

## CURS 7 Recapitulare

### 4 Conversia: funcție de transfer – ecuație de stare în formă canonică

#### 4.1 Reprezentări canonice

Fie sistemul monovariabil cauzal de ordinul  $n$ , descris prin funcția de transfer:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (14)$$

Aici intervin  $2n$  parametri:  $a_{n-1}, \dots, a_0; b_{n-1}, \dots, b_0$ . Într-un model de stare al sistemului strict cauzal, de forma,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad ; \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (16)$$

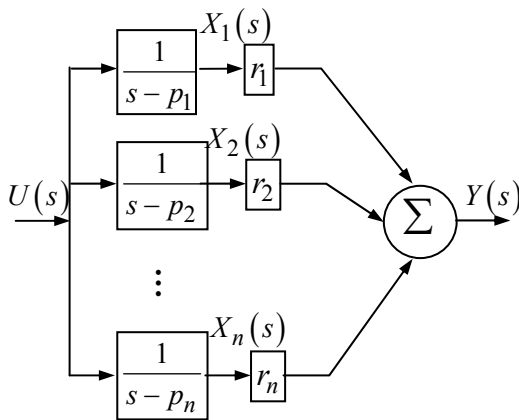
matricea  $\mathbf{A}$  este de dimensiune  $n \times n$ ,  $\mathbf{b}$  și  $\mathbf{c}$  sunt vectori coloana  $n$ -dimensionali, deci pot interveni  $(n^2 + 2n)$  parametri. *Se pune problema reprezentării modelului de stare într-o formă în care numărul de parametri este  $2n$ , ca și în cazul funcției de transfer.* Aceasta se numește **formă canonică** a modelului de stare.

#### 4.2. Reprezentări canonice pentru sisteme cu timp continuu

##### 4.2.1. Reprezentarea modală a sistemului (forma canonică Jordan).

Fie  $H(s)$  funcția de transfer (14) și  $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = 0$  ecuația caracteristică

*Cazul când rădăcinile ecuației caracteristice sunt distincte și reale.*

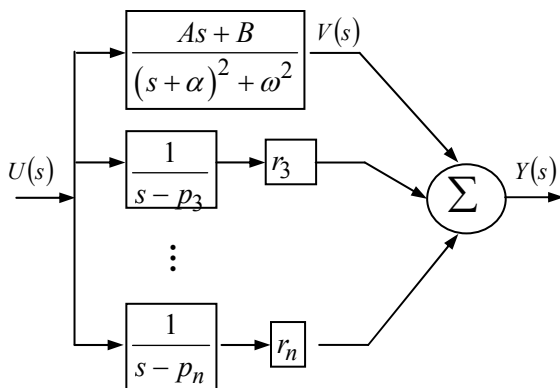


**Fig. 12** Descompunerea modală a unui sistem cu poli distincți și reali

$$H(s) = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{s - p_k} \quad (19)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u ;$$

$$y = [r_1 \ r_2 \ \dots \ r_n] \mathbf{x}$$



**Fig. 14** Descompunerea modală a unui sistem cu poli complecși conjugați

*Cazul când polii distincți ai sistemului pot fi și complecși conjugați, de exemplu :*

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

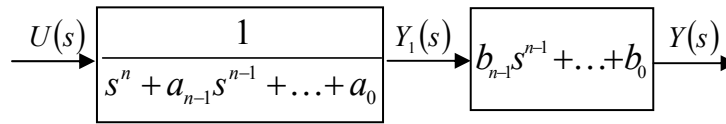
$$\frac{r_1}{s - (\alpha + j\omega)} \text{ și } \frac{r_2}{s - (\alpha - j\omega)} \text{ din } H(s)$$

se înlocuiesc cu un subsistem de ordinul 2 :

$$\frac{As + B}{(s - \alpha)^2 + \omega^2}$$

#### 4.2.2.Reprezentarea sistemului în forma canonică controlabilă.

Sistemul cu funcția de transfer (14) se structurează ca în fig. 17. Pentru primul bloc din această schemă se poate scrie



**Fig. 17** Descompunerea sistemului (14)

$$s^n Y_1(s) = U(s) - a_0 Y_1(s) - a_1 s Y_1(s) - \dots - a_{n-1} s^{n-1} Y_1(s) \quad (32)$$

Notând  $X_1(s) = Y_1(s)$  (33)

[illegible]

ecuația (4.78) devine

$$sX_n(s) = U(s) - a_0X_1(s) - a_1X_2(s) - \dots - a_{n-1}X_n(s) \quad (35)$$

Pentru cel de al doilea bloc din fig. 17 se poate scrie :

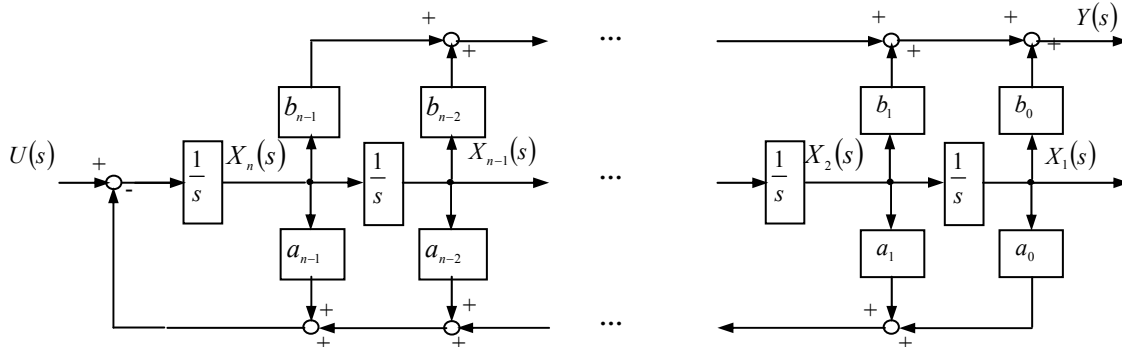
$$Y(s) = b_0 Y_1(s) + b_1 s Y_1(s) + \dots + b_{n-1} s^{n-1} Y_1(s) \quad (36)$$

sau, cu notațiile (33) și (34),

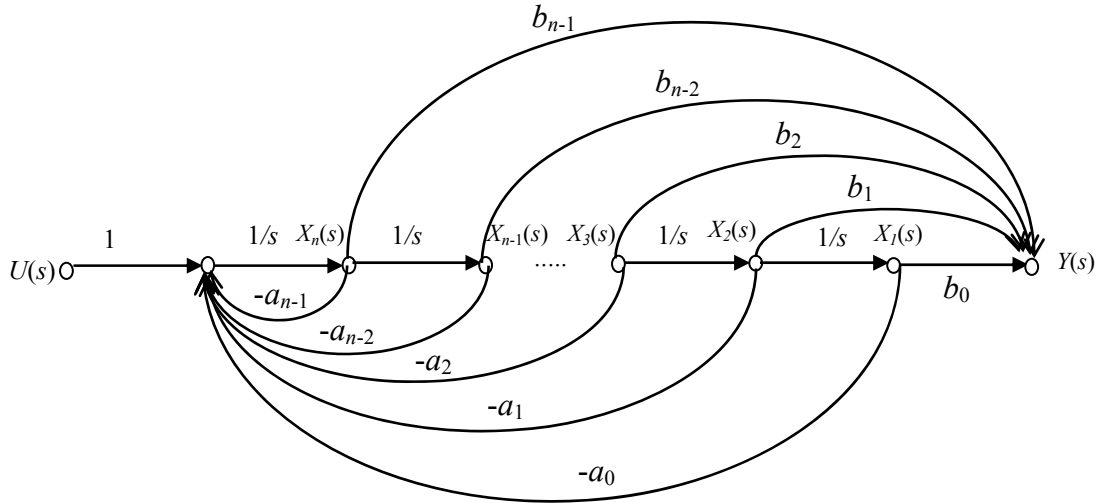
$$Y(s) = b_0 X_1(s) + b_1 X_2(s) + \dots + b_{n-1} X_n(s) \quad (37)$$

Relațiile (33) - (37) permit reprezentarea sistemului sub forma schemei bloc din fig. 18. Această schemă arată o modalitate de realizare a unui sistem electronic cu timp continuu, utilizând integratoare și sumatoare.

Acestei scheme îi corespunde graful de semnal din fig. 19. Se constată ca pe calea directă, care pleacă din nodul « sursă » și ajunge în nodul « sarcină », sunt situate toate



nodurile cărora li s-au asociat variabile de stare. Deci, indiferent de parametrii care definesc transferul celorlalte arce, altele decât cele de pe calea directă, semnalul aferent nodului sursă va modifica (va comanda) toate variabilele de stare. Din acest motiv, această reprezentare canonică se numește *controlabilă*.



**Fig. 19** Graful de semnal pentru forma canonică controlabilă.

Transferând în domeniul « timp » relațiile (4.79) - (4.83), rezultă ecuațiile de stare și de ieșire ale sistemului :

$$\begin{cases} \dot{x}_i = x_{i+1} ; i = \overline{1, n-1} \\ \dot{x}_n = u - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \dots - a_{n-1} x_n \end{cases} \quad (38)$$

$$y = b_0 x_1 + b_1 x_2 + \dots + b_{n-1} x_n \quad (39)$$

sau, sub formă matriceală,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (40)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} = [b_0 \quad b_1 \quad \dots \quad b_{n-1}] \mathbf{x} \quad (41)$$

Parametrii care intervin în modelul de stare sunt :

$$\mathbf{A} = \left[ \begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & & \\ \hline -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{array} \right] ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Deoarece matricea  $A$  obținută conține coeficienții polinomului caracteristic (numitorul funcției de transfer  $H(s)$ ), ea se numește matrice *companion*. În forma în care intervine în reprezentarea canonică controlabilă, ea poartă denumirea de matrice *companion controlabilă*

#### 4.2.3.Reprezentarea sistemului în forma canonică observabilă.

Relația

$$s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \dots + a_0 Y(s) = b_{n-1} s^{n-1} U(s) + \dots + b_0 U(s), \quad (43)$$

obținută din (4.70), poate fi pusă sub forma :

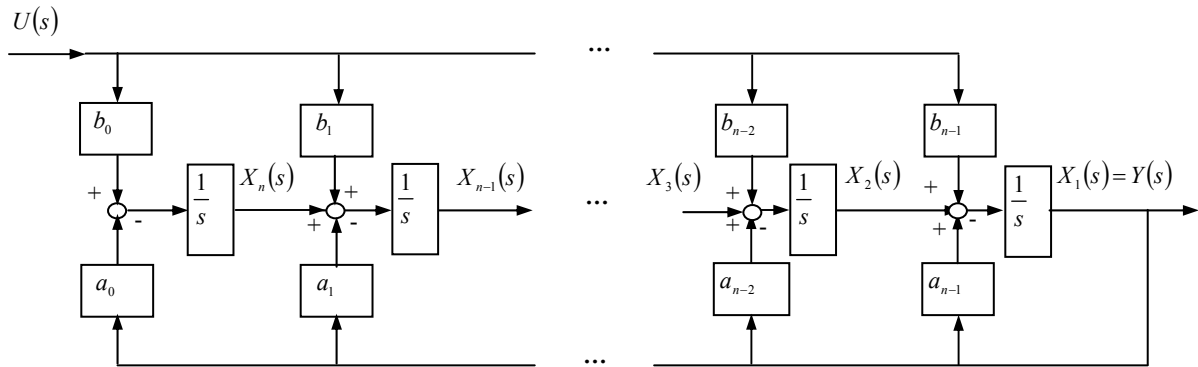
$$Y(s) = \frac{1}{s} \left( b_{n-1} U(s) - a_{n-1} Y(s) + \frac{1}{s} \left( b_{n-2} U(s) - a_{n-2} Y(s) + \frac{1}{s} \left( \dots + \frac{1}{s} (b_0 U(s) - a_0 Y(s)) \dots \right) \right) \right) \quad (44)$$

Utilizând notațiile

$$Y(s) = X_1(s) \quad (45)$$

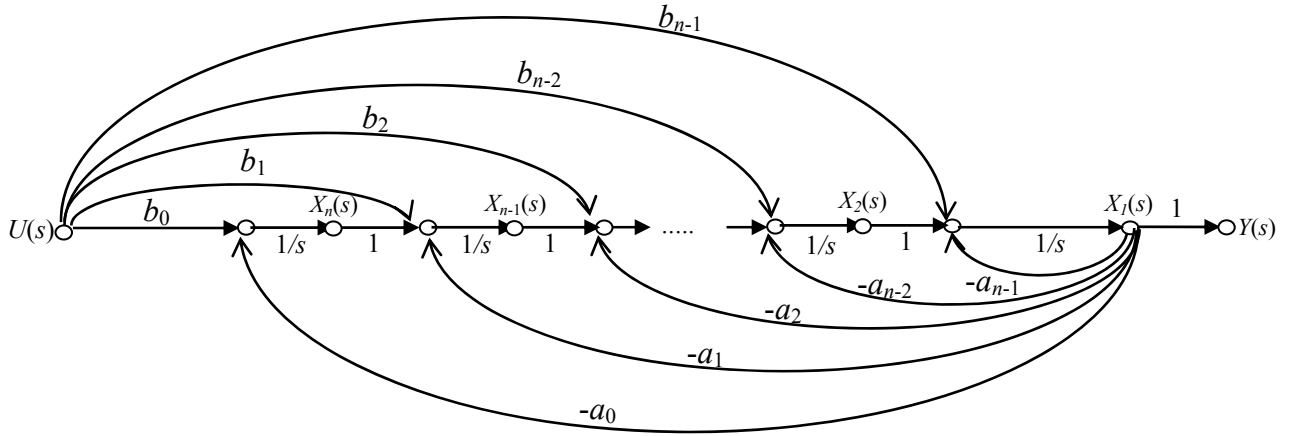
$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{s} (b_{n-1} U(s) - a_{n-1} X_1(s) + X_2(s)) \\ X_2(s) = \frac{1}{s} (b_{n-2} U(s) - a_{n-2} X_1(s) + X_3(s)) \\ \vdots \\ X_n(s) = \frac{1}{s} (b_0 U(s) - a_0 X_1(s)) \end{cases} \quad (46)$$

sistemul poate fi reprezentat prin schema bloc din fig. 20. Acestei scheme îi corespunde



**Fig. 20** Schema funcțională corespunzătoare formei canonice observabile

graful de semnal din fig. 19.



**Fig. 21** Graful de semnal pentru forma canonică observabilă

Pe baza relațiilor (45) și (46) se obțin următoarele ecuațiile de stare și de ieșire :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = b_{n-1}u - a_{n-1}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = b_{n-2}u - a_{n-2}x_1 + x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n = b_0u - a_0x_1 \end{cases} ; \quad (47)$$

$$y = x_1 \quad (48)$$

Parametrii matriceali din modelul de stare al sistemului sunt :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{n-2} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} ; \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} ; \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

Din graful de semnal prezentat în fig. 21, se constată că semnalul de ieșire se obține prin aportul tuturor variabilelor de stare care se află pe calea directă, situată între nodul  $X_n(s)$  și nodul « sarcină ». Întrucât indiferent de parametrii ce definesc transferul celorlalte arce, care nu sunt pe această cale directă, semnalul aferent nodului « sarcină » va conține aportul tuturor variabilele de stare, această reprezentare canonică se numește *observabilă*, iar forma companion a matricii  $\mathbf{A}$  se numește *companion observabilă*.

### 4.3. Reprezentări structurale pentru sisteme cu timp discret

Toate reprezentările menționate pentru sistemele cu timp continuu (reprezentarea modală, formele canonice controlabile și observabile) pot fi adaptate și pentru sistemele cu timp discret.

#### 4.3.1 Reprezentări structurale pentru sisteme de tip FIR

Alături de structura IIR, specifică sistemelor cu timp continuu, sistemele cu timp discret pot avea o structură distinctă, fără corespondent în domeniul sistemelor cu timp continuu, și anume: structura de sistem FIR. Funcția de transfer a unui sistem FIR are forma generală

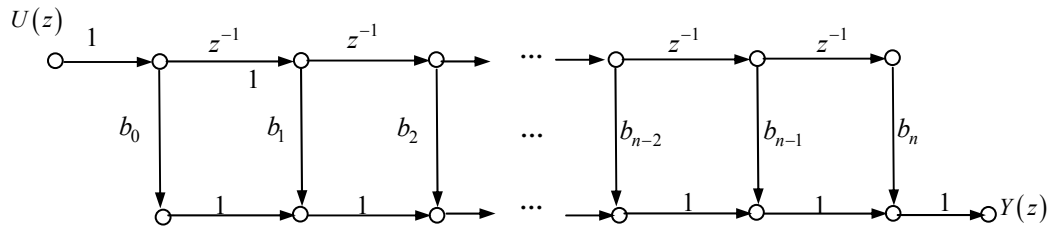
$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_n z^{-n} \quad (50)$$

Pe baza relației

$$Y(z) = H(z) \cdot U(z) = h_0 U(z) + h_1 z^{-1} U(z) + h_2 z^{-2} U(z) + \dots + h_n z^{-n} U(z) \quad (51)$$

și utilizând notațiile

$$h_i = b_i, \quad i = \overline{0, n} \quad (52)$$

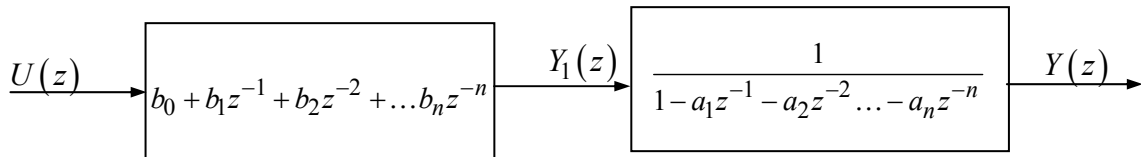


**Fig. 22** Graful de semnal pentru un sistem cu timp discret având structură nerecursivă.

sistemul FIR se poate reprezenta prin graful de semnal dat în fig. 22. Se observă **structura nerecursivă** a acestui graf, toate arcele fiind pe o cale deschisă care leagă nodul sursă de nodul sarcină. Un sistem nerecursiv cu structura din fig. 22 este numit adesea « filtru transversal ».

#### 4.3.2 Reprezentări structurale pentru sisteme de tip IIR

Un sistem numeric oarecare, la limită causal, poate fi structurat sub forma unei conexiuni serie a unui subsistem FIR și a unui subsistem IIR, ca în fig. 23. Pentru



**Fig. 23** Descompunerea unui sistem cu timp discret într-un subsistem nerecursiv și un sistem recursiv

primul sistem se poate scrie

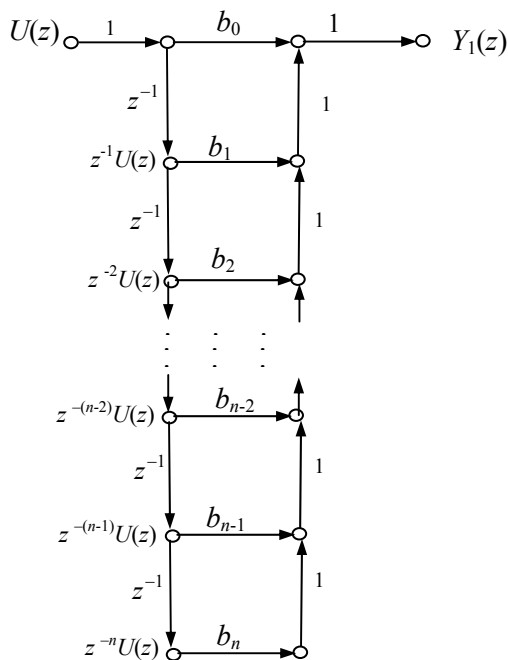
$$Y_1(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + b_2 z^{-2} U(z) + \dots + b_n z^{-n} U(z) \quad (53)$$

și rezultă structura nerecursivă reprezentată prin graful din fig. 24.

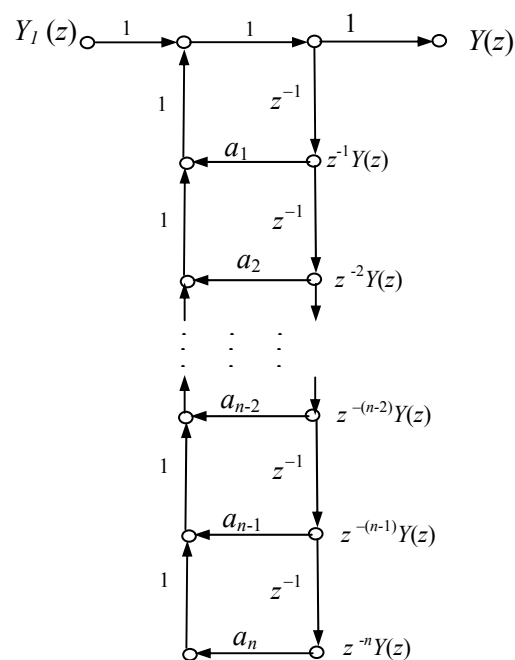
Pentru subsistemul IIR se poate scrie

$$Y(z) = Y_1(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + a_2 z^{-2} Y(z) + \dots + a_n z^{-n} Y(z) \quad (54)$$

și rezultă graful din fig. 25. Se observă faptul că în acest graf există  $n$  legături de la ieșire spre intrare, prin parametrii  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Aceste legături dau caracterul de **structură recursivă** pentru subsistemul IIR.

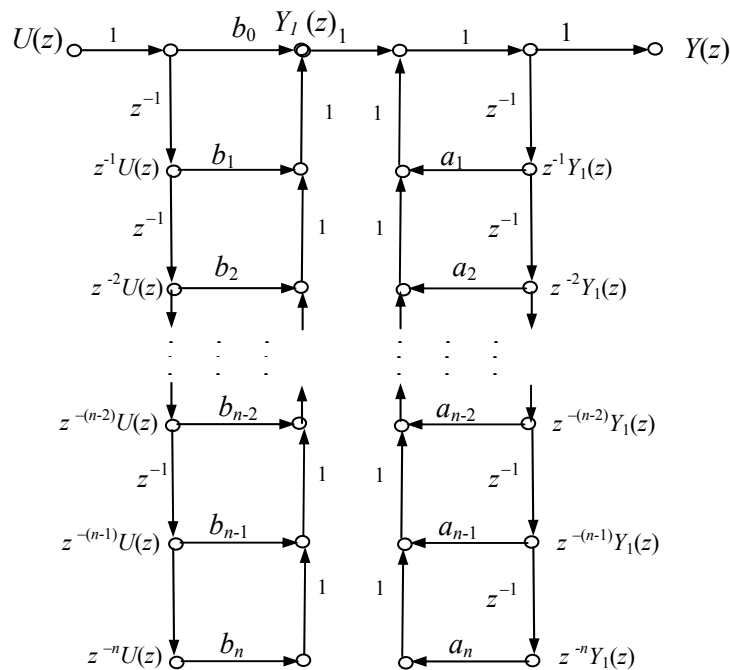


**Fig. 24** Graful de semnal pentru subsistemul cu structură nerecursivă



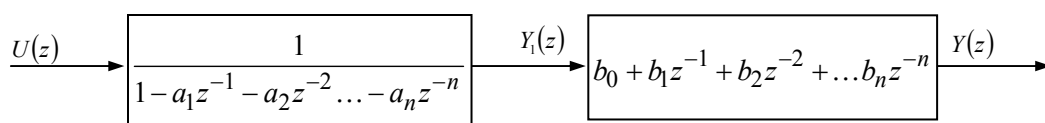
**Fig. 25** Graful de semnal pentru subsistemul cu structură recursivă

Conectarea subsistemelor FIR și IIR, conform schemei din fig. 23, ne conduce la structura ilustrată prin graful din fig. 26. Aceasta structură este complicată și poate fi

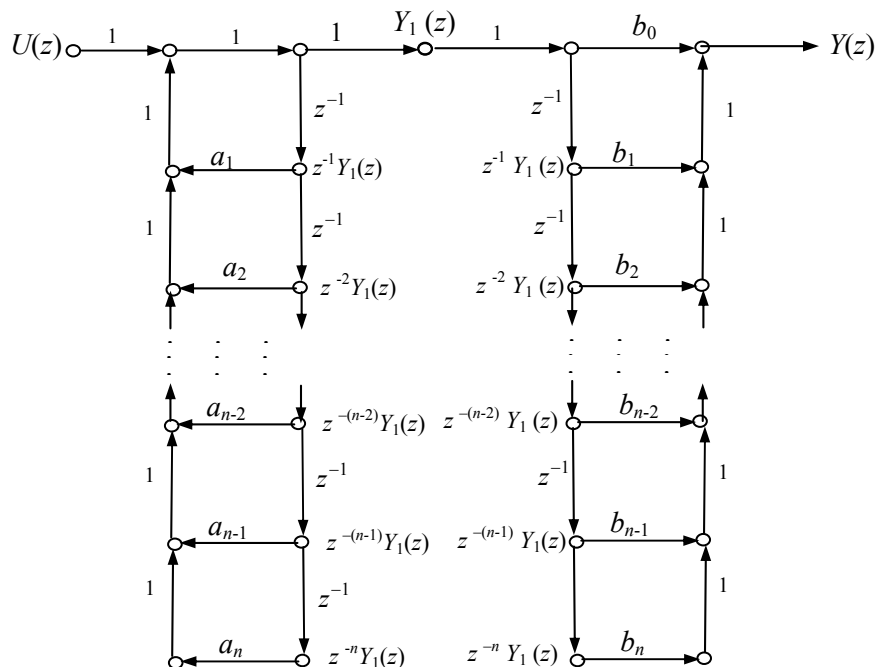


**Fig. 26** Graful de semnal corespunzător descomunerii din fig. 23 a sistemului

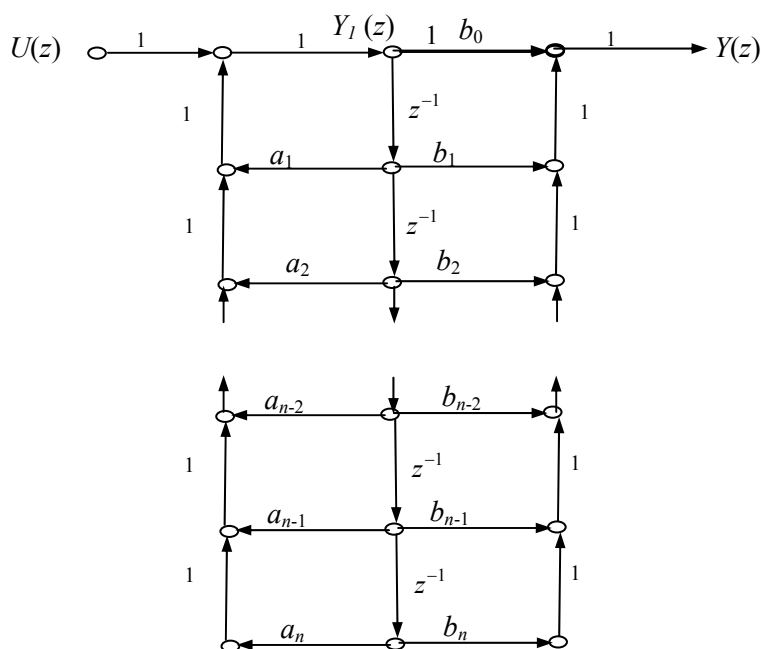
înlocuită cu o structură mai compactă, dacă se renunță la descompunerea din fig. 23. Vom considera acum că se inversează cele două subsisteme : întâi subsistemul IIR, apoi



**Fig. 27** Descompunerea unui sistem cu timp discret într-un subsistem recursiv și un sistem nerecursiv



**Fig. 28** Graful de semnal corespunzător descomunerii din fig. 27 a sistemului

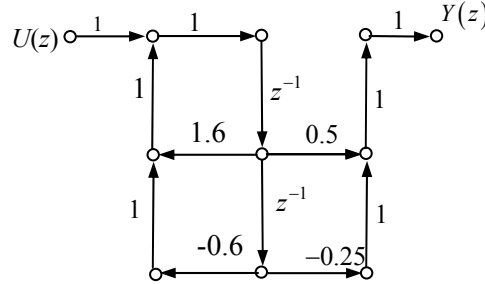


**Fig. 29** Graful de semnal corespunzător descomunerii din fig. 23 a sistemului



subsistemul FIR, ca în fig. 27. Ținând cont de grafurile celor două subsisteme înseriate: IIR (structura recursivă) și FIR (structura nerecursivă), prezentate în fig. 25, respectiv fig. 24, graful întregului sistem ar putea să fie reprezentat ca în fig. 28. Aici se observă cu ușurință faptul că șirul de arce având funcția de transfer egală cu  $z^{-1}$  primește la intrare același semnal,  $Y_1(z)$ . Deci, nodurilor care urmează le corespund aceleași semnale, în cele două șiruri de arce:  $z^{-1}Y_1(z)$ ,  $z^{-2}Y_1(z)$ , ...,  $z^{-(n-1)}Y_1(z)$ ,  $z^{-n}Y_1(z)$ . Prin urmare, cele două lanțuri de arce fiind identice și având la toate nodurile aceleași semnale, se poate considera un singur lanț de arce și graful sistemului capătă forma din fig. 29.

**Exemplu** Fie sistemul având graful din fig. 30. Să se deducă ecuația intrare – ieșire, polii și zerourile, precum și expresia amplificării.



**Fig.30** Sistem cu timp discret (exemplu)

Având în vedere corespondența dintre graful general din fig. 29 și funcția de transfer generală a sistemului cu timp discret, rezultă:

- funcția de transfer  $H(z) = \frac{0.5z^{-1} - 0.25z^{-2}}{1 - 1.6z^{-1} + 0.6z^{-2}} = \frac{0.5z - 0.25}{z^2 - 1.6z + 0.6} = \frac{0.5(z - 0.5)}{(z - 1)(z - 0.6)}$ ;
- ecuația intrare-ieșire:  $y(k) = 1.6y(k - 1) - 0.6y(k - 2) + 0.5u(k - 1) - 0.25u(k - 2)$ ;
- polii  $p_1=1$ ,  $p_2=0.6$ ; zeroul:  $z_1=0.5$ ;
- expresia amplificării:

$$A(\omega) = \left| H(e^{j\omega T_e}) \right| = \left| \frac{0.5e^{-j\omega T_e} - 0.25e^{-2j\omega T_e}}{1 - 1.6e^{-j\omega T_e} + 0.6e^{-2j\omega T_e}} \right| =$$

$$= \frac{\sqrt{(0.5 \cos(\omega T_e) - 0.25 \cos(2\omega T_e))^2 + (-0.5 \sin(\omega T_e) + 0.25 \sin(2\omega T_e))^2}}{\sqrt{(1 - 1.6 \cos(\omega T_e) + 0.6 \cos(2\omega T_e))^2 + (1.6 \sin(\omega T_e) - 0.6 \sin(2\omega T_e))^2}}$$