CURS 12

TEORIA CIRCUITELOR

1. Formularea problemei

In ingineria electrică, atunci când se studiază circuitele de forţă, structura generală a unei reţele electrice este de tip ***multipol***, adică un circuit cu un număr N ($N \geq 2$) de poli, la care sunt aplicate potenţialele $V_i, i = \overline{1, N}$ (fig.1). O asemenea abordare nu este de mare interes în domeniul electronicii. ***Electronica studiază circuitele de prelucrare a semnalelor***, iar semnalele sunt – de regulă – tensiuni electrice definite între două borne care formează o ***poartă***. Deci, circuitele electrice sunt definite prin intermediul porţilor, la care se aplică sau se obţin semnale, în conformitate cu funcţiunile circuitului de procesare a informaţiei. In acest context, structura cea mai generală a unui circuit electronic este cea de ***multiport*** (fig. 2), ce include un număr oarecare, N, de porţi, între care se realizează transfer de semnale.

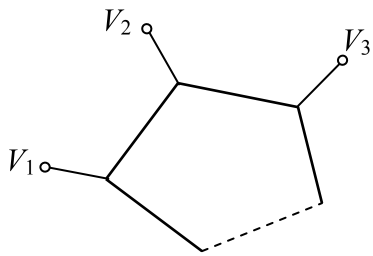

Fig.1 Structura unui multipol

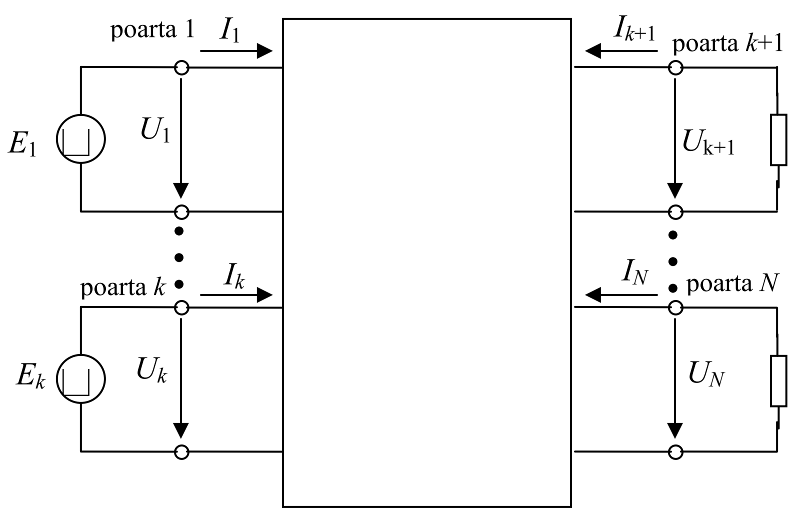

Fig. 2 Structura unui multiport

La fiecare poartă se adoptă o ***convenţie unitară pentru sensul tensiunii şi sensul curentului***, conform reprezentării din fig. 2. Această convenţie este păstrată întotdeauna, indiferent dacă la poarta respectivă se transmite sau se recepţionează semnalul.

Proprietăţile generale ale multiporţilor

a – După modul în care se realizează transmiterea semnalului între porţi, pot exista două tipuri de transfer: ***unilateral*** (într-un singur sens) sau ***bilateral*** (în ambele sensuri);

b – Fie cazul unui transfer bilateral, şi fie Γ_{pq} operatorul care defineşte transferul semnalului între poarta *p* şi poarta *q*. Un circuit de tip multiport este ***reciproc*** dacă:

$$\Gamma_{pq} = \Gamma_{qp} \tag{1}$$

c – Fie $u_k(t)$ şi $i_k(t)$ valorile instantanee ale tensiunii şi curentului la poarta *k* a circuitului de tip multiport (k=1,2,..., N). Puterea instantanee la poarta *k* este

$$p_k(t) = u_k(t)\, i_k(t) \tag{2}$$

iar valoarea instantanee a energiei la poarta k este

$$W_k(t) = \int_{-\infty}^{t} p_k(\tau)\, d\tau \tag{3}$$

Fie

$$W_t(t) = \sum_{k=1}^{N} W_k(t) \tag{4}$$

energia totală a circuitului, văzută la cele *N* porţi. In acest caz,

- dacă $\forall t, W_t(t) > 0,$ circuitul se numeşte ***pasiv***, deoarece el consumă energie,
- dacă $\forall t, W_t(t) < 0,$ circuitul se numeşte ***activ***, deoarece el debitează energie,
- dacă $\forall t, W_t(t) = 0,$ circuitul se numeşte ***reactiv***. ***El este format numai din inductivităţi şi capacităţi ideale*** (fără a conţine surse sau rezistenţe).

Tipurile uzuale de circuite în electronică sunt:

1 – ***uniporţii***, adică circuite cu o singură poartă (fig. 3). Acesta prezintă două borne, adică - poarta la care se aplică semnalul;

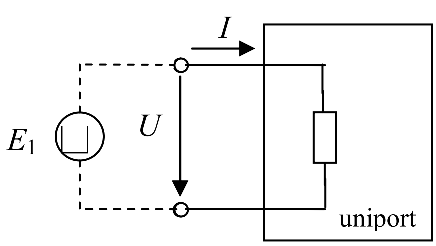

Fig. 3 Circuit uniport

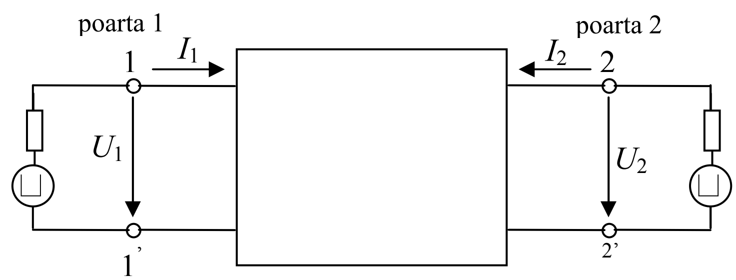

Fig. 4 Circuit diport

2 – ***diporţii***, care sunt circuite cu două porţi, ale căror borne sunt notate cu 1-1' şi, respectiv, 2-2'. In general, *transferul semnalului între porţi este bidirecţional*, aşa cum este cazul unei linii de comunicaţie.

Funcţii de circuit

In general, într-un sistem fizic, unele mărimi sunt variabile independente (mărimi „cauză"), altele – variabile dependente (mărimi „efect"). Fie $c(t)$ şi $e(t)$ valorile instantanee ale variabilelor cauză, respectiv efect. Dacă se notează cu $C(s)$ şi $E(s)$ transformatele Laplace ale acestor variabile, atunci raportul

$$H(s) = \frac{E(s)}{C(s)}, \tag{5}$$

cunoscut în teoria sistemelor sub denumirea de ***funcţia de transfer***, se mai numeşte ***funcţie de sistem***. Atunci când sistemul fizic este un circuit electric, mărimile $c(t)$ şi $e(t)$ sunt tensiuni şi curenţi, $u(t)$ şi $i(t)$, iar funcţia de sistem (5) se numeşte ***funcţie de circuit***.

Această situație nu reprezintă doar o problemă de terminologie, ci are implicații fizice importante, care vor fi detaliate în continuare, în cazul unui diport. Aici există 4 mărimi fizice: $u_1(t)$, $i_1(t)$, pentru poarta 1, şi $u_2(t)$, $i_2(t)$ – pentru poarta 2. Funcțiile de circuit care se pot defini sunt:

1- *funcții de circuit ce descriu poarta* 1

- dacă $i_1(t)$ este variabila independentă şi $u_1(t)$ – variabila dependentă, atunci funcția de circuit

$$Z_1(s) = \frac{U_1(s)}{I_1(s)} \tag{6}$$

este impedanța la poarta 1;

- dacă $u_1(t)$ este variabila independentă şi $i_1(t)$ – variabila dependentă, atunci funcția de circuit

$$Y_1(s) = \frac{I_1(s)}{U_1(s)} \tag{7}$$

este admitanța la poarta 1

2- *funcțiile de circuit ce descriu poarta* 2, adică impedanța la poarta 2 şi admitanța la poarta 2, se definesc în mod similar. In general, denumirea *generică* pentru impedanțe şi admitanțe este ***imitanța***. Această mărime reprezintă fie o impedanță, fie o admitanță, fără a se preciza natura ei. Deci, funcțiile de circuit ce descriu porțile 1 şi 2 sunt imitanțe;

3- *funcțiile de circuit ce descriu transferul dintre porți.* Acestea pot fi:

- *funcții de circuit de tipul unor imitanțe de transfer, precum*:

$$Z_{12}(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}; Y_{12}(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}; Z_{21}(s) = \frac{U_1(s)}{I_2(s)}; Y_{21}(s) = \frac{I_1(s)}{U_2(s)} \tag{8}$$

In cazul tuturor funcțiilor de circuit menționate, mărimile cauză şi mărimile efect sunt de natură diferită (curent/tensiune sau tensiune/curent);

- *funcții de circuit de tipul unor funcții de transfer* (***adimensionale***), atunci când mărimile cauză şi mărimile efect sunt de aceeaşi natură (tensiune sau curent):
  - funcția de transfer cu semnificație de amplificare în tensiune, într-un sens sau altul:

$$H_{u12}(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}; \quad H_{u21}(s) = \frac{U_1(s)}{U_2(s)} \tag{9}$$

  - funcția de transfer cu semnificație de amplificare în curent, într-un sens sau altul:

$$H_{i12}(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}; \quad H_{i21}(s) = \frac{I_1(s)}{I_2(s)} \tag{10}$$

2. Uniporți

Pentru un uniport (v. fig. 3), funcția de circuit este o imitanță: fie impedanța $Z(s) = \dfrac{U(s)}{I(s)}$, fie admitanța $Y(s) = \dfrac{1}{Z(s)} = \dfrac{I(s)}{U(s)}$. Impedanța complexă $Z(j\omega)$ se poate scrie sub forma

$$Z(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \tag{11}$$

unde $R(\omega)$ este rezistența iar $X(\omega)$ este reactanța. In cazul circuitelor pur reactive, formate numai din inductivități şi capacități, avem :

$$Z(j\omega) = jX(\omega) \tag{12}$$

Admitanța complexă $Y(j\omega)$ se poate scrie sub forma

$$Y(j\omega) = G(\omega) + jB(\omega) \tag{13}$$

unde $G(\omega)$ este conductanța iar $B(\omega)$ este susceptanța. In cazul circuitelor pur reactive,

$$Y(j\omega) = jB(\omega) \tag{14}$$

Având în vedere că $Y(j\omega) = 1 / Z(j\omega)$, din relațiile (12) şi (14) se obține

$$B(\omega) = -\frac{1}{X(\omega)} \tag{15}$$

2.1 Uniporți ideali elementari

1. **Rezistența** (fig. 5.a). Impedanța uniportului este $Z(s) = R$

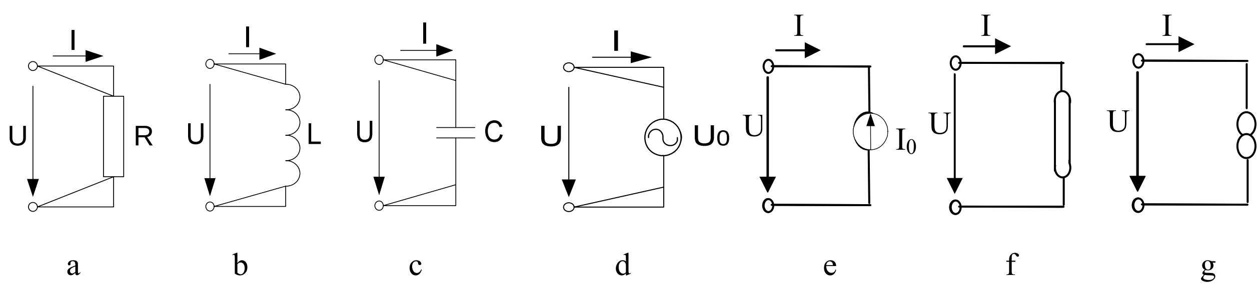

Fig. 5. Uniporți ideali elementari

2. **Inductivitatea** (fig. 5.b). Impedanța uniportului este $Z(s) = sL$.
3. **Capacitatea** (fig. 5.c), unde $Z(s) = \dfrac{1}{Cs}$.
4. **Sursa ideală de tensiune** (fig. 5.d). In mod normal, o sursă de tensiune are o rezistență internă conectată în serie. Se observă că sursa ***ideală*** de tensiune are rezistența internă egală cu zero. Deci : $U = U_0$, iar $I = \infty$ (deoarece $I = (U - U_0) / 0 = \infty$)
5. **Sursa ideală de curent** (fig. 5.e). In mod normal, o sursă de curent are o rezistență diferită de infinit, conectată în paralel. Se observă că sursa ***ideală*** de curent are această rezistență egală cu infinit. Rezultă, $I = -I_0$ şi $U = \infty$, deoarece între bornele în gol rezistența este infinită (tensiunea U este curentul I_0 inmulțit cu această rezistență).
6. **Nulatorul** (fig. 5.f), la care $U = 0; I = 0$.
7. **Noratorul** (fig. 5.g), unde $U = \infty; I = \infty$.

Nulatorul şi noratorul sunt două elemente fictive, utile în analiza teoretică a circuitelor.

2.2 Uniporți uzuali serie şi derivație

2.2.1 Uniportul LC serie (uniportul **S**) este un circuit pur reactiv, având elemente ideale în structura sa (fig. 6). Impedanța complexă este

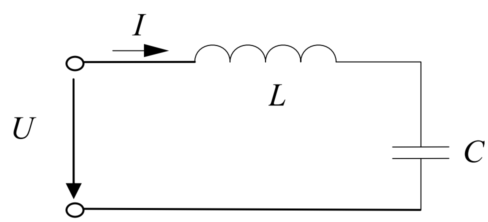

Fig. 6 Circuitul serie LC

$$Z(j\omega) = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = jL(\omega - \frac{1}{\omega LC}) = jL(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}) \quad (16)$$

unde ω_0 este pulsația de rezonanță a circuitului serie:

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad (17)$$

Relația (16) se poate pune sub forma

$$Z(j\omega) = jX(\omega) = j\frac{L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega} \quad (18)$$

de unde rezultă

$$X(\omega) = \frac{L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega} \quad (19)$$

Caracteristica $X(\omega)$ este dată în fig. 7. La pulsația ω_0, reactanța (deci şi impedanța) este zero.

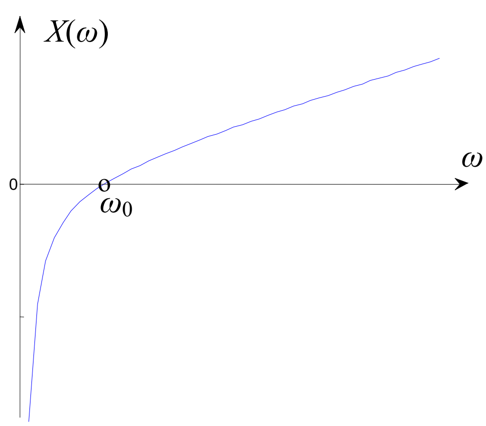

Fig. 7 Caracteristica $X(\omega)$ a circuitului serie

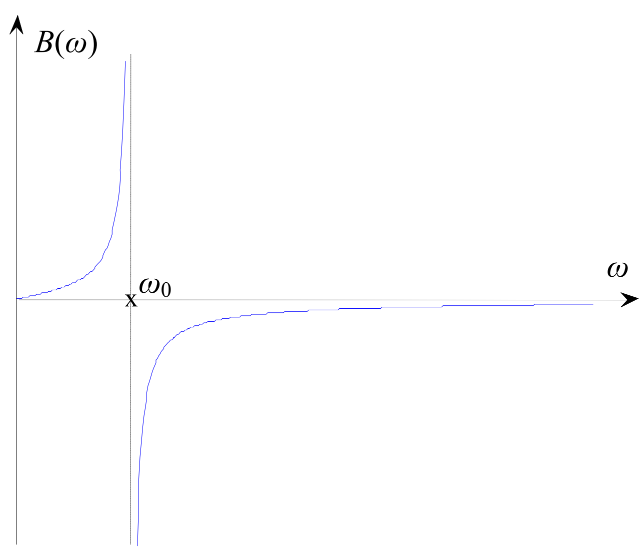

Fig. 8 Caracteristica $B(\omega)$ a circuitului serie

Susceptanța circuitului este

$$B(\omega) = -\frac{1}{X(\omega)} = \frac{\omega}{L(\omega^2 - \omega_0^2)} \quad (20)$$

Din fig. 7 se observă că, la $\omega = \omega_0$, reactanța are un zero, deci circuitul se prezintă ca un scurt circuit. La frecvența menționată, susceptanța are un pol (fig. 8).

Observație Fie cazul când se consideră şi rezistența r a bobinei (rezistența r se este, de regulă, foarte mică). Rezultă un circuit rLC, a cărei impedanță este

$$Z(s) = r + Ls + \frac{1}{Cs} \tag{21}$$

Impedanța complexă

$$Z(j\omega) = r + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = r + jL(\omega - \frac{1}{\omega LC}) = r + jL(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}) = r + j\omega_0 L\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{22}$$

se poate pune sub forma

$$Z(j\omega) = r\left[1 + jQ\beta(\omega)\right] \tag{23}$$

în care

$$Q = \frac{\omega_0 L}{r} \tag{24}$$

este *factorul de calitate* al circuitului, iar

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \tag{25}$$

este *factorul de dezacord* al circuitului. Se observă că pentru $\omega = \omega_0$, $\beta(\omega) = 0$.

Impedanța circuitului rLC este

$$|Z(\omega)| = r\sqrt{1 + Q^2\beta^2(\omega)} \tag{26}$$

Dacă circuitul rLC este alimentat de la o sursă de tensiune ideală U_0, atunci curentul în circuit este

$$I(\omega) = \frac{U_0}{r\sqrt{1 + Q^2\beta^2(\omega)}} \tag{27}$$

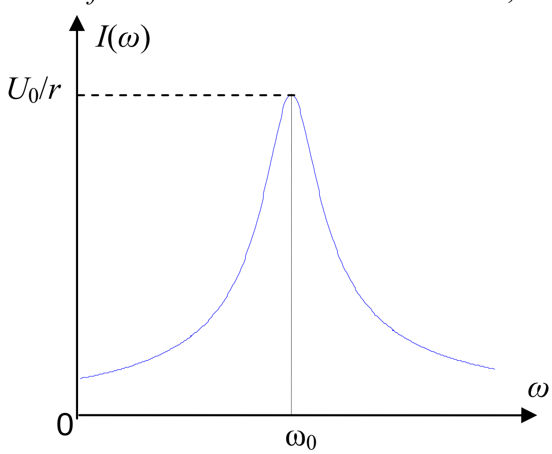

Fig. 9 Caracteristica $I(\omega)$

iar caracteristica de frecvență $I(\omega)$ are forma din fig. 9. Selectivitatea acestei caracteristici depinde de parametrul Q.

2.2.2 Uniportul LC derivație (uniportul **D**), fig. 10. Impedanța complexă este

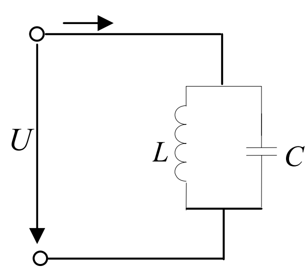

Fig. 10 Circuitul derivație LC

$$Z(j\omega) = \frac{j\omega L \frac{1}{j\omega C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega L}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{j\omega_0^2 \omega L}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{28}$$

unde ω_0 este pulsația de rezonanță a circuitului derivație :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \tag{29}$$

Rezultă :

$$X(\omega)=\frac{\omega_0^2\omega L}{\omega_0^2-\omega^2}=\frac{\omega}{C(\omega_0^2-\omega^2)} \tag{30}$$

Caracteristica reactanței *X*(*ω*) este dată în fig. 11. Se observă că la $\omega=\omega_0$, reactanța are un pol, deci circuitul derivație se prezintă ca un circuit întrerupt.

Susceptanța este

$$B(\omega)=-\frac{1}{X(\omega)}=\frac{C(\omega^2-\omega_0^2)}{\omega} \tag{31}$$

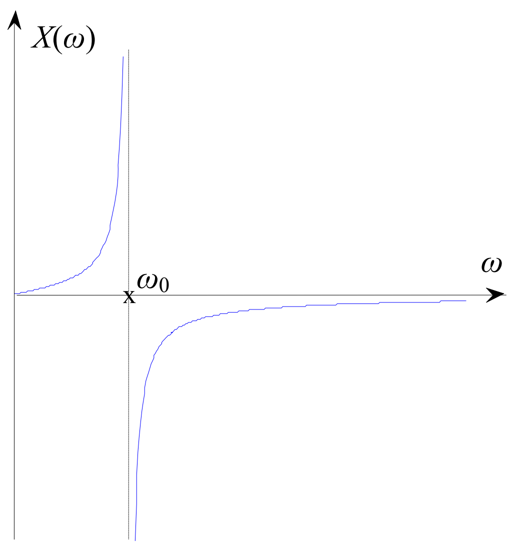

Fig. 11 Caracteristica *X*(*ω*) a circuitului derivație

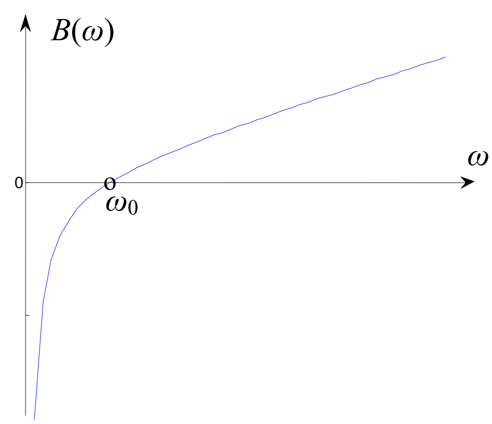

Fig. 12 Caracteristica *B*(*ω*) a circuitului derivație

deci are un zero la $\omega=\omega_0$. Caracteristica *B*(*ω*) este reprezentată în fig. 12.

Observații 1. Fie un circuit rLC derivație (fig. 13), în care rezistența *r* a bobinei se consideră foarte mică. Impedanța complexă a circuitului este

$$Z(j\omega)=\frac{(r+j\omega L)\dfrac{1}{j\omega C}}{r+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}}\approx\frac{L}{C}\frac{1}{r+j\omega L+\dfrac{1}{j\omega C}} \tag{32}$$

Expresia de la numitor se poate înlocui cu $r\left[1+jQ\beta(\omega)\right]$ (v. relațiile (22) și (23)) și se obține

$$Z(j\omega)\approx\frac{L}{C}\frac{1}{r\left[1+jQ\beta(\omega)\right]} \tag{33}$$

Caracteristica tensiunii la bornele circuitului derivație

$$U(\omega)=I_0\left|Z(\omega)\right|=I_0\frac{L}{Cr}\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\beta^2(\omega)}} \tag{34}$$

este dată în fig. 14. Ca și în cazul circuitului serie, selectivitatea circuitului depinde de parametrul *Q*.

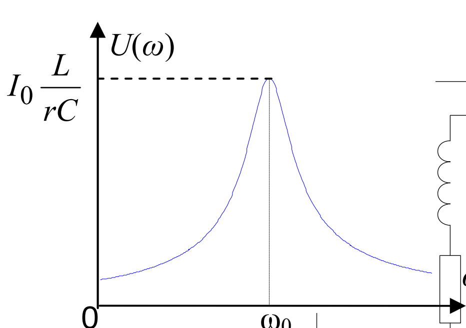

Fig. 14 Caracteristica *U*(*ω*)

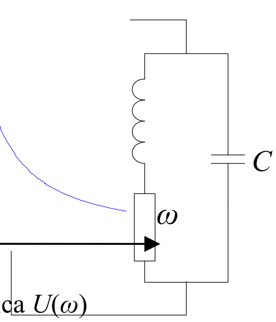

Fig. 13 Circuit derivație rLC

2. Circuitele LC serie şi derivaţie pot fi utilizate pentru realizarea funcţiunilor de cuplare şi decuplare, aşa cum se prezintă în fig. 15. Aici s-au considerat două entităţi : un generator şi o sarcină. In cazul schemelor din fig. 15.1 şi 15.b, la pulsaţia de rezonanţă, $\omega = \omega_0$, circuitul serie are impedanţă nulă, iar circuitul derivaţie are impedanţă infinită, astfel încât generatorul este cuplat la sarcină. La alte frecvenţe, legatura dintre generator şi sarcină este afectată fie de prezenţa impedanţei serie, în fig. 15.a, fie de efectul de şuntare al circuitului derivaţie, în fig. 15.b. In cazul schemelor din fig. 15.c şi 15.d, la

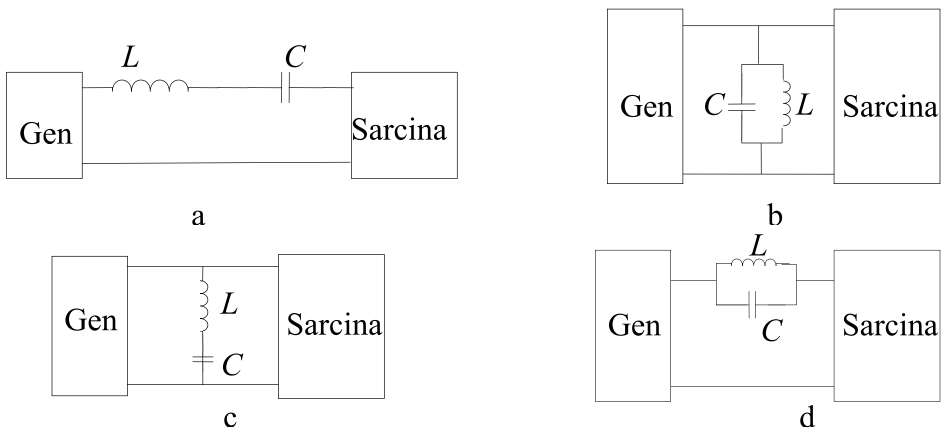

Fig 15 Funcţiuni de cuplare şi decuplare realizate prin circuite LC serie şi derivaţie

pulsaţia de rezonanţă, $\omega = \omega_0$, generatorul este decuplat de sarcină, fie prin efect de scurticircuitare, în fig. 15.c, fie prin efect de întrerupere a legăturii, în fig. 15.d.

3. Din examinarea caracteristicilor $X(\omega)$ şi $B(\omega)$ ale uniporţilor reactivi, se constată că reactanţa şi susceptanţa sunt mărimi mereu crescătoare cu pulsaţia ω. Aceasta este o proprietate generală, valabilă pentru orice tip de uniport reactiv.