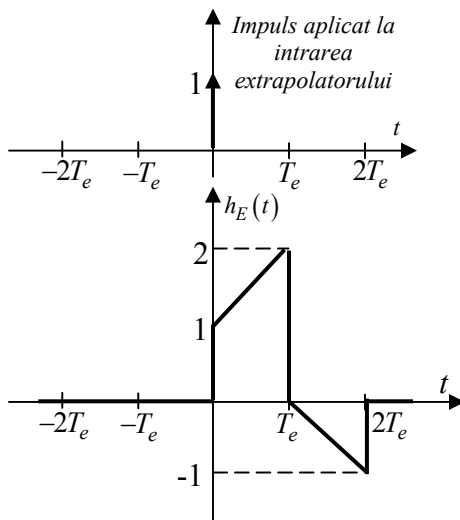


Fig. 38 Răspunsul la impuls al extrapolatorului de ordinul 1

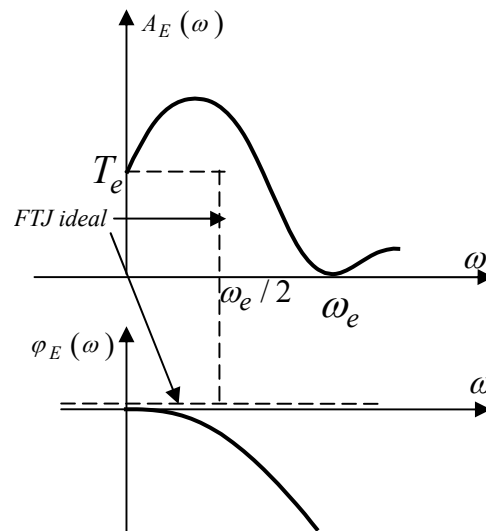


Fig. 39 Caracteristicile de frecvență ale extrapolatorului de ordinul 1

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s} e^{-T_e s} + \frac{1}{s} e^{-2T_e s} + \frac{1}{T_e s^2} - \frac{2}{T_e s^2} e^{-T_e s} + \frac{1}{T_e s^2} e^{-2T_e s}$$

sau

$$H_E(s) = \mathcal{L}\{h_E(t)\} = \frac{1+T_e s}{T_e} \left(\frac{1-e^{-T_e s}}{s} \right)^2 \quad (77)$$

Din expresia răspunsului la frecvență

$$H(j\omega) = \frac{1+j\omega T_e}{T_e} \left(\frac{1-e^{-j\omega T_e}}{j\omega} \right)^2$$

se obțin caracteristicile de amplificare și de defazaj :

$$A_E(\omega) = T_e \sqrt{1+(\omega T_e)^2} \cdot \text{sinc}^2(\omega T_e/2) \quad \varphi_E(\omega) = -\omega T_e + \arctg \omega T_e \quad (78)$$

care sunt reprezentate în fig. 39. Acest rezultat nu probează superioritatea extrapolatorului de ordinul 1, față de cel de ordinul zero, astfel încât, pentru discretizarea modelelor cu timp continuu se utilizează mai des relația (71).

- În conformitate cu schema din fig. 32.b, funcția de transfer a sistemului cu timp discret, $H(z)$, având intrarea $u(k)$ și ieșirea $y(k)$, este

$$H(z) = \mathcal{Z}\{H_E(s)H(s)\} \quad (79)$$

Dacă se utilizează extrapolatorul de ordinul zero (cel mai răspândit), rezultă

$$H(z) = \mathcal{Z} \cdot \left\{ \frac{1-e^{-T_e s}}{s} H(s) \right\} = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\} \quad (80)$$

deoarece

$$\mathcal{Z} \left\{ e^{-T_e s} \frac{1}{s} H(s) \right\} = z^{-1} \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} H(s) \right\} \quad (81)$$

$e^{-T_e s}$ fiind operatorul de întârziere cu T_e , în domeniul timp continuu, așa cum z^{-1} este operatorul de întârziere cu un pas de eșantionare, în domeniul timp discret.

Example

1. Fie $H(s) = 1/s$ funcția de transfer a unui integrator. Utilizând un extrapolator de ordinul zero, se obține

$$H(z) = (1-z^{-1}) \cdot \mathcal{Z} \left\{ \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s} \right\} = (1-z^{-1}) \cdot \frac{T_e z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{T_e z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (82)$$

2. Fie $H(s) = \frac{T_d s}{Ts + 1}$ funcția de transfer a unui derivator la limită cauzal. În același mod se obține

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{T_d s}{Ts + 1}\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{T_d/T}{(s + 1/T)}\right] = \frac{T/T_d (1 - z^{-1})}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (83)$$

unde

$$a_1 = \exp\left(-\frac{T_e}{T}\right) \quad (84)$$

3. Fie $H(s) = \frac{K}{Ts + 1}$ funcția de transfer a unui filtru de ordinul 1. Utilizarea extrapolatorului de ordinul zero conduce la

$$H(z) = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{1}{s} \cdot \frac{K}{Ts + 1}\right] = (1 - z^{-1}) \cdot Z\left[\frac{K/T}{s(s + 1/T)}\right] \quad (85)$$

Dacă se descompune funcția de transfer $\frac{K/T}{s(s + 1/T)}$ în elemente simple,

$$\frac{K/T}{s(s + 1/T)} = \frac{K}{s} - \frac{K}{s + 1/T} \quad (86)$$

se poate scrie

$$Z\left[\frac{K/T}{s(s + 1/T)}\right] = Z\left[\frac{K}{s}\right] - Z\left[\frac{K}{s + 1/T}\right] = \frac{K}{1 - z^{-1}} - \frac{K}{1 - a_1 z^{-1}} = \frac{K(1 - a_1)z^{-1}}{(1 - z^{-1})(1 - a_1 z^{-1})} \quad (87)$$

deci

$$H(z) = \frac{b_1 z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (88)$$

unde a_1 a la forme (84) și $b_1 = K(1 - a_1)$ (89)

4.5.2. Abordarea bazată pe metoda Tustin

Se pune relația $z = e^{sT_e}$ sub forma

$$z = e^{sT_e} = \frac{e^{\frac{sT_e}{2}}}{e^{-\frac{sT_e}{2}}} = \frac{1 + \frac{1}{1!} \frac{sT_e}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{sT_e}{2}\right)^2 + \dots}{1 - \frac{1}{1!} \frac{sT_e}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{sT_e}{2}\right)^2 - \dots} \quad (90)$$

Reținând primii doi termeni din dezvoltările în serie, se obține

$$z \cong \frac{2 + sT_e}{2 - sT_e} \quad (91)$$

Din această relație se explicitează variabila s :

$$s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (92)$$

Se obține o transformare biliniară, care proiectează axa imaginară $s = j\omega$ pe cercul de rază unitară $|z|=1$. Punctele din semiplanul drept al planului „ s ” se regăsesc în interiorul acestui cerc.

Acest procedeu, numit – de asemenea – metoda Tustin constă în substituirea variabilei s din funcția de transfer $H(s)$, prin expresia (92). Deci :

$$H(z) = H(s) \Bigg|_{s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} \quad (93)$$

Exemple

- 1- Discretizarea integratorului având funcția de transfer $H(s) = \frac{1}{s}$:

$$H(z) = \frac{1}{s} \Bigg|_{s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{T_e}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \quad (94)$$

- 2- Discretizarea unui filtru de ordinul 1 :

$$H(z) = \frac{K}{Ts+1} \Bigg|_{s = \frac{2}{T_e} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{K}{\frac{2T}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + 1} = \frac{b_1(1+z^{-1})}{1+a_1z^{-1}} \quad (95)$$

unde

$$a_1 = \frac{\frac{2T}{T_e} - 1}{\frac{2T}{T_e} + 1}; \quad b_1 = \frac{K}{\frac{2T}{T_e} + 1} \quad (96)$$

Observații

1. Sistemul cu timp discret, obținut prin discretizarea cu metoda Tustin a unui sistem **strict cauzal** cu timp continuu, este un sistem **la limită cauzal**.
2. Relația (91) poate fi utilizată pentru conversia : funcție de transfer cu timp discret \rightarrow funcție de transfer cu timp continuu.
3. Conversiile: sisteme cu timp continuu $\xrightarrow{\quad}$ sisteme cu timp discret nu sunt niciodată unice.

Aplicație Matlab. Funcția Matlab care realizează conversia : model linear cu timp continuu \rightarrow model cu timp discret este `c2d`, a cărei utilizare este:


```
sysd=c2d(sys, Te, metoda)
```

unde sys et $sysd$ sunt sisteme cu timp continuu și, respectiv, cu timp discret, T_e – perioada de eșantionare, $metoda$ – permite selecția procedurii de discretizare, după cum urmează :

'zoh' – utilizarea extrapolatorului de ordinul zero;

'foh' - utilizarea extrapolatorului de ordinul 1 (variantă ameliorată);

'tustin' – utilizarea metodei Tustin.

Exemplul 1

```
Te=0.05; sys=tf([10 10]); sysd=c2d(sys, Te, 'tustin')
```

$$\text{Transfer function} \\ \frac{0.2438z^2+0.01189z-0.2319}{z^2-1.9z+0.9049}$$

Exemplul 2

Fie un filtru de ordinul 1, cu amplificarea statică egală cu 1 și constantă de timp unitară. Adoptând perioada de eșantionare $T_e=0.2$ s, se determină cu funcția $c2d$ caracteristica logaritmică a amplificării până la frecvența Shannon $\omega_e/2$, atât la sistemul cu timp continuu inițial, cât și pentru sistemul discretizat pe baza extrapolatoarelor de ordinul 0 și 1. Rezultatele sunt prezentate în fig. 4.68. Se constată că erorile de discretizare afectează zona de înaltă frecvență a caracteristicilor sistemului discretizat, în vecinătatea frecvenței Shannon $\omega_e/2$.

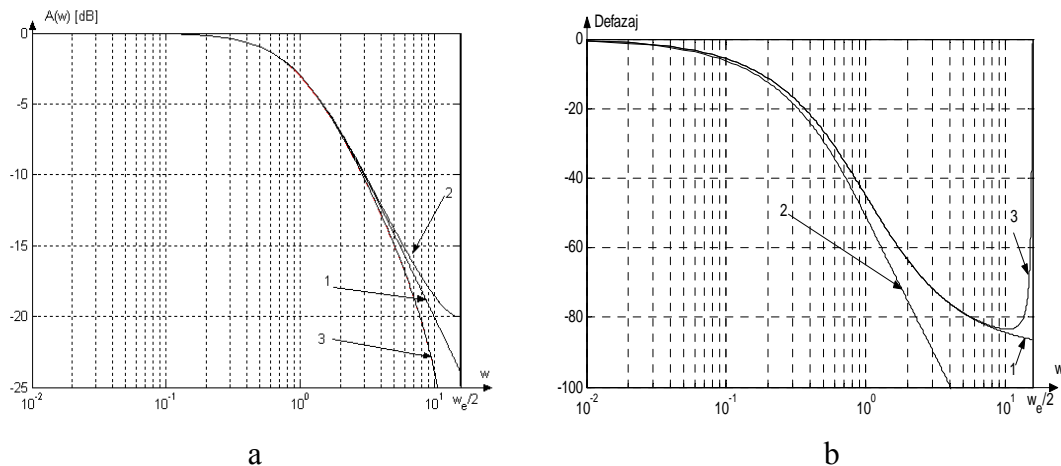


Fig. 40 Caracteristica de amplificare (a) și de defazaj (b) pentru sistemul cu timp continuu (1) și pentru sistemul discretizat prin: extrapolator de ordin zero (2) și de ordin unu ameliorat (3)