CURS 10

RECAPITULARE

2.2 Analiza sistemelor cu timp discret

2.2.1 Cazul modelelor intrare-ieşire

- ***Se dau***:

a - modelul sistemului sub forma ecuațiilor în diferențe

$$y(k) = a_1 y(k-1) + \ldots + a_n y(k-n) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_n u(k-n) \tag{47}$$

b - condițiile inițiale

$$y(0),\, y(-1), \ldots, y(-n+1) \tag{48}$$

c - variabila de intrare $u(k); \quad k \geq 0$

- ***Se cere*** răspunsul $y(k)$ al sistemului.

Răspunsul sistemului este

$$y(k) = y_l(k) + y_f(k) \tag{49}$$

Pentru ***componenta liberă*** se consideră ecuația caracteristică

$$z^n - a_1 z^{n-1} - \ldots - a_{n-1} z - a_n = 0 \tag{52}$$

şi fie $z_i, i = \overline{1,n}$, rădăcinile acestei ecuații, considerate distincte. Răspunsul liber este

$$y_l(k) = \sum_{i=1}^{n} C_{li} z_i^k \tag{53}$$

Constantele $C_{li}, i = \overline{1.n}$, se obțin din condițiile inițiale (48)

Răspunsul forțat este

$$y_f(k) = \sum_{i=1}^{n} C_{fi} z_i^k + y_p(k) \tag{54}$$

unde $y_p(k)$ este o soluție particulară, de forma semnalului de intrare $u(k)$.

Răspunsul total este

$$y(k) = y_l(k) + y_f(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i^k + y_p(k) = y_t(k) + y_p(k)\ ; \quad C_i = C_{li} + C_{fi} \tag{55}$$

In expresia (55), $y_t(k)$ este ***componenta tranzitorie***,

$$y_t(k) = \sum_{i=1}^{n} C_i z_i^k \tag{56}$$

iar $y_p(k)$ este ***componenta de regim permanent***.

1.2.2 Cazul sistemelor în descriere de stare

Fie soluția ecuației de stare a unui sistem cu timp continuu, de forma (44). Dacă se consideră originea timpului la $t_0 = (k-1)T_e$, matricea fundamentală pentru timpul $t = kT_e$ este $\boldsymbol{Ц}(t-t_0) = \boldsymbol{Ц}\left[(k-1)T_e - kT_e\right] = \boldsymbol{Ц}(T_e)$ şi variabila de stare pentru timpul $t = kT_e$ se scrie înlocuind variabilele menționate în ecuația

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{Ц}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{Ц}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\,d\tau$$

Se obține

$$\boldsymbol{x}(kT_e) = \boldsymbol{Ц}(T_e)\boldsymbol{x}\left[(k-1)T_e\right] + \int_{(k\text{-}1)T_e}^{kT_e} \boldsymbol{Ц}(kT_e-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{57}$$

Vom considera la intrare un ansamblu eşantionator-extrapolator de ordinul zero (fig 2).

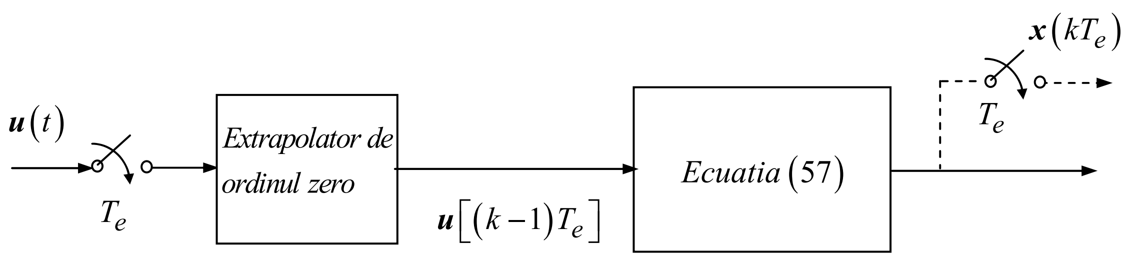

Fig. 2 Discretizarea modelului de stare

Prezența extrapolatorului de ordinul zero face ca variabila $\boldsymbol{u}(\tau)$, în intervalul de integrare $\left[(k-1)T_e, kT_e\right]$, să fie $\boldsymbol{u}\left[(k-1)T_e\right]$, adică valoarea memorată de extrapolator la momentul $t = (k-1)T_e$. Deci

$$\boldsymbol{x}(kT_e) = \boldsymbol{Ц}(T_e)\boldsymbol{x}\left[(k-1)T_e\right] + \int_{(k-1)T_e}^{kT_e} \boldsymbol{Ц}(kT_e-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\left[(k-1)T_e\right]\mathrm{d}\tau \tag{58}$$

Dacă se notează $kT_e - \tau$ prin η, rezultă dτ = - dη şi relația (58) devine

$$\boldsymbol{x}(kT_e) = \boldsymbol{Ц}(T_e)\boldsymbol{x}\left[(k-1)T_e\right] + \left[-\int_{T_e}^{0} \boldsymbol{Ц}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\left[(k-1)T_e\right] \tag{59}$$

sau

$$\boldsymbol{x}(kT_e) = \boldsymbol{Ц}(T_e)\boldsymbol{x}\left[(k-1)T_e\right] + \left[\int_{0}^{T_e} \boldsymbol{Ц}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\left[(k-1)T_e\right] \tag{60}$$

Notând

$$\boldsymbol{A}_d = \boldsymbol{Ц}(T_e) \equiv \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}T_e}; \quad \boldsymbol{B}_d = \left[\int_0^{T_e} \boldsymbol{Ц}(\eta)\,\mathrm{d}\eta\right]\boldsymbol{B} \tag{61}$$

matricele ecuației de stare şi, de asemenea, $\boldsymbol{x}(k) \equiv \boldsymbol{x}(kT_e)$; $\boldsymbol{u}(k) \equiv \boldsymbol{u}(kT_e)$; $\boldsymbol{y} = (k) \equiv \boldsymbol{y}(kT_e)$, rezultă modelul de stare cu timp discret :

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}_d \boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{B}_d \boldsymbol{u}(k-1) \tag{62}$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}_d \boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}_d \boldsymbol{u}(k) \tag{63}$$

unde $\boldsymbol{C}_d = \boldsymbol{C}$; $\boldsymbol{D}_d = \boldsymbol{D}$.

Observație. Uzual, se renunță la indicarea parametrilor modelului discret cu anumiți indici, astfel încât modelul de stare se scrie sub forma

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1) \tag{64}$$

$$\boldsymbol{y}(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(k) \tag{65}$$

însă se subînțelege faptul că matricele $\boldsymbol{A}$ şi $\boldsymbol{B}$ din (64) sunt diferite de cele din modelul cu timp continuu (sunt legate de acestea prin relațiile (61)), iar $\boldsymbol{C}$ şi $\boldsymbol{D}$ sunt aceleaşi în modelele cu timp continuu şi cu timp discret.

Calculul răspunsului sistemului utilizând reprezentarea de stare

Din ecuația (64) se poate scrie succesiv:

$$\boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(0) \tag{66}$$

$$\boldsymbol{x}(2) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(1) \tag{67}$$

$$\boldsymbol{x}(3) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(2) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(2) \tag{68}$$

$$\vdots$$

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k-1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(k-1) \tag{69}$$

Substituind (66) în (67), apoi (67) în (68) etc, se obține

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{A}^k \boldsymbol{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{A}^{k-1-i} \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i) \tag{70}$$

Intrucât $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}_d = \boldsymbol{Ц}(kT_e)$ şi utilizând proprietatea $\left[\boldsymbol{Ц}(T_e)\right]^k = \boldsymbol{Ц}(kT_e)$ a matricii fundamentale, rezultă

$$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{Ц}(kT_e); \quad \boldsymbol{A}^{k-1-i} = \boldsymbol{Ц}\left[(k-1-i)T_e\right] \tag{71}$$

şi ecuația (70) devine

$$\boldsymbol{x}(k) = \boldsymbol{Ц}(kT_e)\boldsymbol{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \boldsymbol{Ц}\left[(k-1-i)T_e\right]\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(i) = \boldsymbol{x}_l(k) + \boldsymbol{x}_f(k) \tag{72}$$

unde $\boldsymbol{x}_l(k)$ este răspunsul liber şi $\boldsymbol{x}_f(k)$ - răspunsul forțat (în raport cu variabila de stare).

Răspunsul forțat are forma unui produs de convoluție :

$$\boldsymbol{x}_f(k)=\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{Ц}\left[(k-1-i)T_e\right]\boldsymbol{Bu}(i)=\boldsymbol{G}(k)*\boldsymbol{u}(k) \tag{73}$$

unde

$$\boldsymbol{G}(k)=\boldsymbol{Ц}(kT_e)\boldsymbol{B} \tag{74}$$

Din relațiile (72) şi (65) se obține răspunsul sistemului în raport cu variabila de ieşire :

$$\boldsymbol{y}(k)=\underbrace{\boldsymbol{CЦ}(kT_e)\boldsymbol{x}_0}_{raspuns\ liber}+\underbrace{\sum_{i=0}^{k-1}\boldsymbol{CЦ}\left[(k-1-i)T_e\right]\boldsymbol{Bu}(i)+\boldsymbol{Du}(k)}_{raspuns\ \ fortat}=\boldsymbol{y}_l(k)+\boldsymbol{y}_f(k) \tag{75}$$

Componenta forțată se poate scrie sub forma :

$$\boldsymbol{y}_f(k)=\boldsymbol{C}.\boldsymbol{G}(k)*\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{Du}(k)=\boldsymbol{H}(k)*\boldsymbol{u}(k)+\boldsymbol{Du}(k) \tag{76}$$

unde $\boldsymbol{H}(k)=\boldsymbol{CG}(k)$ este matricea răspunsului la impuls al sistemului strict cauzal (fără termenul $\boldsymbol{Du}(k)$).

2.3 Utilizarea mediului Matlab pentru analiza temporală a sistemelor.

Pentru sistemele lineare cu timp continuu sau cu timp discret, determinarea răspunsului la impuls sau la treaptă se face cu funcțiile matlab `impulse` respectiv `step`. Sistemele pot fi definite cu oricare din funcțiile cunoscute: `ss`, `tf` sau `zpk`. Exemple de utilizare, pentru functia `step` (similar pentru `impulse`) :

`step(sys)` sau `t=0 :dt :tfinal ;step(sys,t)` sau `[y,t]=step(sys,t)`

***Aplicația* 1** (rezultatul în fig. 3)

```
clear all;close all;
sys=tf(1,[1 0.8 1]);
sysd=c2d(sys,0.5,'tustin');
[y,t]=step(sys);
plot(t,y,'LineWidth',1.5);hold on;
[y,t]=step(sysd)
stem(t,y);grid
```

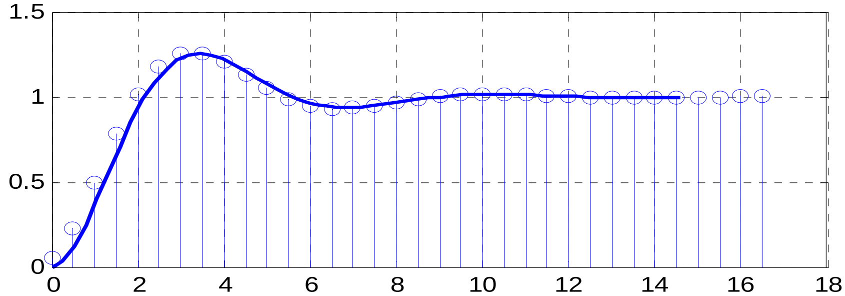

Fig. 3 Exemplu de utilizare a funcției `step`

Pentru sistemele multivariabile în descriere de stare, există şi alte posibilităţi pentru determinarea răspunsului la impuls sau la treaptă. Fie un sistem multivariabil, descris prin matricele ***A, B, C*** şi ***D***. Utilizarea funcţiei `step` pentru determinarea răspunsului la o treaptă aplicată la intrarea *J* a sistemului este :

```
[y,x]=step(A,B,C,D,J,t)
```

atunci când se impune vectorul `t` al valorilor timpului, sau

```
[y,x,t]=step(A,B,C,D,J)
```

atunci când vectorul `t` nu este specificat, ci este furnizat de funcţia `step`.

Aplicaţia 2

```
clear all;clf;
A=[0 1;-1 -2];B=[1 0;0 0.5];
C=[1 0;0 1];D=[0 0;0 0];
t=[0:0.05:6];
[y,x]=step(A,B,C,D,1,t);
[yp,xp]=step(A,B,C,D,2,t);
plot(t,y(:,1));hold on;plot(t,y(:,2));
plot(t,yp(:,1));plot(t,yp(:,2));
```

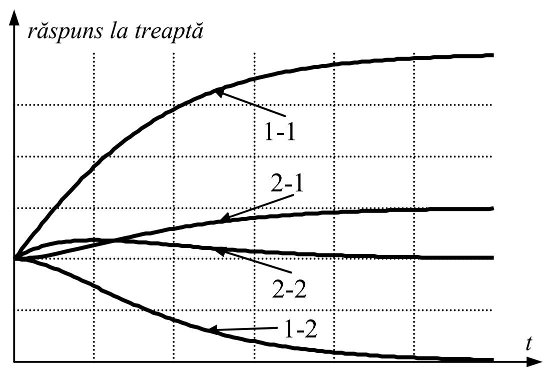

Fig. 4 Răspunsul la treaptă unitară al unui sistem multivariabil dedus cu funcţia `step`

In fig. 4 este prezentat răspunsul la treaptă unitară (răspunsul indicial) al unui sistem multivariabil, între intrarea *j* şi ieşrea *i*, (*j* – *i*; *j*=1,2; *i*=1,2).

Pentru sistemele în descriere de stare cu timp discret se utilizează, de asemenea, funcţiile d`impulse` respectiv d`step`.

Pentru analiza sistemelor liniare în raport cu ***un semnal de o formă oarecare aplicat la intrare***, se utilizează funcţia `lsim`, dacă sistemul este cu timp continuu, sau funcţia `dlsim`, dacă sistemul este cu timp discret. In toate cazurile, funcţiile menţionate oferă ***răspunsul forţat al sistemului***

Cel mai simplu procedeu de utilizare a funcţiei `lsim` este ilustrat prin exemplul următor :

```
t=[0:0.05:10];
w=[8]; u=sin(w*t);
lsim(sys,u,t)
```

unde `sys` este un sistem deja definit. Exemplul menţionat se referă la reprezentarea grafică a răspunsului `sys`, excitat de o sinusoidă de pulsaţie `w`. Cu enunţul:

```
lsim(sys1,'r',sys2,'b--`,sys3,'gx',u,t)
```

se calculează şi se reprezintă grafic, în mod diferit, răspunsurile sistemelor `sys1`, `sys2` şi `sys3`, atunci când la intările acestora se aplică acelaşi semnal, `u`.

Pentru un sistem descris în reprezentarea de stare, ale cărui condiţii iniţiale sunt nenule, este posibil să se calculeze răspunsul complet al sistemului, apelând funcţia `lsim` astfel :

`lsim(sys,u,t,x0)` sau `[y,t,x]=lsim(sys,u,t,x0)`

unde `x0` este condiţia iniţială nenulă.

Aplicaţia **3** Programul

```
clear all;close all;
A=[-2 1;-0.5 -0.6];B=[5;0];C=[1 0];D=[0]; sys=ss(A,B,C,D);
x0=[2 0]; %conditia initiala
t=[0:0.05:16];u=square(0.3*pi*t); %calculul semnalului de intrare
[y,t,x]=lsim(sys,u,t,x0); %utilizarea functiei lsim
plot(t,u);hold on;plot(t,y);grid;
```

calculează răspunsul sistemului la o succesiune de trepte, în condiții inițiale nenule. In

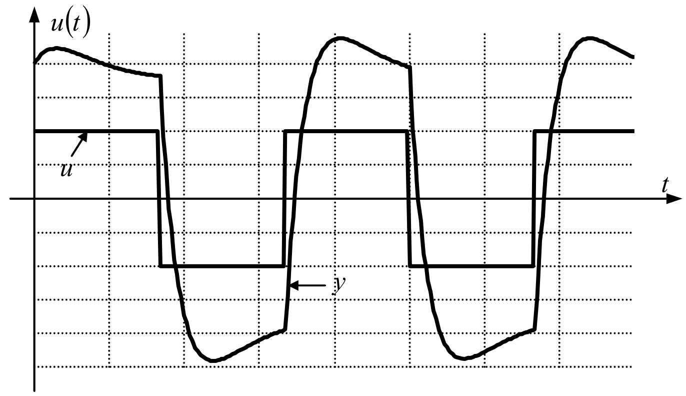

Fig. 5 Răspunsul calculat cu funcția Matlab `lsim`

fig. 5 se prezintă rezultatul obținut.

In mod similar se poate utiliza funcția `dlsim` pentru a determina răspunsul unui sistem cu timp discret.

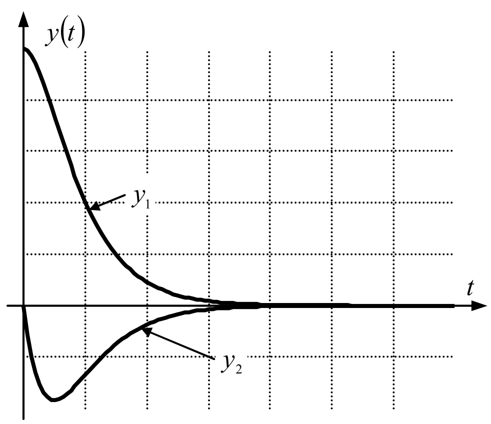

Fig. 6 Réponse libre obtenue avec la fonction Matlab `initial`

Dacă la un sistem în reprezentare de stare se cere determinarea numai a răspunsului liber, atunci se utilizează funcția `initial`, ca în exemplul următor.

***Aplicația* 4**

```
clear all;close all;
A=[0 1;-1 -2];B=[1 0;0 0.5];
C=[1 0;0 1];D=[0 0;0 0];
sys=ss(A,B,C,D); x0=[1;0];
[y,t,x]=initial(sys,x0);
plot(t,y(:,1));
hold on;plot(t,y(:,2));grid;
```

In fig 6 se prezintă răspunsul liber obținut.

Considerăm acum cazul cel mai general, când sistemul este neliniar. In acest caz, simularea numerică a sistemului (adică, analiza în domeniul temporal) se realizează prin integrarea numerică a ecuației diferențiale a sistemului, utilizând funcțiile Matlab disponibile, ca: `ode23`, `ode45`, `ode113` etc.

***Aplicația* 5**

Fie

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\left(0,2+0,1\left|\frac{dy}{dt}\right|\right)\frac{dy}{dt}+2y=5u \tag{77}$$

modelul matematic al sistemului şi $y(0)=1; \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}=0$ - condițiile inițiale.

Se adaptează modelul (77) pentru a fi adecvat integrării numerice cu o funcție Matlab. Pentru aceasta se converteşte modelul sub forma unui model de stare, astfel :

$$y \equiv x_1; \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = 5u - 2x_1 - \left(0,2+0,1|x_2|\right)x_2 \end{cases}$$

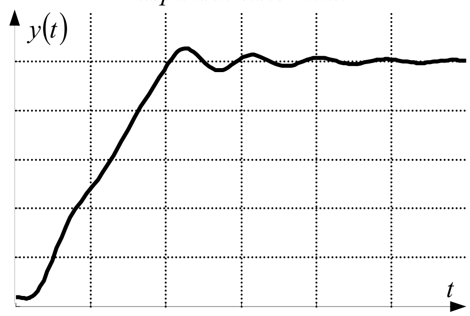

Fig. 7 Raspunsul sistemului (77), obtinut prin simulare numerică

unde $x_1(0)=1; x_2(0)$. Presupunem că la intrare se aplică un semnal în rampă, limitat la palierul $u_0=10$. Programul de simulare conține două unități:

- funcția `ed1` (dată în cele ce urmează), care calculează părțile drepte ale ecuațiilor de stare :

```
function dx=ed1(t,x)
%calculul variasbilei de intrare
if t>=10,
u=10;
else u=t;
end ;
%calculul derivatelor : dx1/dt si dx2/dt
dx=[x(2) ;5*u-2*x(1)-(0.2+0.1*abs(x(2)))*x(2)];
```

- programul principal, care realizează integrarea ecuațiilor de stare cu funcția `ode23`. Acesta este dat în cele ce urmează.:

```
t0=0;  tf=30;x0=[1;0];  %initializari:  timp  initial  şi  final; conditii initiale
[t,x]=ode23('ed1',[t0,tf],x0); %utilizarea functiei ode23
plot(t,x(:,1)); title('Raspunsul sistemului');grid;
```

In fig. 7 se prezintă răspunsul sistemului, obținut prin simulare numerică.

Un instrument informatic foarte puternic, disponibil in Matlab, care permite simularea rapidă şi convivială a sistemelor dinamice pentru timp continuu şi pentru timp discret, este SIMULINK.

***Aplicația* 6**

Fie sistemul dinamic neliniar, descris prin modelul :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u - x_1x_2 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 0.01x_2^3 \end{aligned} \tag{78}$$

cu condițiile inițiale

$$x_1(0)=10; \qquad x_2(0)=2 \tag{79}$$

Semnalul de intrare, $u(t)$, este un semnală treaptă unitară. Se cere răspunsul sistemului, obținut în Simulink

Schema SIMULINK a sistemului, construită conform modelului (78), este dată în fig. 8, unde integratoarelor li s-au fixat condițiile inițiale (79). Răspunsul sistemului este dat în fig. 9.

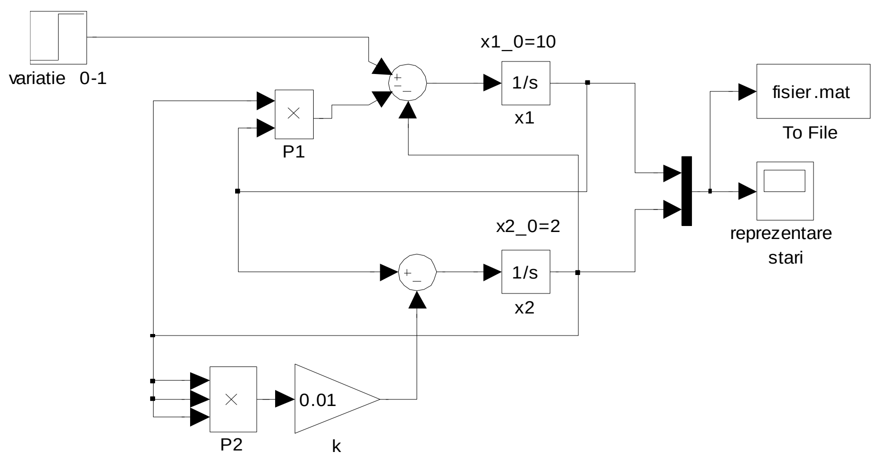

Fig. 8 Schema Simulink a sistemului (78)

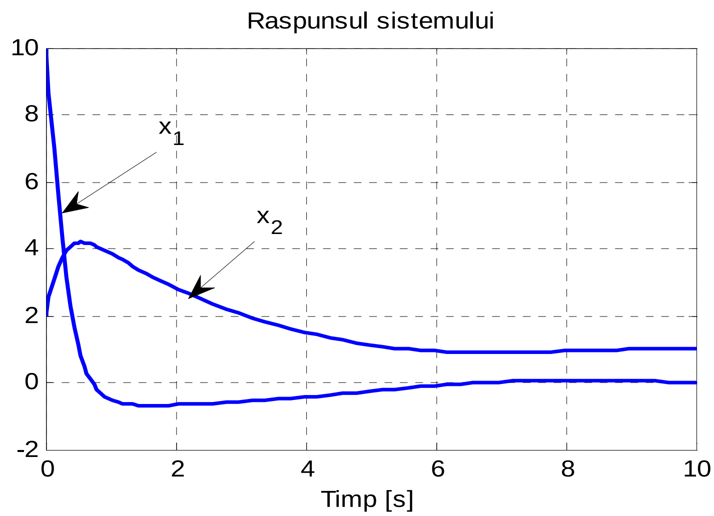

Fig. 9 Raspunsul sistemului din fig. 8

3. Analiza sistemelor prin determinarea proprietăților sintetice ale acestora

3.1 Proprietățile calitative ale sistemelor

3.1.1 Controlabilitatea şi observabilitatea sistemelor

Controlabilitatea Starea $\boldsymbol{x}(t)$ este numită controlabilă la $t = t_0$ dacă există o intrare $\boldsymbol{u}(t)$, $t \in [t_0, t_f]$, care aduce starea inițială $\boldsymbol{x}(t_0)$ intr-o stare finală $\boldsymbol{x}(t_f)$ intr-un interval de timp $t_f - t_0$ fini. Dacă toate stările $\boldsymbol{x}(t_0)$ sunt controlabile, atunci sistemul se numeşte complet controlabil. La un sistem liniar, este suficient să existe o stare controlabilă, pentru ca sistemul să fie complet controlabil (se utilizează denumirea de *sistem controlabil*).

Noțiunea de controlabilitate trebuie înțeleasă în sensul de « comandabilitate ».

Pentru ca un sistem să fie controlabil, este necesar ca matricea

$$\boldsymbol{S}=\left[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\ldots\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}\right] \tag{80}$$

numită ***matrice de controlabilitate***, să aibă rangul egal cu n (n este ordinul sistemului, adică : $\dim \boldsymbol{x}=n$).

Observabilitatea

Un sistem linear este observabil dacă pe baza valorilor mărimii de ieşire, $\boldsymbol{y}(t)$ este posibil să se determine vectorul de stare $\boldsymbol{x}(t)$, pentru $t_0 \le t \le t_f$, unde t_f este finit. De regulă se consideră $t_0=0$ şi $\boldsymbol{u}(t)=0$, $t\in\left[t_0,t_f\right]$. In acest caz, mărimea de ieşire $\boldsymbol{y}(t)$ reprezintă componenta liberă a răspunsului : $\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{C}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$. Sistemul este observabil dacă este posibil să se determine starea $\boldsymbol{x}(0)$, cunoscând ieşirea $\boldsymbol{y}(t)$, $t\in\left[t_0,t_f\right]$.

Un sistem linear este obsrvabil dacă matricea

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^2\\ \vdots\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{n-1}\end{bmatrix} \tag{81}$$

numită ***matrice de observabilitate*** are rangul egal cu n.

Observație. Fie un sistem în descriere de stare

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t)&=A\boldsymbol{x}(t)+B\boldsymbol{u}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)&=C\boldsymbol{x}(t)\end{aligned} \tag{82}$$

Acest sistem poate fi adus in forma canonica Jordan (în reprezentarea modală) prin transformarea lineară:

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{83}$$

unde $\boldsymbol{P}$ este matricea care are drept coloane valorile proprii ale matricii $\underline{\boldsymbol{A}}$. Prin această transformare, modelul de stare devine

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}&=\tilde{\boldsymbol{A}}\tilde{\boldsymbol{x}}+\tilde{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y}&=\tilde{\boldsymbol{C}}\tilde{\boldsymbol{x}}\end{aligned} \tag{84}$$

unde

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}(s_1.....s_n),\quad \tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B};\quad \tilde{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{P} \tag{85}$$

Dacă o linie a matricii $\tilde{\boldsymbol{B}}$ este formată numai din zerouri, atunci variabila de stare corespunzătoare liniei respective nu este afectată de variabilele de intrare, deci este necontrolabilă. Dacă o coloană a matricei $\tilde{\boldsymbol{C}}$ nu conține decât zerouri, atunci există o variabila de stare care nu are nici un efect asupra ieşirii, deci starea respectivă este neobservabilă.

Deci, un sistem linear este controlabil şi observabil dacă liniile de la matricea $\tilde{\boldsymbol{B}}$ ***şi coloanele de la matricea*** $\tilde{\boldsymbol{C}}$ ***nu au toate elementele egale cu zero.***

Ilustrarea acestui criteriu (criteriul modal de controlabilitate şi de observabilitate) este dat in fig. 10. Aici este dată schema modală a unui sistem monovariabil de ordinul 4, unde :

$$\tilde{\boldsymbol{B}} = \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \\ \tilde{b}_4 \end{vmatrix}; \quad \tilde{\boldsymbol{C}} = \tilde{\boldsymbol{c}}^T = \left[\tilde{c}_1\ \tilde{c}_2\ \tilde{c}_3\ \tilde{c}_4\right] \tag{86}$$

Deoarece $\tilde{b}_3 = 0, \tilde{b}_4 = 0$ sistemul este necontrolabil (stările $\tilde{x}_3$ si $\tilde{x}_4$ nu sunt

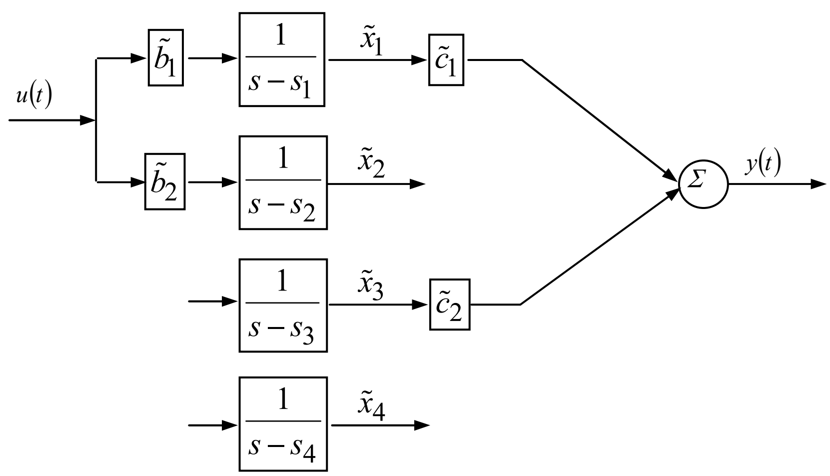

Fig. 10 Descompunerea unui sistem după criteriul modal de controlabilitate şi observabilitate

controlabile). Sistemul este, de asemenea, neobservabil, deoarece $\tilde{c}_2 = 0 \ \ \tilde{c}_4 = 0$ (stările $\tilde{x}_2$ si $\tilde{x}_4$ nu sunt observabile).

Din cele 4 subsisteme de ordinul 1, având variabilele de stare $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ si $\tilde{x}_4$, primul este controlabil si observabil ($\tilde{x}_1$); al doilea este controlabil şi neobservabil ($\tilde{x}_2$) ; al treilea este necontrolabil şi observabil ($\tilde{x}_3$); ultimul este necontrolabil şi neobservabil ($\tilde{x}_4$).

Verificarea în Matlab a controlabilităţii şi observabilităţii de face cu funcţiile `ctrb` şi `obsv`, care furnizează matricele de controlabilitate şi de observabilitate, ca în exemplul următor:

```
A=[-1 0.1;-0.5 -2];B=[1;-0.5];C=[1 1];D=[0]; sys=ss(A,B,C,D);
cont=ctrb(sys);rangc=rank(cont); obs=obsv(sys);rango=rank(obs);
                rangc =                        rango =
               2                                      2
```

3.1.2 Stabilitatea sistemelor lineare

Noţiunea de stabilitate are o importanţă deosebită în teoria sistemelor. Intuitiv, se consideră că un sistem este stabil dacă, după o acţiune externă de tip impuls, care modifică starea sistemului faţă de starea iniţială staţionară, sistemul revine spontan la starea iniţială.

Există două noţiuni în stabilitatea sistemelor :

a - noţiunea de ***stabilitate internă***, care este definită în raport cu variabila de stare $\boldsymbol{x}(t)$. Aceasta se mai numeşte ***stabilitate asimptotică***;

b - noţiunea de ***stabilitate externă***, definită în raport cu variabila de $y(t)$. Aceasta se mai numeşte ***stabilitate în sensul intrare mărginită – ieşire mărginită*** (***IMEM***).

3.1.2.1 Stabilitatea asimptotică (stabilitatea internă)

Fie un sistem descris printr-un model de stare. Se spune că starea $\boldsymbol{x}_0$ este o ***stare de echilibru***, dacă $\dot{\boldsymbol{x}}_0 = 0$. Pornind dintr-o starea de echilibru în care se găseşte sistemul, fie aceasta $\boldsymbol{x}_0 = 0$, se imprimă la $t = 0$ un ecart $\Delta\boldsymbol{x}$ stării sistemului. Se obţine starea $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + Д\boldsymbol{x} = Д\boldsymbol{x}$. Sistemul va fi stabil dacă starea revine asimptotic la cea iniţială, adică

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0 = 0 \tag{87}$$

Variaţia $\boldsymbol{x}(t)$ este răspunsul liber al sistemului, care are expresia

$$\boldsymbol{x}_l(t) = \boldsymbol{Ц}(t)\Delta\boldsymbol{x} \tag{88}$$

Dacă modelul de stare este pus sub forma canonică Jordan şi dacă valorile proprii ale matricii $\boldsymbol{A}$ sunt distincte, $\lambda_i \equiv s_i, i = \overline{1,n}$, expresia răspunsului liber este

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_l(t) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{s_1 t},\dots,\mathrm{e}^{s_n t}\right)\Delta\tilde{\boldsymbol{x}} \tag{89}$$

Condiţia de stabilitate asimptotică

$$\lim_{t\to\infty} \tilde{\boldsymbol{x}}_l(t) = \lim_{t\to\infty} \mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{s_1 t},\dots,\mathrm{e}^{s_n t}\right)\Delta\tilde{\boldsymbol{x}} = 0 \tag{90}$$

este verificată numai dacă $s_i < 0, i = \overline{1,n}$, deoarece $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{s_i t} = 0$ pentru $s_i < 0$.

Deci, un sistem este asimptotic stabil sau intern sabil dacă

$$Л(\boldsymbol{A}) \subset C^{-} \tag{91}$$

unde C^{-} este semplanul stâng al planului complex, iar $Л(\boldsymbol{A})$ este spectrul matricei $\boldsymbol{A}$ (adică, mulţimea valorilor proprii). Relaţia (91) exprimă condiţia următoare: toate valorile proprii ale matricei $\boldsymbol{A}$ trebuie să aibă partea reală negativă.

Observaţie Funcţia Matlab prin care se determină valorile proprii ale unei matrice este `eig` (exemplu: `eig(A)`)

3.1.2.1 Stabilitatea *în sens intrare mărginită – ieşire mărginită* (*IMEM*)

A ***Condiţia fundamentală de stabilitate***

Cazul sistemelor cu timp continuu

Un sistem este stabil în sens IMEM când pentru orice semnal de intrare mărginit, rezultă un semnal de ieşire mărginit.

Fie $u(t)$ semnalul de intrare mărginit al unui sistem monovariabil, adică

$$|u(t)| \le M_1 < \infty \tag{92}$$

In condiţii iniţiale nule, semnalul de ieşire $y(t)$ este

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{93}$$

Modulul semnalului de ieşire este

$$|y(t)| = \left|\int_0^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right| \le \int_0^{\infty} |h(\tau)|\cdot|u(t-\tau)|\,\mathrm{d}\tau \le M_1 \int_0^{\infty} |h(\tau)|\mathrm{d}\tau$$

Mărimea $|y(t)|$ este mărginită, adică $|y(t)| < \infty$, dacă

$$\int_0^{\infty} |h(\tau)|\,\mathrm{d}\tau < \infty \tag{94}$$

Relaţia (94) este valabilă dacă răspunsul la impuls tinde spre zero :

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0 \tag{95}$$

Ilustrarea răspunsurilor la impuls care corespund unor sisteme stabile şi instabile este dată în fig. 11 (1,2 – sisteme stabile ; 3,4 – sisteme instabile ; 5 – sistem instabil, însă la limita de stabilitate).

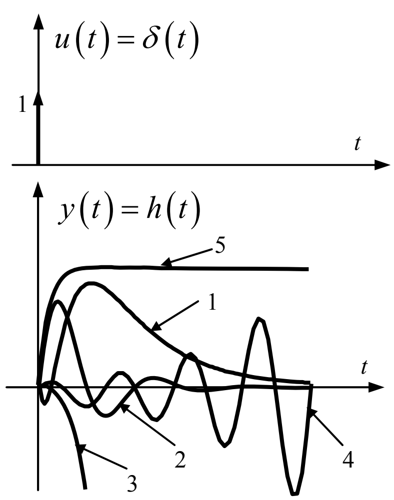

Fig. 11 Răspunsuri la impuls pentru sisteme stabile şi instabile

Pentru a dezvolta condiţia (95), vom examina expresia componentei forţate a răspunsului la impuls. In general, expresia componentei forţate a răspunsului unui sistem este :

$$y_f(t)=\sum_{i=0}^{n1}C_{fi}\mathrm{e}^{s_i t}+\sum_{i=1}^{n2}A_{fi}\mathrm{e}^{\alpha_i t}\sin\left(\omega_i t+\phi_{fi}\right)+y_p(t) \tag{96}$$

Atunci când $u(t)=\delta(t)$, componenta de regim permanent este zero, $y_p(t)=0$, deci

$$y_f(t)\equiv h(t)=\sum_{i=1}^{n_1}C_{fi}\mathrm{e}^{s_i t}+\sum_{i=1}^{n_2}A_{fi}\mathrm{e}^{\alpha_i t}\sin\left(\omega_1 t+\phi_{fi}\right) \tag{97}$$

Din această relație se vede că, dacă $s_i<0, i=\overline{1,n_1}$ şi $\alpha_i<0, i=\overline{1,n_2}$, avem : $\lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{s_i t}=0,\ \lim\limits_{t\to\infty}\mathrm{e}^{\alpha_i t}=0$ şi condiția (95) este verificată. Deci, sistemul este stabil dacă rădăcinile ecuației caracteristice, adică polii funcției de transfer, au partea reală negativă, sau – altfel spus – ***rădăcinile sunt situate în semiplanul stâng al planului complex*** (fig. 12):

$$\left\{s_i,\ i=\overline{1,n}\right\}\subset C^- \tag{98}$$

unde $\left\{s_i,\ i=\overline{1,n}\right\}$ este mulțimea polilor funcției de transfer.

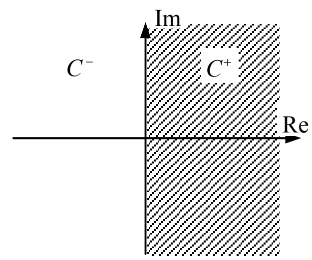

Fig. 12 Domaine C^- (non-hachuré) des pôles d'un système stable

***Observații* 1.** Răspunsul liber $y_l(t)$ al sistemului are expresia:

$$y_l(t)=\sum_{i=0}^{n1}C_{li}\mathrm{e}^{s_i t}+\sum_{i=1}^{n2}A_{li}\mathrm{e}^{\alpha_i t}\sin\left(\omega_i t+\phi_{li}\right) \tag{99}$$

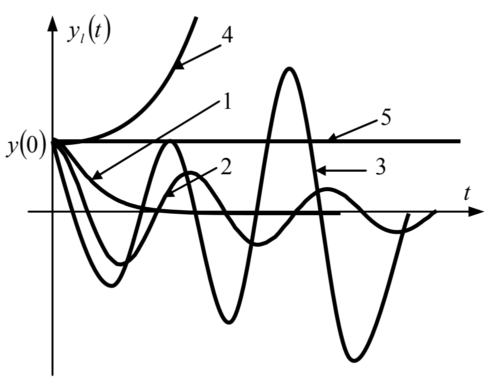

Fig. 13 Réponses libres qui correspondent aux systèmes stables et instables

Observăm că acest răspuns are o formă similară cu cel al răspunsului la impuls (97). Deci, condiția (95) implică

$$\lim_{t\to\infty}y_l(t)=0 \tag{100}$$

Ilustrarea răspunsurilor libere care corespund unor sisteme stabile şi instabile, este dată în fig. 13 (1,2- sisteme stabile; 3,4- sisteme instabile ; 5- sistem instabil, dar la limita de stabilitate).

In concluzie, stabilitatea în sens IMEM poate fi definită fie prin relația (95), fie prin relația (100).

2. ***Verificarea în Matlab*** a condiției (98), se face prin utilizarea funcția `roots`, pentru rezolvarea ecuației caracteristice. De exemplu, dacă ecuația caracteristică are forma

$$s^5+9.8s^4+28.95s^3+33.85s^2+27.35s+8.25=0$$

rezolvarea ei se face astfel :

```
roots([1 9.8 28.95 33.85 27.35 8.25])
```

cu rezultatul :

```
   -5.5000
   -3.0000
-0.4000 + 0.9165i
-0.4000 - 0.9165i
   -0.5000
```

3. ***Rezerva de stabilitate*** a sistemului este dată de distanţa minimă dintre polii funcţiei de transfer şi axa imaginară. Dacă un pol se află pe exa imaginară (de exemplu, în origine), sistemul este instabil, însă la limita de stabilitate.

Cazul sistemelor cu timp discret

Ca şi în cazul sistemelor cu timp continuu, stabilitatea în sens IMEM a sistemelor cu timp discret este definită prin condiţia

$$\lim_{k\to\infty} h(k) = 0 \tag{101}$$

sau prin condiţia

$$\lim_{k\to\infty} y_l(k) = 0 \tag{102}$$

Fie $z_i; i=\overline{1,n}$ polii funcţiei de transfer, $H(z)$, a sistemului, consideraţi ca fiind distincţi. Răspunsul liber şi răspunsul la impuls au expresiile:

$$y_l(k) = \sum_{i=1}^{n} C_{li} z_i^k \tag{103}$$

respectiv

$$h(k) = \sum_{i=1}^{n} C_{fi} z_i^k \tag{104}$$

Condiţiile (101) şi (102) sunt îndeplinite dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice $z_i; i=\overline{1,n}$, au modulul strict mai mic decât unitatea:

$$|z_i| < 1; i=\overline{1,n} \tag{105}$$

Deci, condiţia fundamentală de stabilitate, în sens IMEM, a unui sistem cu timp discret este ca ***toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice să fie conţinute în interiorul cercului unitar.***